

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 34 (1988)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE THÉORIE DE DENJOY DES MARTINGALES DYADIQUES  
**Autor:** Kahane, Jean-Pierre  
**Anhang:** Appendice: distribution de la fonction f  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-56598>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

APPENDICE: DISTRIBUTION DE LA FONCTION  $f$ 

THÉORÈME. Pour qu'une mesure positive  $\mu$  sur  $\mathbf{R}$  soit la distribution d'une limite de martingale dyadique partout convergente (au sens de (3)) il faut et il suffit que l'on ait

$$(8) \quad \int_{\mathbf{R}} |y| d\mu(y) < \infty$$

ou

$$(9) \quad \int_{\mathbf{R}^-} |y| d\mu(y) = \int_{\mathbf{R}^+} y d\mu(y) = \infty.$$

*Preuve.* Nous identifierons  $X$  et l'intervalle  $[0, 1]$  de  $\mathbf{R}$  où les points dyadiques autres que 0 et 1 sont dédoublés (voir (6) et (7)). Ainsi, une fonction continue sur  $X$  est une fonction continue sur  $[0, 1] \setminus D$  ( $D$  est l'ensemble des points dyadiques) admettant des limites en 0 et en 1, et, en tout point de  $D$  autre que 0 et 1, une limite à droite et une limite à gauche. Considérons des cas de difficulté croissante

a)  $\mu$  est portée par un intervalle  $[a, b]$  et charge tout sous-intervalle de  $[a, b]$ . Soit  $f$  la fonction croissante sur  $[0, 1]$  dont la distribution est  $\mu$ . Comme  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ , les espérances conditionnelles  $f_n = E(f/\mathcal{T}_n)$  ( $\mathcal{T}_n$  est la  $n$ -ième tribu dyadique) convergent uniformément vers  $f$ .

b)  $\mu$  est portée par un intervalle  $[a, b]$ , et la fonction de répartition  $\bar{\mu}(y) = \mu(-\infty, y)$  est dyadique sur les paliers (intervalles de constance)  $P_n$ . Elle est donc strictement croissante sur  $[a, b] \setminus \cup P_n$  et applique cet ensemble dans  $[0, 1] \setminus \cup \{p_n\}$ , où  $p_n \in D$ . La fonction réciproque se prolonge en une fonction continue  $f$  sur  $X$ , et les espérances conditionnelles  $f_n$  convergent uniformément vers  $f$  sur  $X$ .

c)  $\mu$  est portée par un intervalle  $[a, b]$ , et la fonction de répartition  $\bar{\mu}(x)$  admet un palier unique  $P$  entre  $a$  et  $b$ , où sa valeur  $p$  n'est pas dyadique. Etant donné  $\varepsilon > 0$ , tel que  $\varepsilon < \inf(p, 1-p)$ , choisissons  $p_1 \in D$  tel que  $|p_1 - p| < \frac{\varepsilon}{2}$  et posons  $p' = 2p - p_1$ , puis choisissons  $p_2 \in D$  tel que  $|p_2 - p'| < \frac{\varepsilon}{2^2}$  et posons  $p'' = 2p' - p_2$ , et ainsi de suite. On obtient une suite  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  contenue dans  $D$ , convergente, telle que

$$(10) \quad p = \sum_1^{\infty} p_n 2^{-n}$$

et

$$(11) \quad |\lim p_n - p| < \varepsilon.$$

Désignons par  $\psi_n$  l'application de  $[0, 1]$  sur  $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$  qui applique linéairement  $[0, p]$  sur  $[2^{-n}, 2^{-n} + p_n 2^{-n}]$  et  $[p, 1]$  sur  $[2^{-n} + p_n 2^{-n}, 2^{-n+1}]$ , et désignons par  $\varphi_n$  l'application réciproque de  $\psi_n$ . Soit  $g$  la fonction croissante sur  $[0, 1]$ , définie et continue sauf en  $p$ , dont la distribution est  $\mu$ . Chaque fonction  $g \circ \varphi_n$  est prolongeable par continuité sur  $X$ , et sa fonction de répartition est  $\psi_n(\bar{\mu}(\cdot) - 2^{-n})$ . D'après (10) et (11) on a

$$(12) \quad \sum_1^{\infty} \psi_n(\bar{\mu}(\cdot) - 2^{-n}) = \bar{\mu}(\cdot)$$

$$(13) \quad \lim 2^n \psi_n(\bar{\mu}(\cdot)) = \psi(\bar{\mu}(\cdot)),$$

où  $\psi$  est l'application de  $[0, 1]$  sur lui-même qui applique linéairement  $[0, p]$  sur  $[0, \lim p_n]$  et  $[p, 1]$  sur  $[\lim p_n, 1]$ . Posons

$$(14) \quad f = \sum_1^{\infty} g \circ \varphi_n$$

et remarquons que les supports des  $g \circ \varphi_n$  constituent une partition de  $X \setminus \{0\}$ . D'après (12) la distribution de  $f$  est  $\mu$ . Pour  $m \leq n$  l'espérance conditionnelle  $f_m = E(f/\mathcal{F}_m)$  est constante sur  $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$  et égale à la valeur moyenne de  $g \circ \varphi_n$ , qui est

$$\int y d(\psi_n \circ \bar{\mu})(y).$$

En posant

$$f(0) = \int y d(\psi \circ \bar{\mu})(y)$$

$f$  est limite des  $f_m$  en tout point, y compris 0.

