

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 34 (1988)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** GEODESICS IN THE UNIT TANGENT BUNDLE OF A ROUND SPHERE  
**Autor:** Gluck, Herman  
**Kapitel:** 2. Geodesics in  $S^2$   
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-56596>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.03.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

2. GEODESICS IN  $US^2$ 

If  $(p(t), v(t))$  is a geodesic in the unit tangent bundle  $US^2$ , then by the discussion in the preceding section, there must be a geodesic  $h(t)$  through the identity in  $SO(3)$  such that

$$h(t)(p(0)) = p(t) \quad \text{and} \quad h(t)(v(0)) = v(t).$$

But  $h(t)$  must fix a line in three-space, and rotate the orthogonal two-plane at constant speed. Hence  $p(t)$ , if it moves at all, must travel along a great or small circle, and  $v(t)$  must make a constant angle with this circle.

A concrete distance formula between points  $(p, v)$  and  $(q, w)$  in  $US^2$  is easily obtained. Let  $\delta$  denote the distance between  $p$  and  $q$  on  $S^2$ , with  $0 \leq \delta \leq \pi$ . If this distance is less than  $\pi$ , that is, if  $p$  and  $q$  are not antipodal, then parallel translate  $v$  along the smaller arc of the unique great circle between  $p$  and  $q$ , and let  $\varepsilon$  denote the angle at  $q$  between this parallel translate of  $v$  and the vector  $w$ , as shown in Figure 3. If  $\delta = \pi$ , set  $\varepsilon = 0$ . Finally, let  $d$  denote the distance between  $(p, v)$  and  $(q, w)$  in  $US^2$ . Then a straightforward calculation reveals the formula

$$\cos(d/2) = \cos(\delta/2) \cos(\varepsilon/2),$$

which is just the Pythagorean formula on a round sphere of radius 2, as indicated in Figure 4. Indeed, we have

$$US^2 = SO(3)/SO(1) = SO(3),$$

a round, real projective 3-space.

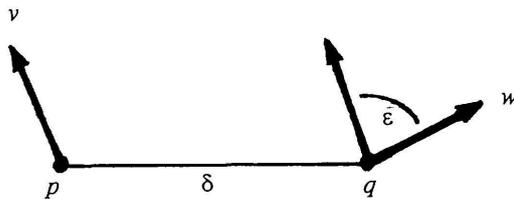


FIGURE 3

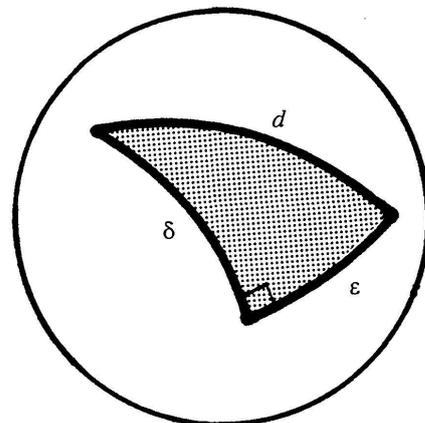


FIGURE 4