Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 33 (1987)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMULES POUR LES TRISÉCANTES DES SURFACES ALGÉBRIQUES

Autor: Barz, Patrick

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-87886

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

FORMULES POUR LES TRISÉCANTES DES SURFACES ALGÉBRIQUES

par Patrick LE BARZ

Soit X une sous-variété de $\mathbf{P}^N$, sur un corps algébriquement clos. Le but de cet article est d'étudier les droites trisécantes à X et de donner des formules énumératives nouvelles, lorsque X est une *surface*. Par *formules énumératives*, on entend donner le nombre de trisécantes à X vérifiant un certain nombre de conditions convenables (comme par exemple de couper un sous-espace fixé).

Face à ce problème, deux méthodes naturelles apparaissent:

— la méthode du lieu triple;

— la méthode fonctionnelle.

1°) Disons seulement quelques mots de la première, puisque l'article est consacré exclusivement à la seconde; la portée de cette dernière est moins générale que la méthode du lieu triple, mais aussi donne-t-elle dans le cas qui nous intéresse des résultats plus fins, car s'appliquant à une classe plus large de surfaces (surfaces contenant des droites).

Nous allons voir que les trisécantes à X forment un « lieu triple », de même que les cordes de X forment un « lieu double ». En effet, si $f: A \to B$ est un morphisme entre variétés algébriques, *le lieu double de* f est défini grosso modo comme l'ensemble des $x_1 \in A$ pour lesquels il existe $x_2 \neq x_1$ ayant même image $f(x_2) = f(x_1)$. La formule maintenant classique de Laksov [22] donne (la classe de) ce lieu double dans X. Voir la monographie de Fulton [7].

On définit également *le lieu triple de* f (grosso modo l'ensemble des $x_1 \in A$ tels qu'il existe x_2, x_3 distincts et distincts de x_1 ayant même image par f). Dans [17], [18], [19], [20], Kleiman donne une formule pour (la classe de) ce lieu triple dans X avec f supposé suffisamment général. Des perfectionnements ont été apportés depuis par S. Colley [3] et Ran [32]. La formule analogue dans le cas différentiable est due à Ronga [33].

Désignons par $G(1, N)$ la grassmannienne des droites de $\mathbf{P}^N$ et soit $X \subset \mathbf{P}^N$ une sous-variété; soit A dans $\mathbf{P}^N \times G(1, N)$ la variété d'incidence des (x, d) avec $x \in d$ et $x \in X$. On voit alors que les trisécantes à X correspondent au lieu triple de $pr_2 : A \to G(1, N)$. Nous ne continuerons pas dans cette voie, qui consisterait à appliquer la formule générale du lieu triple à ce morphisme.

2°) Soit donc S dans $\mathbf{P}^N$ une surface. La méthode que nous utilisons dans cet article, afin d'établir des formules énumératives pour les trisécantes de S, est *la méthode fonctionnelle.* Cette méthode, telle que la concevaient les Anciens, consisterait à supposer que toute formule trisécante pour S est *a priori* un polynôme en les quatre invariants $n =$ degré S, c_2, K^2 et HK (où H section hyperplane). Auquel cas, on trouve les coefficients d'un tel polynôme par examen de cas particuliers simples pour S.

Bien entendu, la plus grosse difficulté de l'article est de justifier cette assertion. Pour cela, on doit définir rigoureusement ce que l'on entend par « trisécante » et « nombre de trisécantes » afin de pouvoir tenir compte de cas dégénérés. C'est ce qu'on tentera d'expliquer dans le n° suivant.

Avant cela, nous remarquons que lorsque $X \subset \mathbf{P}^N$ est une *courbe* C, les formules trisécantes sont connues depuis fort longtemps:

— nombre de trisécantes à $C \subset \mathbf{P}^3$ coupant une droite fixée,

— nombre de tangentes à $C \subset \mathbf{P}^3$ recoupant C,

— nombre de trisécantes à $C \subset \mathbf{P}^4$.

(Cayley [2], Salmon [37]). Elles ont été initialement trouvées par la méthode fonctionnelle (sans justification) comme fonctions du degré et du genre. Plus tard, une autre méthode est apparue, considérant la « correspondance trisécante » sur $C \times C$ (x et y sont en correspondance s'il existe z aligné avec x et y), puis en montrant que cette correspondance est « à valence ».

Toutes ces formules ont été depuis peu redémontrées rigoureusement; on pourra consulter [1], [9], [12], [23], [36].

