Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1988)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE THÉORIE DE DENJOY DES MARTINGALES DYADIQUES

Autor: Kahane, Jean-Pierre

Kapitel: Commentaires

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56598

COMMENTAIRES

1. Il existe une autre structure intéressante de X, celle du groupe abélien. Les caractères coordonnés sont les « fonctions de Rademacher » $r_k(x) = (-1)^{x_k} (k=1, 2, ...)$. Les caractères généraux sont les « fonctions de Walsh » $w_n (n=0, 1, ...)$ ainsi définies

$$w_n = \prod r_k^{\alpha_k} \Leftrightarrow n = \sum \alpha_k 2^{k-1}$$

($\alpha_k = 0$ ou 1, $\sum$ somme finie, $\prod$ produit fini). Une « série de Fourier-Walsh » est de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x) .$$

Les sommes partielles d'ordre 2^k (de la forme $\sum\limits_{0 \leqslant n < 2^k}$) d'une telle série forment une martingale dyadique. Si la série est partout convergente, la totalisation que nous venons de décrire permet de calculer à partir de la somme le premier coefficient, a_0, et de même (en totalisant sur des cellules au lieu de X entier) les autres coefficients. Ainsi, sur ce modèle dyadique, le calcul des coefficients d'une série trigonométrique (remplacée par une série de Fourier-Walsh) apparaît très naturel. Naturellement, le cas trigonométrique ordinaire requiert beaucoup plus de travail.

2. Dans la théorie ordinaire des martingales, on ne se soucie pas des ensembles de mesure nulle. Ici, il est essentiel que la martingale converge partout sur X. D'une martingale convergeant partout sauf en un point, on ne saurait rien dire.

3. Dans la théorie ordinaire des martingales, s'il y a convergence dans L^1, la valeur initiale est l'intégrale de la fonction limite, et ne dépend donc que de la distribution de la fonction limite. D'ailleurs, la distribution de la fonction limite peut être n'importe quelle distribution μ sur $\mathbf{R}$, pourvu que l'intégrale $\int |y| \, d\mu(y)$ soit finie. (On choisit arbitrairement une fonction ayant cette distribution; ses espérances conditionnelles relativement aux tribus $\mathcal{T}_n$ engendrées par les cellules d'ordre n convergent vers elle presque partout et dans L^1). Ici, il apparaît deux cas. Si la limite (partout) est intégrable, la valeur initiale est l'intégrale de la limite, et ne dépend donc que de sa distribution. Sinon, la valeur initiale est la totale de la limite, et elle n'est pas du tout déterminée par sa distribution. Il est naturel de chercher ce qu'on peut dire de la distribution de la fonction limite. C'est l'objet de l'appendice.

4. Dans la totalisation dyadique apparaît une chaîne de compacts non-denses K^α strictement décroissants. Limitons-nous aux ordinaux limites

$$(\alpha = \omega, 2\omega, 3\omega, \dots \omega^2, \omega^2 + \omega, \dots),$$

que nous écrivons

$$\alpha = \beta\omega \quad (\beta = 1, 2, 3, \dots \omega, \omega + 1, \dots).$$

La différence $K^{(\beta+1)\omega} \backslash K^{\beta\omega}$ est un ensemble infini. Inversement, étant donné une chaîne (dénombrable) $\mathscr{K}^\beta$ de compacts non-denses de X, décroissants vers $\emptyset$, et telle que $\mathscr{K}^\beta \backslash \mathscr{K}^{\beta+1}$ est infini pour tout β, on voit comment construire une chaîne K^α telle que $K^{\beta\omega} = \mathscr{K}^\beta$, telle que les K^α soient des compacts non-denses, et qu'on passe de K^α à $K^{\alpha+1}$ par ablation d'une portion dyadique. On voit encore, les K^α étant ainsi choisis, comment construire des f^α, tels que chaque f^α soit constante sur les cellules maximales disjointes de K^α, non bornée au voisinage de chaque point de $K^{\alpha+1}$ et bornée au voisinage de $K^\alpha \backslash K^{\alpha+1}$, avec la propriété que la moyenne de f^α sur la cellule minimale C^α contenant $K^\alpha \backslash K^{\alpha+1}$ vaut $f^{\alpha+1}$ (constante sur C^α). Ainsi, en remontant la chaîne, on peut reconstituer la fonction $f = f^0$ telle que, dans la totalisation, on trouve à l'étape d'ordre α le compact K^α et la fonction f^α.

5. Voici quelques références. Les travaux de Denjoy débutent avec deux notes aux Comptes-Rendus [1], [2], qui exposent rapidement la totalisation qu'il appellera plus tard « simple », et son usage pour le calcul des primitives. La totalisation dyadique ici introduite diffère de la totalisation simple de Denjoy en ce qu'elle considère uniquement des intervalles dyadiques (au lieu d'intervalles quelconques) et des fonctions bornées (au lieu de fonctions intégrables au sens de Lebesgue). L'exposé le plus complet de la totalisation simple et des autres totalisations de Denjoy se trouve dans le monumental ouvrage [3], dont les chapitres VII et VIII (pp. 327-481) sont consacrés aux totalisations, et le chapitre IX (pp. 483-595) à l'application aux séries trigonométriques.

La totalisation simple est un cas particulier de l'« intégrale de Riemann généralisée » de R. Henstock ([4], chap. 10). D'après Pacquement [5], l'intégrale de Henstock permet l'intégration des dérivées dyadiques, au sens précisé ici (le terme de « dérivée dyadique » est employé dans un sens tout différent par P. Butzer et ses collaborateurs). Voir également les travaux de V. A. Skvorcov, qui méritent une particulière attention [6], [7], [8], [9].