Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 33 (1987)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMULES POUR LES TRISÉCANTES DES SURFACES

ALGÉBRIQUES

Autor: Barz, Patrick

Kapitel: I) Rappels et définitions; schémas et \$\Sigma_0\$

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-87886

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 29.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

puisque X est supposé intersection de quadriques. L'exemple le plus simple est évidemment le volume X intersection complète de quatre quadriques, où l'on trouve ainsi 512 droites (ce qu'on vérifie directement dans G(1, 7)).

De même, si $X \subset \mathbf{P}^6$ est un tel volume, le degré de la surface réglée formée des droites dans X est donné par $t_6(V)$ où $V = X \cap \mathcal{H}_3$ comme précédemment.

Première partie: P⁴

- I) Rappels et définitions; schémas Σ et Σ_0
- 1°) Hilb $_c^k \mathbf{P}^N$, $Al^k \mathbf{P}^N$ et formules k-sécantes

On rappelle rapidement les notions introduites dans [24] et [25].

a) Le corps de base est algébriquement clos de caractéristique nulle; on se place sur C pour la commodité.

Si Hilb^k \mathbf{P}^N désigne le schéma de Hilbert [10] des k-uplets de \mathbf{P}^N (sous-schémas de dimension 0 et longueur k), on désignera par Hilb^k \mathbf{P}^N l'ouvert formé des k-uplets curvilignes c'est-à-dire situés sur une courbe non-singulière. L'ouvert Hilb^k \mathbf{P}^N est en général non dense [15], mais en tout cas non-singulier [24] de dimension Nk. Il contient l'ouvert Hilb^k \mathbf{P}^N des k-uplets formés de points distincts comme ouvert dense.

Les k-uplets de \mathbf{P}^N qui sont sous-schémas d'une droite, appelée axe du k-uplet, sont dits alignés. Ils forment une sous-variété non-singulière de dimension 2N + k - 2, notée $Al^k \mathbf{P}^N$, de $Hilb_c^k \mathbf{P}^N$. On a une fibration naturelle, au-dessus de la grassmannienne des droites:

Axe:
$$Al^k \mathbf{P}^N \to G(1, N)$$

qui à un-k-uplet aligné fait correspondre son axe. La fibre-type est $\mathrm{Hilb}^k \, \mathbf{P}^1 \simeq \mathbf{P}^k$.

Exemples et notations. Un doublet est toujours aligné. Si (x, y) sont les coordonnées de \mathbb{C}^2 , le triplet d'idéal (x^2, xy, y^2) n'est pas curviligne; le triplet d'idéal $(x^3, y+x^2)$ est curviligne mais non aligné. On notera \to un doublet de support réduit à un point. Un triplet curviligne de support réduit à un point sera noté $\stackrel{3}{\to}$ et s'il est aligné, on le notera $\stackrel{3}{\to}$. Remarquons par exemple que le quadruplet \to est aligné, mais celui-ci: \to ↑ ne l'est pas, bien qu'évidemment le réduit associé le soit!

b) Définissons maintenant le cycle des k-sécantes d'une surface de \mathbf{P}^N . Soit $S \subset \mathbf{P}^N$ une surface et $i:Al^k \mathbf{P}^N \hookrightarrow \operatorname{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$ l'injection canonique. Comme $\operatorname{Hilb}^k S$ s'identifie à un sous-schéma de $\operatorname{Hilb}^k \mathbf{P}^N$ (par exemple [8]), notons $\operatorname{Hilb}_c^k S$ la trace de $\operatorname{Hilb}_c^k S$ sur $\operatorname{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$. Le cycle associé [$\operatorname{Hilb}_c^k S$] de $\operatorname{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$ est de dimension 2k et donc le cycle

$$i^*$$
 [Hilb_c^k S]

appartient à $A^{k(N-2)}(Al^k \mathbf{P}^N)$ où A^* désigne l'anneau de Chow, gradué par la codimension. Soit Z un cycle fixé dans $Al^k \mathbf{P}^N$, de dimension complémentaire. On appellera formule k-sécante pour S dans \mathbf{P}^N , une formule donnant le degré d'un 0-cycle Z. i^* [Hilb $_c^k S$] lorsque le cycle Z est fixé.