3°) Si X est une sous-variété de $\mathbf{P}^N$, disons qu'une droite L est une *trisécante* à X si $L \cap X$ consiste en trois points, éventuellement « infiniment voisins » comme dans le cas d'une tangente L qui recoupe X en un autre point, ou comme dans le cas d'une tangente d'inflexion à X (auquel cas les trois points sont confondus). En langage moderne, une trisécante est une droite L telle que le *schéma* $L \cap X$ soit de longueur 3.

Pour la commodité, on dira par la suite *triplet* pour schéma de dimension 0 et longueur 3 et on dira qu'un triplet est *aligné* s'il est sous-schéma d'une droite. De sorte que nous faisons l'identification commode:

$$\text{droite trisécante à } X \leftrightarrow \text{triplet aligné situé sur } X\,.$$

C'est une identification analogue que faisait déjà Severi [35] pour le problème du nombre des quadrisécantes d'une courbe C de $\mathbf{P}^3$, en considérant « la varietà irreducibile ∞^8, T, delle quaderne di punti allineati dello spazio e la varietà irreducibile ∞^4, U, delle quaderne di punti della generica C. Le T, U son contenute nella varietà irreducibile ∞^{12}, Z, di tutte le quaderne di punti dello spazio ». Il intersectait alors T et U dans Z.

Dans cette citation, on reconnaît implicitement dans Z (pour $k=4$ et $N=3$) *le schéma de Hilbert* $\mathrm{Hilb}^k\,\mathbf{P}^N$ [10] paramétrant les k-uplets de $\mathbf{P}^N$ et en T la sous-variété des k-uplets *alignés*, que nous noterons $Al^k\,\mathbf{P}^N$.

Or tant que l'on parle de sous-schémas d'une courbe non-singulière (comme plus haut $L \cap X$ dans L), cette notion était en fait connue implicitement des Anciens. C'est que pour une courbe non-singulière, le langage des points infiniment voisins suffit, vu que dans ce cas les notions de sous-schéma et de diviseur coïncident. C'est entre autres pourquoi dans la suite de l'article, plutôt que de travailler dans le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^3\,\mathbf{P}^N$ paramétrisant l'ensemble des triplets quelconques de $\mathbf{P}^N$, on se placera dans l'ouvert $\mathrm{Hilb}^3_c\,\mathbf{P}^N$ des triplets (que nous proposons d'appeler *curvilignes*) qui sont sous-schémas d'une courbe *non-singulière*. Les seuls triplets exclus dans cet ouvert sont ceux définis par les carrés d'idéaux maximaux dans un plan, qui correspondraient en langage classique à « des éléments du second ordre, de courbure infinie » (voir [4]). Par ailleurs, la lissité de l'ouvert $\mathrm{Hilb}^3_c\,\mathbf{P}^N$ est très facile à établir [24], tandis que celle de $\mathrm{Hilb}^3\,\mathbf{P}^N$ est plus délicate (c'est par exemple une conséquence d'un théorème de Fogarty [5] selon lequel $\mathrm{Hilb}^d\,\mathbf{P}^2$ est non-singulier).

4°) Nous pouvons maintenant définir rigoureusement le « cycle des trisécantes à S » et les « formules trisécantes pour S ».

Le schéma $\mathrm{Hilb}^3_c\,\mathbf{P}^N$ contient la sous-variété $\mathrm{Hilb}^3_c\,S$ des triplets curvilignes situés sur S; il contient également la sous-variété complète $Al^3\,\mathbf{P}^N$ des triplets alignés. Alors, avec la définition que nous avons adoptée, les trisécantes à S *correspondent à l'intersection*

$$Al^3\,\mathbf{P}^N \cap \mathrm{Hilb}^3_c\,S\,.$$

Si l'on veut un nombre fini de tels triplets (pour des formules énumératives), on coupe par une sous-variété Z de $Al^3\,\mathbf{P}^N$ de dimension complémentaire; le cardinal de $Z \cap \mathrm{Hilb}_c^3\, S$ n'est alors rien d'autre que « le nombre de trisécantes à S vérifiant Z ».

Bien entendu, tout cela doit se formaliser car on peut très bien avoir des intersections de dimension excédentaire! De sorte qu'il vaut mieux parler d'intersecter des *classes* de sous-variétés (ou de cycles); c'est-à-dire travailler dans l'anneau des classes pour *l'équivalence rationnelle* (grosso modo, se ramener à ce que les sous-variétés se coupent proprement, i.e. avec la bonne dimension). Dans ce langage, la définition correcte du « cycle des trisécantes à S » est:

$$i^*[\mathrm{Hilb}_c^3\, S] \in A^\bullet(Al^3\,\mathbf{P}^N)$$

où $i: Al^3\,\mathbf{P}^N \hookrightarrow \mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^N$ est l'injection canonique et $A^\bullet$ désigne l'anneau d'équivalence rationnelle gradué par la codimension. (On dira aussi « anneau de Chow » pour « anneau d'équivalence rationnelle »). La notation [ ] désigne comme d'habitude le cycle associé à une sous-variété.

