Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1988)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE CARACTÉRISATION DES NORMES EUCLIDIENNES EN DIMENSION FINIE

Autor: Lion, Georges

Kapitel: Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56586

L'Enseignement Mathématique, t. 34 (1988), p. 13-21

UNE CARACTÉRISATION DES NORMES EUCLIDIENNES EN DIMENSION FINIE

par Georges LION

INTRODUCTION

Depuis l'énoncé de la relation du parallélogramme, par Jordan et Von Neumann (voir [5]), sont apparues de nombreuses caractérisations des structures euclidiennes sur un espace vectoriel réel E, de dimension finie n (voir [1] et [7]). Ces caractérisations sont assez souvent énoncées sous forme de théorèmes *d'existence* (par exemple existence de projecteurs par A. Robert dans [9]), mettant en lumière la « richesse » spécifique des structures euclidiennes au sein des structures d'espaces normés. D'autres caractérisations sont données par J. W. Robbin [8] et H. Rosenthal [10], respectivement en termes d'algèbres de Lie, et de dimension.

C'est dans cet esprit que nous nous proposons de caractériser les structures euclidiennes par une propriété de l'ensemble des isométries qui leur sont attachées :

Dans l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E, muni de la norme des opérateurs, la boule unité admet pour seuls points extrémaux les isométries de E si, et seulement si, E est euclidien.

Résumons les étapes de la démonstration. Si N désigne la norme étudiée, et $\mathscr{G}_N$ le groupe des isométries linéaires associées à N, il existe alors une structure euclidienne sur E, telle que tout élément de $\mathscr{G}_N$ soit une isométrie euclidienne. Le résultat, vrai pour tout groupe compact, et déjà signalé dans [10], est un cas particulier du fait que toute représentation linéaire d'un groupe compact est unitaire.

L'inclusion de $\mathscr{G}_N$ étant établie, on démontre que, si N n'est pas euclidienne, la structure de la boule unité B_N permet de définir un projecteur de norme 1 qui n'est pas barycentre d'isométries.

En revanche, dans un espace euclidien, tout endomorphisme de E de norme $\leqslant 1$, est barycentre d'isométries; c'est un cas très particulier de la version réelle du théorème de Russo Dye (voir [3], [6], [11]).

Notre travail s'achève par l'étude d'un exemple qui illustre doublement ce qui précède: à la structure euclidienne dans $\mathbf{R}^2$, correspond la norme des opérateurs dans $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$, $\mathbf{R}$ espace de dimension 4; ainsi apparaît une norme non euclidienne dans $\mathbf{R}^4$. Mais l'introduction des opérateurs $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \bar{z}$ permet de surcroît d'identifier $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ à $\mathbf{C}^2$, et de reconnaître dans la norme étudiée la norme l^1 de $\mathbf{C}^2$. Si Γ désigne le groupe des isométries $\mathbf{R}$ linéaires de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ dans lui-même, on peut distinguer dans Γ trois sous-groupes intéressants:

1) *Un sous-groupe isomorphe à* $O(2) \times O(2)$.

2) *Le groupe des éléments de* Γ *de déterminant* $+1$, image de $O(2) \times O(2)$ par la représentation d'indice 2 définie ainsi: Si v et w appartiennent à $O(2)$, on note $\Phi_{v,w}$ l'application $u \mapsto vuw^{-1}$, de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ dans lui-même; $\Phi_{v,w}$ est une isométrie de déterminant 1, et toute telle isométrie peut s'écrire $\Phi_{v,w}$ pour un double choix du couple (v, w).

3) *Le groupe des éléments* $\mathbf{C}$*-linéaires de* Γ, dans lequel opère naturellement le groupe c_2 à 2 éléments, ce qui le rend isomorphe au produit semi-direct de $SO(2)$ par lui-même.

Je remercie le référé pour la documentation intéressante qu'il m'a signalée.

I. Groupe des isométries linéaires

Dans ce paragraphe p désigne une fonction définie et continue dans $\mathbf{R}^n$, à valeurs strictement positives hors de 0, positivement homogène (pour que p soit une norme il faudrait en plus que p soit symétrique et sous additive).

On note $\mathscr{G}_p$ l'ensemble des applications linéaires u de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, telles que $p \circ u = p$.

Lemme 1. $\mathscr{G}_p$ *est un groupe compact.*

Démonstration. $\mathscr{G}_p$ est stable pour la composition des applications; tout u de $\mathscr{G}_p$ est inversible car la relation $u(x) = 0$ implique $p(x) = p \circ u(x) = 0$, d'où $x = 0$. $\mathscr{G}_p$ est fermé en vertu de la continuité de p.

Etant continue, p atteint sur la sphère euclidienne unité une borne inférieure $a > 0$, et une borne supérieure A; on a donc, pour $u \in \mathscr{G}_p$:

$$A \| x \| \geqslant p(x) = p \circ u(x) \geqslant a \| u(x) \| .$$