Exemple. N=4, k=4; dans ce cas Z doit appartenir à $A^2(Al^4 \mathbf{P}^4)$. Un exemple de formule quadrisécante pour les surfaces de \mathbf{P}^4 est donc: les quadrisécantes rencontrant une droite fixe. Dans ce cas, on prend $Z=\mathrm{Axe}^*\sigma$ où $\sigma\in A^2(G(1,4))$ est le cycle de Schubert des droites coupant une droite fixe.

Dans la suite de cet article, on ne s'intéressera qu'aux formules trisécantes pour une surface. On renvoie à [28] pour les autres cas.

2°) Platitude et équivalence rationnelle

La proposition 1 démontrée dans ce paragraphe est le cœur de l'article. Elle permet de remplacer $\mathrm{Hilb}^k_c \ \Sigma_0$.

a) Comme d'habitude, si V est un sous-schéma du schéma H, on désigne par $\lceil V \rceil$ le cycle associé. Commençons par montrer le

Lemme 1. Soit \bar{U} un ouvert de ${\bf C}$ contenant 0 et 1 et soit $U=\bar{U}-\{0\}$. Soit H un schéma.

On se donne un sous-schéma réduit Z de $H \times U$ qu'on suppose plat sur U; soit \bar{Z} son adhérence dans $H \times \bar{U}$. Si la fibre \bar{Z}_0 est génériquement réduite, on a l'équivalence rationnelle dans H:

$$[Z_1] \sim [\bar{Z}_0] = [(\bar{Z}_0)_{\text{red}}].$$

Preuve. Vu ([14], prop. 1.4) et ([11], I.9.5.9 et I.9.5.10), \bar{Z} est l'unique sous-schéma relatif de $H \times \bar{U}$, plat sur \bar{U} , dont la restriction à U est Z. (De plus \bar{Z} est réduit). Par définition de l'équivalence rationnelle, vu la platitude de \bar{Z} sur \bar{U} , on a $[\bar{Z}_1] \sim [\bar{Z}_0]$. Mais $\bar{Z}_1 = Z_1$ et $[\bar{Z}_0] = [(\bar{Z}_0)_{\text{red}}]$ par hypothèse, ce qui démontre le lemme.

Donnons maintenant une définition:

Définition 1. Soit U un ouvert de \mathbb{C} et soit X/U un schéma relatif. On dit que X/U est k-plat si le schéma de Hilbert relatif

$$\operatorname{Hilb}_{c}^{k} X/U$$

est plat sur U et réduit.

Remarque 1. Le cas le plus évident, qui nous intéressera principalement, est celui où X/U est isomorphe à un produit $F \times U$. Dans ce cas, on a l'isomorphisme $\operatorname{Hilb}_c^k X/U \simeq (\operatorname{Hilb}_c^k F) \times U$. Ce schéma relatif étant un produit, est plat. Il suffit donc de supposer $\operatorname{Hilb}_c^k F$ réduit, ce qui est toujours le cas si F est non-singulier (car alors $\operatorname{Hilb}_c^k F$ est aussi non-singulier) ou bien si F est une surface à singularités ordinaires de \mathbf{P}^4 (voir Annexe 1).

On peut de manière analogue montrer le

LEMME 2. Si X/U est un schéma relatif lisse, le schéma relatif $\operatorname{Hilb}^k_{\operatorname{c}} X/U$ est également lisse, donc plat et réduit. Ainsi X/U est k-plat.

Preuve. Soit $\pi: X \to U$ la projection et x un point de X. Il existe un voisinage $\mathscr V$ (disons transcendant) de x et un isomorphisme $\mathscr V \xrightarrow{\sim} U' \times F$ au-dessus d'un voisinage U' de $\pi(x)$, où F est non-singulier. Alors on a $\operatorname{Hilb}_c^k \mathscr V/U' \simeq (\operatorname{Hilb}_c^k F) \times U'$; or $\operatorname{Hilb}_c^k F$ est non-singulier, d'où la lissité.

b) Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer la

PROPOSITION 1. Soit \overline{U} un ouvert de ${\bf C}$ contenant 0 et 1 et soit $U=\overline{U}-\{0\}$. Soit $H={\rm Hilb}^k_c\,{\bf P}^N$.