Alors si Z dans $Al^3\,\mathbf{P}^N$ a la dimension voulue, le « nombre de trisécantes à S vérifiant la condition Z » se définit comme le degré du 0-cycle

$$Z \,.\, i^*[\mathrm{Hilb}_c^3\, S]\,.$$

Par exemple, si S est une surface de $\mathbf{P}^5$ et que Z désigne la sous-variété de $Al^3\,\mathbf{P}^5$ formée des triplets alignés de support un seul point (« trois points consécutifs infiniment voisins sur une droite » dans le langage ancien), le degré du 0-cycle $Z \,.\, i^*[\mathrm{Hilb}_c^3\, S]$ est *le nombre de tangentes inflexionnelles de S* et on le donne explicitement un peu plus loin.

C'est donc la définition qu'on adopte ici de « nombre de trisécantes » et c'est de tels nombres qu'on se propose de calculer. (Ils peuvent très bien être négatifs dans les cas dégénérés de surfaces où les deux variétés en question ne se coupent pas proprement, c'est-à-dire le cas où, contrairement à l'attente, il y a une infinité de trisécantes vérifiant Z.)

Avec cette définition, les formules comptent d'elles-mêmes *avec multiplicités*. Par exemple, une droite quadrisécante à S comptera en général 4 fois comme trisécante, puisqu'il lui correspond quatre triplets alignés situés sur S. Le problème d'une droite L *contenue* dans S est plus préoccupant: il lui correspond ∞^3 triplets alignés situés sur la surface et l'on est obligé de calculer l'influence dans les formules de cette composante parasite (théorème de l'intersection résiduelle) pour avoir le nombre de « vraies » trisécantes (voir [26]).

5°) L'article comprend deux parties: le cas des surfaces de $\mathbf{P}^4$, puis celui des surfaces de $\mathbf{P}^5$, $\mathbf{P}^6$, $\mathbf{P}^7$. Esquissons la démonstration dans le cas des surfaces de $\mathbf{P}^4$.

Tout d'abord (afin de pouvoir généraliser par la suite dans la deuxième partie de l'article), on supposera non pas que la surface S est lisse, mais à *singularités ordinaires dans* $\mathbf{P}^4$, ce qui signifie que S possède comme uniques singularités δ *points doubles impropres*; autrement dit des points où deux branches lisses de S se coupent transversalement. On ne suppose pas que S est irréductible.

Grosso modo, *on déforme alors S platement dans $\mathbf{P}^4$ en un schéma* Σ_0 tel que les cycles $[\mathrm{Hilb}_c^3 S]$ et $[\mathrm{Hilb}_c^3 \Sigma_0]$ soient rationnellement équivalents dans $\mathrm{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$; d'où l'identité des classes $i^*[\mathrm{Hilb}_c^3 S]$ et $i^*[\mathrm{Hilb}_c^3 \Sigma_0]$ dans l'anneau $A^{\bullet}(Al^3 \mathbf{P}^4)$. Puis le schéma $\mathrm{Hilb}_c^3 \Sigma_0$ se décompose facilement, contrairement à $\mathrm{Hilb}_c^3 S$, en trois composantes (voir § II). Chacune de ces composantes a une contribution différente dans le degré du 0-cycle $Z \,.\, i^*[\mathrm{Hilb}_c^3 S]$, que l'on calcule alors: pour cela, connaître une base de l'anneau de Chow de $Al^3 \mathbf{P}^4$ est nécessaire. Elle est fournie par le théorème de Leray-Hirsch car $Al^3 \mathbf{P}^4$ est fibré en $\mathbf{P}^3$ sur la grassmannienne des droites $G(1, 4)$. On évalue donc $i^*[\mathrm{Hilb}_c^3 \Sigma_0]$ sur cette base explicite et l'on vérifie que dans tous les cas le degré cherché a la forme attendue, à savoir

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma)$$

où

n est le degré de S,

t est le nombre de points triples d'une projection générique S' sur un hyperplan $\mathbf{P}^3$,

d est le degré de la courbe double de S',

et a_1, a_2, a_3, α, β, γ sont six constantes.

(On utilise d, t et plus loin δ comme invariants des surfaces, plutôt que c_2, K^2 et HK moins commodes).