d)  $\mu$  est portée par un intervalle  $[a, b]$ . Choisissons un dénombrable dense dans  $[0, 1]$ , contenant 0, 1, et toutes les valeurs de la fonction de répartition  $\bar{\mu}(\cdot)$  sur les paliers; soit  $\Delta$  ce dénombrable. Fixons  $0 < \varepsilon < 1$ . Ordonnons  $\Delta$  en commençant par 0 et 1, de façon quelconque ensuite, et définissons par induction suivant cet ordre une fonction  $\gamma_1$  croissante sur  $\Delta$ , appliquant  $\Delta$  dans  $D$ , telle que  $\gamma_1(0) = 0$ ,  $\gamma_1(1) = 1$ , et

$$(15) \quad \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)(p - q) \leq \gamma_1(p) - \gamma_1(q) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)(p - q)$$

pour tout couple  $(p, q)$  d'éléments de  $\Delta$  tels que  $p > q$ . Soit  $\Delta'$  l'image de  $\Delta$  dans l'application  $p \rightarrow p' = 2p - \gamma_1(p)$ , puis  $\gamma_2$  une fonction croissante sur  $\Delta'$ , appliquant  $\Delta'$  dans  $D$ , avec  $\gamma_2(0) = 0$ ,  $\gamma_2(1) = 1$ , et

$$(16) \quad \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)(p' - q') < \gamma_2(p') - \gamma_2(q') < \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)(p' - q')$$

pour tout couple  $(p', q')$  d'éléments de  $\Delta'$  tels que  $p' < q'$ , et ainsi de suite. Il résulte de (15) (en choisissant  $q=0$ ), que

$$|p' - p| = |\gamma_1(p) - p| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et de (16), en posant  $p'' = 2p' - \gamma_2(p')$ , que

$$|p'' - p'| < \frac{\varepsilon}{4}$$

et ainsi de suite. A chaque  $p \in \Delta$  correspondent deux suites  $p^{(n)}$  et  $p_n = \gamma_n(p^{(n-1)})$ , qui convergent vers une même limite  $\gamma(p)$  telle que  $|\gamma(p) - p| \leq \varepsilon$  et telle que (10) ait lieu. A partir de là on construit les fonctions continues  $\psi_n$  appliquant  $[0, 1]$  sur  $[2^{-n}, 2^{n+1}]$  de façon que, pour chaque  $p \in \Delta$ ,

$$\Psi_n(p) = 2^{-n} + p_n 2^{-n},$$

les fonctions réciproques  $\varphi_n$  et la fonction  $f$  comme en (14). De nouveau  $f$  est limite d'une martingale dyadique et  $f$  admet  $\mu$  pour distribution.

e)  $\mu$  vérifie (8). Quitte à translater  $\mu$ , supposons  $\int y d\mu(y) = 0$ . Décomposons  $\mu$  en une somme

$$(17) \quad \mu = \sum_1^{\infty} \mu_n,$$

chaque  $\mu_n$  étant à support compact  $[a_n, b_n]$ , avec  $\mu_n(\mathbf{R}) = 2^{-n}$  et

$$(18) \quad \int y d\mu_n(y) = 0.$$

A la normalisation près, l'hypothèse d) est vérifiée pour  $\mu_n$ . Il existe donc une fonction  $f^{(n)}$  portée par  $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$ , limite de martingale dyadique, admettant  $\mu_n$  pour distribution. Remarquons que la valeur moyenne de  $f^{(n)}$  est 0. Posons

$$(19) \quad f = \sum_1^{\infty} f^{(n)}.$$

Alors  $f$  est limite de martingale dyadique et sa distribution est  $\mu$ .

f)  $\mu$  vérifie (9). On la décompose encore sous la forme (17), on définit les  $f^{(n)}$  et  $f$  par (19). La condition est la même, et la totale de  $f$ ,  $f_0$ , est nulle. En remplaçant 0 par  $\alpha$  dans le second membre de (18) ce qui est possible à cause de l'hypothèse (9), on obtient  $f_0 = \alpha$ . Le théorème est démontré.

Remarquons que la totalisation de la fonction  $f$  nécessite une seule étape dans les cas a), b), c), d), et qu'elle est pratiquement terminée à l'étape  $\omega$  ( $K^\omega$  est réduit à  $\{0\}$ ) dans les cas e) et f).

Dans le cas f) on peut introduire un « arbre de distribution » permettant le calcul de  $f_0$ . Il s'agit de l'arbre des mesures  $\mu_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$  qui sont les distributions de  $f$  sur les cellules  $C(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ . Ainsi

$$(20) \quad \begin{cases} \mu_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} = \mu_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 0} + \mu_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 1} \\ \mu_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(C(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)) = \mu_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(X) = 2^{-n} \end{cases}$$

( $n=0, 1, \dots$ ;  $\varepsilon_j=0$  ou 1). La condition (20) est nécessaire, mais elle n'est pas suffisante. La théorie de la totalisation dyadique montre que se trouve nécessairement dans l'arbre une infinité de mesures à supports compacts; la première étape de la totalisation consiste à remplacer ces mesures par des mesures ponctuelles ayant même masse et même centre de gravité; dans le nouvel arbre, on recommence l'opération, et ainsi de suite, transfinitement au besoin, jusqu'à obtenir un arbre stationnaire. Cet arbre stationnaire décrit alors la martingale dyadique (au niveau  $n$ , on obtient la distribution de  $f_n$ ). Il serait intéressant de connaître la caractérisation des arbres de distributions des limites de martingales dyadiques.

#### CITATIONS ET PASTICHE

1. Si une part de mon œuvre mathématique vient à sauver mon nom de l'oubli, sans doute resterai-je l'analyste qui le premier a trouvé les moyens d'intégrer toute dérivée et de calculer les coefficients de toute série trigonométrique convergente de somme donnée.

Arnaud DENJOY

*Notice sur les travaux scientifiques,*  
Paris, Hermann, 1934 (p. 5)