Soit X/\bar{U} un sous-schéma relatif de $\mathbf{P}^N \times \bar{U}$. On suppose:

- a) tout k-uplet curviligne dans la fibre X_0 est limite de k-uplets curvilignes dans des fibres X_λ , avec $\lambda \neq 0$, de X/U;
- b) $\operatorname{Hilb}_{c}^{k} X_{0}$ est génériquement réduit :
- c) le schéma relatif X/U est k-plat (déf. 1).

Alors on a l'équivalence rationnelle dans $Hilb_c^k \mathbf{P}^N$:

$$[\operatorname{Hilb}_c^k X_1] \sim [(\operatorname{Hilb}_c^k X_0)_{\mathrm{red}}] = [\operatorname{Hilb}_c^k X_0].$$

Preuve. Considérons le schéma relatif $Z/U = \operatorname{Hilb}_c^k X/U$. Par l'hypothèse c), Z est plat sur U et réduit. D'autre part Z est contenu dans le

schéma relatif $\operatorname{Hilb}_c^k X/\overline{U}$ et ce dernier est fermé dans $\operatorname{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N \times \overline{U}$. Par définition de l'adhérence, on a donc l'inclusion

$$\bar{Z} \subset \operatorname{Hilb}_c^k X/\bar{U}$$
.

C'est une inclusion de schémas puisque \overline{Z} est réduit. On en déduit l'inclusion de schémas entre les fibres:

$$\bar{Z}_0 \subset \operatorname{Hilb}_c^k X_0.$$

Maintenant l'hypothèse a) signifie précisément l'inclusion $(\operatorname{Hilb}_c^k X_0)_{\mathrm{red}} \subset \overline{Z}$. Comme $(\operatorname{Hilb}_c^k X_0)_{\mathrm{red}}$ est contenu dans la fibre en 0 de $\operatorname{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N \times \overline{U}$, on a donc l'inclusion

$$(2) (Hilb_c^k X_0)_{red} \subset \bar{Z}_0.$$

On a donc montré

(3)
$$(\operatorname{Hilb}_{c}^{k} X_{0})_{\text{red}} \subset \bar{Z}_{0} \subset \operatorname{Hilb}_{c}^{k} X_{0}.$$

Or l'hypothèse b) assure que $\operatorname{Hilb}_{c}^{k} X_{0}$ est génériquement réduit; donc \overline{Z}_{0} aussi, d'après (3). Les hypothèses du lemme 1 sont donc satisfaites pour Z et l'on a ainsi, vu (3):

$$[Z_1] \sim [\bar{Z}_0] = [\operatorname{Hilb}_c^k X_0] = [(\operatorname{Hilb}_c^k X_0)_{\operatorname{red}}].$$

Or par définition même, $Z_1 = (\operatorname{Hilb}_c^k X/U)_1 = \operatorname{Hilb}_c^k X_1$. La proposition 1 est donc démontrée.

c) Nous allons donner pour l'instant comme application de cette proposition, un corollaire technique qui peut être sauté en première lecture. Par singularités ordinaires d'une surface S' dans \mathbf{P}^3 nous entendons uniquement croisements normaux, points-triples et points-pince.

PROPOSITION 2. Soit $S' \subset \mathbf{P}^3$ une surface à singularités ordinaires, de degré n. Alors pour tout cycle K dans $A^{\bullet}(Al^3 \mathbf{P}^3)$, de dimension 3, le degré du 0-cycle

$$K.i^*$$
 [Hilb³_c S']

est de la forme

$$a_1n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3}$$

où a_1, a_2, a_3 sont des constantes ne dépendant que de K.

(Comme toujours, $i: Al^3 \mathbf{P}^3 \hookrightarrow \operatorname{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^3$ désigne l'injection canonique.) Remarquons que $\operatorname{Hilb}_c^3 S'$ est génériquement réduit par l'Annexe 2: S' n'a que des singularités ordinaires.

Preuve. Soit M la réunion de n plans en position générale dans \mathbf{P}^3 , tous transverses à S'. Soit f_0 une équation de S' et f_2 une équation de M. Considérons le sous-schéma relatif X/\mathbb{C} de $\mathbf{P}^3 \times \mathbb{C}$ défini par l'équation

$$(\lambda - 2)f_0 + \lambda f_2 = 0$$

où λ parcourt C. On a bien sûr $X_0 = S'$ et $X_2 = M$. Soit U l'ouvert maximal de C tel que X/U soit lisse au-dessus de U. Il est non vide et on peut toujours supposer que 1 lui appartient. Le schéma X/U est k-plat car il est lisse (lemme 2).