Ce qui précède permet alors, par examen de deux cas particuliers pour Z, de prouver le

THÉORÈME. *Soit $S \subset \mathbf{P}^4$ une surface d'invariants (n, d, t) comme ci-dessus. Alors*

le nombre de tangentes recoupant S et une droite fixe est

$$t_1(S) = 6\left(d(n-2)-\binom{n}{3}-t\right);$$

le nombre de tangentes d'inflexion coupant un plan fixe est

$$t_2(S) = n(n-4)(2n-1) + 6\big(t-d(n-4)\big).$$

Exemple. Pour la surface $S(2, 3) \subset \mathbf{P}^4$ intersection complète d'une quadrique et d'une cubique, on trouve $t_1 = 24$, ce que confirme un calcul direct dans la grassmannienne $G(1, 4)$. (Cet exemple n'est pas un des cas particuliers servant à établir la formule pour t_1 !)

6°) Dans la deuxième partie de l'article, on considère une surface lisse (mais pas forcément irréductible) dans $\mathbf{P}^N$ pour $N = 5, 6, 7$ et l'on introduit, outre n, d et t comme précédemment, l'invariant δ ainsi défini : c'est le nombre de points singuliers (points doubles impropres) apparaissant dans une projection générique V' sur un $\mathbf{P}^4$. Comme plus haut, afin de justifier la méthode fonctionnelle, on déforme V en un certain schéma Φ_0 de sorte que les classes $i^*[\mathrm{Hilb}_c^3\, V]$ et $i^*[\mathrm{Hilb}_c^3\, \Phi_0]$ soient égales. Le schéma $\mathrm{Hilb}_c^3\, \Phi_0$ se décompose, lui, en plusieurs composantes irréductibles; on évalue la contribution de chacune d'elles en appliquant ce qui précède sur les surfaces de $\mathbf{P}^4$ et on arrive finalement au résultat :

toute formule trisécante pour V est de la forme

$$a_1 n + a_2\binom{n}{2} + a_3\binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n+\gamma) + \delta(un+v)$$

où a_1, a_2, a_3, α, β, γ, u, v sont huit constantes.

L'examen de six cas particuliers pour Z conduit alors au théorème :

THÉORÈME. a) *Soit* $V \subset \mathbf{P}^5$ *une surface d'invariants* (n, d, t, δ) *comme ci-dessus. Alors*

le nombre de trisécantes coupant un plan fixe est

$$t_3(V) = \binom{n}{3} + 2t + (n-2)(\delta-d);$$

le nombre de tangentes recoupant S *et un* $\mathbf{P}^3$ *fixé est*

$$t_4(V) = -n(3n^2-11n+2) + 12\big(d(n-3)-t\big) - 2\delta(n-6);$$

le nombre de tangentes d'inflexion est

$$t_5(V) = 2n(2n^2-18n+25) + 12\big(t-\delta-d(n-7)\big).$$

b) *Soit* $V \subset \mathbf{P}^6$ *une surface d'invariants* (n, d, t, δ). *Alors le nombre de trisécantes coupant un* $\mathbf{P}^4$ *fixé est*

$$t_6(V) = 4\binom{n}{3} - 2n + 4t - d(3n-8) + \delta(n-4)\,;$$

le nombre de tangentes recoupant V *est*

$$t_7(V) = -4n(2n^2-15n+19) - 24t + 2d(13n-72) - 2\delta(n-12)\,.$$

c) *Soit* $V \subset \mathbf{P}^7$ *une surface d'invariants* (n, d, t, δ). *Alors le nombre de trisécantes à* V *est*

$$t_8(V) = 14\binom{n}{3} - 18\binom{n}{2} + 5n + 8t - 8d(n-5) + \delta(n-8)\,.$$

Exemple. Pour la surface $S(2, 2, 3) \subset \mathbf{P}^5$ intersection complète de deux quadriques et d'une cubique, on trouve $t_4 = 192$ et $t_5 = 240$, ce que confirme un calcul direct dans la grassmannienne $G(1, 5)$. (Là encore, cet exemple ne sert pas à établir les formules donnant t_4 et t_5 !)

7°) *Mise en garde*

Commençons par un exemple afin de faire comprendre cette mise en garde. Pour C une courbe dans $\mathbf{P}^3$ de degré 6 et genre 3, la formule pour le nombre q de quadrisécantes [23] donne 0. Or si une telle courbe est en plus hyperelliptique, c'est en fait une courbe de bidegré (4, 2) sur une surface quadrique, donc elle possède une infinité de quadrisécantes, à savoir les génératrices ! On voit donc dans ce cas qu'on ne peut, de $q = 0$, conclure à l'absence de quadrisécante ; *ou alors, en s'étant assuré auparavant qu'il n'y en avait au plus qu'un nombre fini.* C'est qu'en fait le nombre q donné est un nombre d'intersection et peut donner des résultats négatifs, nuls ou positifs dans le cas où, contrairement à l'attente, il y a une infinité de quadrisécantes à C. Tel est le cas des courbes de bidegré respectivement (4, 3), (4, 2) et (4, 1) sur une quadrique de $\mathbf{P}^3$, où l'on trouve $q = -1, 0, 1$.

