

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 34 (1988)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE THÉORIE DE DENJOY DES MARTINGALES DYADIQUES  
**Autor:** Kahane, Jean-Pierre  
**Kapitel:** problème  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-56598>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# UNE THÉORIE DE DENJOY DES MARTINGALES DYADIQUES

par Jean-Pierre KAHANE

En 1912, dans deux notes aux *Comptes-Rendus*, Arnaud Denjoy créait la *totalisation* comme procédé permettant de calculer la primitive de toute fonction dérivée. Ce procédé mariait trois théories: les ordinaux de Cantor, l'intégration de Lebesgue, la topologie de Baire. Modifié, il allait permettre à Denjoy la résolution d'un autre problème, inspiré par Riemann et Cantor, le calcul des coefficients d'une série trigonométrique partout convergente à partir de sa somme. L'exposé des totalisations de Denjoy est réputé difficile. Lui-même y a consacré d'importants articles et de gros ouvrages. Mon but est de donner un exposé complet d'une totalisation simplifiée, permettant le calcul des primitives, dans le cadre qui me paraît le mieux adapté: celui des martingales dyadiques partout convergentes ou, de manière équivalente, celui des dérivées dyadiques. J'exposerai le problème, puis la solution. Quelques commentaires suivront. Dans un appendice je caractériserai la distribution des dérivées dyadiques, et je terminerai par quelques citations et un pastiche.

## LE PROBLÈME

Posons  $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^+}$ . Un élément  $x$  de  $X$  est une suite  $(x_1, x_2, \dots)$  à valeurs 0 ou 1. Une martingale dyadique est une suite de fonctions  $f_n$  définies sur  $X$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), à valeurs réelles, et vérifiant les conditions suivantes:

1.  $f_0$  est une constante et  $f_n(x)$  ne dépend que de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; on écrira (abus vénien)

$$(1) \quad f_n(x) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

2. Pour tout  $n$  et tout  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$(2) \quad f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} (f_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) + f_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)).$$

Nous considérons des martingales dyadiques partout convergentes, donc

$$(3) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

existe pour tout  $x \in X$ . Notre but est de calculer la valeur moyenne de la martingale (c'est la valeur moyenne de  $f_n$ , indépendante de  $n$ ), soit

$$(4) \quad f_0 = \frac{1}{2} (f_1(0) + f_1(1)) = \mathcal{M}(f_n) = 2^{-n} \sum f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

à partir de la fonction  $f(x)$ .

La situation peut encore se décrire ainsi. On considère sur l'intervalle fermé  $I = [0, 1]$  une fonction réelle  $F$ . On pose

$$f_0 = F(1) - F(0)$$

et généralement

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = 2^n \left( F\left(\frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) - F\left(\frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^n}\right) \right);$$

c'est la pente de la corde du graphe de  $F$  au-dessus de l'intervalle dyadique

$$\left[ \frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^n}, \frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right]$$

(c'est ce que nous appellerons une « corde dyadique »). Toute martingale dyadique peut s'obtenir de cette façon. Si la fonction  $F$  est partout dérivable, la martingale est partout convergente, avec pour limite

$$(5) \quad f(x) = F' \left( \sum_1^\infty x_j \cdot 2^{-j} \right).$$

Le calcul de  $f_0$  à partir de  $f$  est bien une totalisation de la dérivée  $F'$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Réciproquement, si la martingale est partout convergente, on peut dire que  $F$  est « dérivable au sens dyadique »; cela signifie, pour tout point  $t \in [0, 1]$  non dyadique, que les pentes des cordes dyadiques au-dessus de  $t$  tendent vers une limite, la « dérivée dyadique », et qu'en tout point  $t \in [0, 1]$  dyadique, les pentes des cordes dyadiques ayant leur extrémité droite resp. gauche au-dessus de  $t$  tendent vers une limite, la « dérivée dyadique gauche » resp. « droite ». En posant, quand  $t$  n'est pas dyadique

$$(6) \quad t = \sum_1^\infty x_j 2^{-j}$$

et, quand  $t$  est dyadique

$$(7) \quad \begin{aligned} t + 0 &= \sum_1^{\infty} x_j \cdot 2^{-j} \quad (x_j = 0 \text{ pour } j \text{ grand}) \\ t - 0 &= \sum_1^{\infty} x_j \cdot 2^{-j} \quad (x_j = 1 \text{ pour } j \text{ grand}), \end{aligned}$$

les expressions  $F'(t)$ ,  $F'(t+0)$ ,  $F'(t-0)$  données par (5) sont les dérivées dyadiques (resp. droite, resp. gauche). Notre problème, un peu plus général que celui de Denjoy, consiste à calculer une fonction  $F$  à partir de ses dérivées dyadiques, supposées exister en tout point.

Restreignons  $F$  à l'ensemble des nombres dyadiques (les autres n'interviennent pas dans la définition des dérivées dyadiques) et observons que si  $F$  a ses dérivées dyadiques partout  $> 0$ ,  $F$  est strictement croissante. C'est un analogue du théorème de Rolle qui s'établit aisément par dichotomie: s'il existait une corde dyadique à pente  $\leq 0$ , il existerait une suite de telles cordes au-dessus d'intervalles dyadiques emboîtés décroissants, donc une dérivée dyadique  $\leq 0$ . La première conséquence est le théorème d'unicité: si  $f \equiv 0$ ,  $F$  est une constante, donc  $f_n \equiv 0$ . Voici une seconde conséquence.

**LEMME.** Si  $\alpha \leq f \leq \beta$ , on a  $\alpha \leq f_n \leq \beta$  pour tout  $n$ .

**Preuve.**  $\alpha \leq \frac{F(t) - F(s)}{t - s} \leq \beta$ .

#### LA SOLUTION: TOTALISATION DYADIQUE

Revenons à  $X$ . C'est un espace probabilisé, avec la probabilité naturelle (à savoir l'image réciproque de la mesure de Lebesgue sur  $[0, 1]$  par l'application  $x \rightarrow t$  vue en (6)). C'est aussi un espace topologique, engendré par les ouverts-fermés

$$C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = \{x : x_1 = \varepsilon_1, x_2 = \varepsilon_2, \dots, x_n = \varepsilon_n\}$$

que nous appelons cellules d'ordre  $n(n \in \mathbb{N})$ , et il a la propriété de Baire: si  $X$  est la limite d'une suite croissante de fermés, ces fermés, à partir d'un certain rang, contiennent une cellule. Comme les  $f_n$  sont des fonctions continues, les ensembles

$$E_m = \{x : \sup_{n \geq m, p \geq m} |f_p(x) - f_n(x)| \leq 1\}$$

sont des fermés. Comme les  $f_n$  convergent en tout point, la réunion des  $E_m$  est  $X$ . D'après la propriété de Baire, les  $E_m$ , à partir d'un certain rang,