Soit $\overline{U}_0 = U \cup \{0\}$ et $\overline{U}_2 = U \cup \{2\}$. Les lemmes 10 et 11 de l'Annexe 2 montrent que les hypothèses a) et b) de la proposition 1 sont vérifiées: en effet localement au-dessus d'un voisinage de 0 ou 2, le schéma relatif X est isomorphe aux schémas relatifs Θ ou Π des lemmes 10 et 11. Cela résulte de ce que S' et M n'ont que des singularités ordinaires. On applique alors deux fois la proposition 1, en remplaçant l'une des deux fois 0 par 2 évidemment, et on trouve donc l'équivalence rationnelle:

$$[\operatorname{Hilb}_{c}^{k} X_{0}] \sim [\operatorname{Hilb}_{c}^{k} X_{1}] \sim [\operatorname{Hilb}_{c}^{k} X_{2}],$$

soit encore

$$[\operatorname{Hilb}_c^k S'] \sim [\operatorname{Hilb}_c^k M].$$

On s'est donc ramené à montrer la proposition pour la réunion de n plans. Soit P_1 , P_2 ... P_n les plans dont la réunion est M; soit k_1 , k_2 ... k_n des entiers positifs tels que $k_1 + k_2 + ... + k_n = 3$ et soit $U_{k_1, k_2 ... k_n}$ l'ensemble des triplets simples ayant k_i points sur P_i . D'après le lemme 10 (Annexe 2) le schéma (Hilb $_c^3$ M)_{red} admet les adhérences $\overline{U_{k_1, k_2 ... k_n}}$ comme uniques composantes irréductibles. Appelons « type » d'une telle composante l'ensemble des k_i non nuls. Ainsi (Hilb $_c^3$ M)_{red} est formé de

$$\binom{n}{3}$$
 composantes irréductibles de type $\{1, 1, 1\}$,

$$2\binom{n}{2}$$
 composantes irréductibles de type $\{2, 1\}$,

n composantes irréductibles de type $\{3\}$.

De plus, deux composantes irréductibles de même type sont évidemment rationnellement équivalentes dans $\operatorname{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^3$, comme on le voit en faisant agir PGL(3) sur les triplets de plans. Ainsi,

$$[\operatorname{Hilb}_{c}^{3} M] = [(\operatorname{Hilb}_{c}^{3} M)_{\operatorname{red}}] = \binom{n}{3} A + \binom{n}{2} B + nC$$

où A, B et C sont trois cycles fixés dans l'anneau de Chow de Hilb $_c^3$ \mathbf{P}^3 ; d'où le résultat annoncé.

Remarque 2. Le lecteur adaptera sans peine la démonstration pour montrer que pour tout cycle $K \in A^{\bullet}(Al^k \mathbf{P}^3)$, de dimension k, le degré du 0-cycle $K \cdot i^*$ [Hilb_c S'] est de la forme

$$a_1n + a_2 \binom{n}{2} + \dots + a_k \binom{n}{k}$$

où les a_i ne dépendent que de K.

3°) Déformation de S en Σ_0 ; étude de Hilb $_c^k \Sigma_0$

Soit S une surface de \mathbf{P}^4 . La définition donnée en 1) des formules k-sécantes pour S oblige à connaître la classe d'équivalence de $[\mathrm{Hilb}_c^k S]$ dans l'anneau de Chow de $\mathrm{Hilb}_c^k \mathbf{P}^4$.

L'idée qu'on va utiliser est de construire un schéma relatif Σ/\mathbb{C} avec fibre $\Sigma_1 = S$, la fibre Σ_0 ayant pour réduit la projection S' de S sur un hyperplan générique H. On essayera alors d'arriver à l'équivalence rationnelle $[\operatorname{Hilb}_c^k S] \sim [\operatorname{Hilb}_c^k \Sigma_0]$ et d'utiliser la proposition 1. Considérons maintenant un schéma F. Si F est non-singulier, l'ouvert $\operatorname{Hilb}_f^k F$ des k-uplets simples est dense dans $\operatorname{Hilb}_c^k F$: car un k-uplet curviligne dans F est aussi contenu dans une courbe non-singulière Δ située sur F; on le déforme alors en k points simples sur Δ . (Remarquer par contre que $\operatorname{Hilb}_c^k F$ n'est en général pas dense dans $\operatorname{Hilb}_f^k F$; voir [15]).

Remarque 3. C'est justement la présence de composantes immergées dans Σ_0 (de réduit S') qui fait qu'on a $\operatorname{Hilb}_{\neq}^k \Sigma_0$ (ou $\operatorname{Hilb}_{\neq}^k S'$) non dense dans $\operatorname{Hilb}_c^k \Sigma_0$. En fait, on verra que $\operatorname{Hilb}_c^k S'$ (qui est l'adhérence de $\operatorname{Hilb}_{\neq}^k S'$) est seulement une composante irréductible de $\operatorname{Hilb}_c^k \Sigma_0$, lequel scinde en plusieurs composantes. Et c'est l'évaluation de la contribution de chacune de ces composantes dans les formules k-sécantes qui constitue l'essentiel de la démonstration.

a) Commençons par décrire un procédé général de déformation d'un sousschéma de \mathbf{P}^N .

Soit $Z \subset \mathbf{P}^N$ un schéma réduit et Z' sa projection sur un hyperplan H par un point générique ω . D'après ([14], prop. 1.4) ou encore ([13], III, ex. 9.8.3), il existe un sous-schéma réduit \mathscr{Z} de $\mathbf{P}^N \times \mathbf{C}$, plat sur \mathbf{C} , avec pour fibres $\mathscr{Z}_1 = Z$ et $(\mathscr{Z}_0)_{\text{red}} = Z'$. Rappelons pourquoi: On prend pour cela un système de coordonnées homogènes $(x_0:x_1:...:x_N)$ pour lequel H ait pour équation $x_N = 0$, le point ω étant le point (0:0:...:0:1). Le schéma a la structure — réduite — de l'adhérence dans $\mathbf{P}^N \times \mathbf{C}$ de l'image de $Z \times \mathbf{C}^*$ par le plongement

$$Z \times \mathbf{C}^* \hookrightarrow \mathbf{P}^N \times \mathbf{C}^*$$
$$((x_0: x_1: \dots: x_{N-1}: x_N), \lambda) \mapsto ((x_0: x_1: \dots: x_{N-1}: \lambda x_N), \lambda).$$

En général, la fibre \mathcal{Z}_0 possède des composantes immergées (voir [13], p. 260).

Remarque 4. Si on pose $\overline{U}=\mathbb{C}$ et $U=\mathbb{C}^*$, le schéma relatif \mathscr{Z}/U est plat puisqu'il est isomorphe au produit $Z\times U$.

b) Appliquons ce qui précède à une surface S à singularités ordinaires de \mathbf{P}^4 . On la projette génériquement en S' sur un hyperplan H. La sous-variété S' possède une courbe-double Γ , des points triples $M_1, ..., M_t$ et des pointspinces $P_1, ..., P_v$. Il s'agit d'abord d'établir la structure nilpotente de Σ_0 , sachant que $(\Sigma_0)_{\rm red} = S'$. Nous pouvons énoncer deux propositions.

PROPOSITION 3. Avec les notations précédentes, on a l'égalité des sous-schémas de \mathbf{P}^4 :

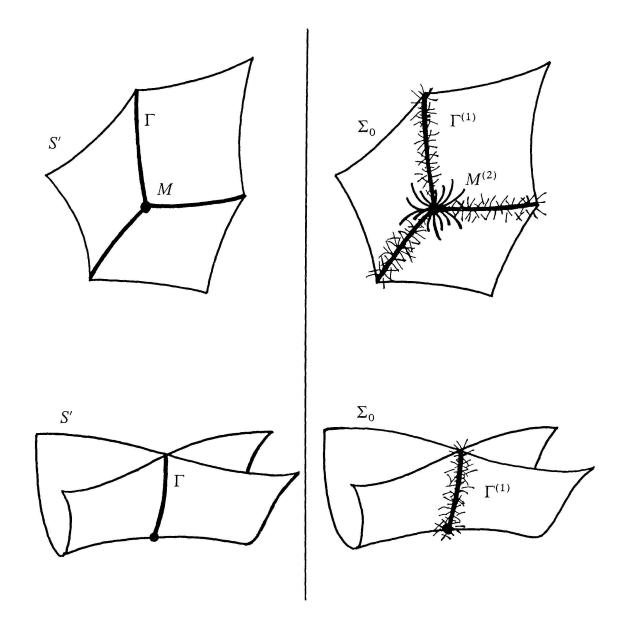
$$\Sigma_0 = S' \cup \Gamma^{(1)} \cup M_1^{(2)} \cup ... \cup M_t^{(2)}$$

où pour $V \subset \mathbf{P}^4$, $V^{(i)}$ désigne le i-ème voisinage infinitésimal de V dans \mathbf{P}^4 . De plus, $S' = (\Sigma_0)_{\rm red} = \Sigma_0 \cap H$.

Dans le dessin ci-après les nilpotents sont dans \mathbf{P}^4 ; on a représenté les doublets (dans \mathbf{P}^4) par des traits courts et les triplets par des traits courbés plus longs.

Avant d'énoncer la proposition suivante, donnons une définition. Celle-ci est motivée par le fait, comme on l'a dit, que pour un schéma quelconque F, l'ouvert $\operatorname{Hilb}_{\neq}^k F$ n'est en général pas dense dans $\operatorname{Hilb}_c^k F$.

Définition 2. Appelons k-uplet « double » (resp. « triple »), une réunion disjointe de points simples et de doublets de support un point (resp. points



simples, doublets de support un point et triplets curvilignes de support un point).

Alors à défaut de pouvoir déformer tout k-uplet curviligne d'un schéma F en k-uplets simples, on peut espérer le déformer en k-uplets doubles, voire triples. C'est justement ce qu'affirme la proposition suivante (en i) pour le schéma Σ_0 .

PROPOSITION 4. Soit Σ/\mathbb{C} le schéma relatif associé à une surface à singularités ordinaires S de \mathbf{P}^4 , dont S' est la projection sur l'hyperplan H.

i) Tout k-uplet curviligne dans Σ_0 , de support un point-triple $\{M\}$, est limite (pour $k \ge 4$) de k-uplets triples dans Σ_0 .

Tout k-uplet curviligne dans Σ_0 de support un point-pince $\{P\}$, est limite (pour $k \ge 3$) de k-uplets doubles dans Σ_0 .

Tout k-uplet curviligne dans Σ_0 , de support un point de la courbe double Γ de S', est limite (pour $k \ge 3$) de k-uplets double dans Σ_0 .

- ii) Tout k-uplet curviligne dans Σ_0 est limite de k-uplets curvilignes dans des fibres Σ_{λ} de Σ/C avec $\lambda \neq 0$.
- iii) Hilb³ Σ_0 est réduit au voisinage d'un triplet curviligne t de support un point-triple $\{M\}$, lorsque $t \notin S' = (\Sigma_0)_{red} = \Sigma_0 \cap H$.

 $\mathrm{Hilb^2}\,\Sigma_0$ est réduit au voisinage d'un doublet d de support un pointpince $\{P\}$, lorsque $d \notin S'$.

 ${
m Hilb^2}\,\Sigma_0$ est réduit au voisinage d'un doublet d de support un point de Γ , lorsque $d \notin S'$.

Preuves des propositions 3 et 4. Il s'agit essentiellement, par des calculs en coordonnées, de se ramener à l'étude de modèles locaux pour Σ_0 , d'abord au voisinage de la courbe double Γ , puis d'un point triple M et enfin d'un point pince. Or cette étude pour les modèles locaux a été faite dans [24]. Voir l'Annexe 3 pour tous les détails de calcul.

II) Trisécantes dans P4: la théorie

Soit S une surface de \mathbf{P}^4 à singularités ordinaires. Notons n son degré, d le degré de la courbe double apparente et t le nombre de points-triples apparents, dans une projection générique sur un \mathbf{P}^3 .

On regarde le diagramme, où les flèches sont les injections canoniques et les dimensions sont entre parenthèses:

(9)
$$Al^3 \mathbf{P}^4$$
 $\stackrel{i}{\hookrightarrow}$ $Hilb_c^3 \mathbf{P}^4$ (12) $\stackrel{}{\mathcal{J}}$ $Hilb_c^3 S$ (6).

Le but de ce § II est de montrer la

PROPOSITION 5. Soit S une surface de \mathbf{P}^4 , d'invariants (n, d, t). Pour tout cycle Z dans $A^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$, la formule trisécante donnant le degré du 0-cycle Z. i^* [Hilb $_c^3$ S] est de la forme