La même mise en garde se transporte *mutatis mutandis* au cas des trisécantes aux surfaces. Cependant, une difficulté supplémentaire tient au fait que la surface peut contenir des droites. (On exclut cependant le cas des surfaces réglées ; voir [16], [27].) D'où la discussion suivante.

a) *La surface ne contient pas de droite*

i) Si l'une des huit formules précédentes donne un nombre négatif, il y a évidemment une infinité de trisécantes du type cherché, puisqu'il s'agit d'un nombre d'intersection.

ii) Si par contre l'une des formules donne un nombre nul ou positif, on ne peut a priori rien conclure, sauf si l'on s'est assuré auparavant qu'il ne pouvait y avoir qu'un nombre fini de trisécantes du type cherché.

Il y en a alors le nombre donné par la formule.

b) *La surface contient un nombre fini de droites*

Seules les formules donnant t_5, t_7 et t_8 sont concernées; dans ce cas, si la surface V contient une droite L, les ∞^3 triplets alignés sur celle-ci contribuent respectivement de $-3(2+l)$, $4\binom{3+l}{2}$ et $-\binom{4+l}{3}$ dans les nombres d'intersection t_5, t_7, t_8 (où l désigne la self-intersection de L sur V; voir théorèmes 5, 7 et 8). On peut alors utiliser les formules dans deux sens:

i) Ou bien la surface V ne possède par ailleurs pas de « vraie » trisécante (si V est intersection de quadriques, par exemple), auquel cas les formules donnent des renseignements sur le nombre de droites *contenues* dans L.

ii) Ou bien l'on connaît le nombre de droites que contient V (et leur self-intersection), auquel cas après correction, les formules donnent le nombre de « vraies » trisécantes à V.

Par exemple la surface de del Pezzo $S_5 \subset \mathbf{P}^5$ est intersection de quadriques et contient 10 droites de self-intersection -1. On doit donc trouver $t_5 = -30$ (puisque chacune d'elles contribue de -3 dans t_5); ce résultat sert même dans le cours du calcul de la formule générale pour t_5 (voir § IV.2). Mais inversement, la connaissance de $t_5 = -30$

i) Ou bien montre qu'il n'y a pas de trisécante à S_5 si l'on sait que S_5 possède 10 droites exceptionnelles,

ii) Ou bien donne le nombre de droites exceptionnelles sur S_5 si l'on sait qu'il n'y a pas de vraie trisécante à S_5.

8°) *Application aux volumes*

Les formules donnent des renseignements sur le nombre de droites contenues dans les volumes (variétés de dimension 3), *supposés intersections de quadriques.*

Par exemple, considérons un tel volume X dans $\mathbf{P}^7$, supposé ne contenir qu'un nombre fini de droites; quel est ce nombre? La réponse est $t_8(V)$ où V est la surface $X \cap \mathscr{H}_3$, $\mathscr{H}_3$ étant une hypersurface cubique transverse à X. En effet, toute droite dans X est trisécante à V et réciproquement,

puisque X est supposé intersection de quadriques. L'exemple le plus simple est évidemment le volume X intersection complète de quatre quadriques, où l'on trouve ainsi 512 droites (ce qu'on vérifie directement dans $G(1, 7)$).

De même, si $X \subset \mathbf{P}^6$ est un tel volume, le degré de la surface réglée formée des droites dans X est donné par $t_6(V)$ où $V = X \cap \mathscr{H}_3$ comme précédemment.

Première partie: $\mathbf{P}^4$

I) Rappels et définitions; schémas Σ et Σ_0

1°) $\mathrm{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$, $Al^k \mathbf{P}^N$ et formules k-sécantes

On rappelle rapidement les notions introduites dans [24] et [25].

a) Le corps de base est algébriquement clos de caractéristique nulle; on se place sur $\mathbf{C}$ pour la commodité.

Si $\mathrm{Hilb}^k \mathbf{P}^N$ désigne le schéma de Hilbert [10] des *k-uplets* de $\mathbf{P}^N$ (sous-schémas de dimension 0 et longueur k), on désignera par $\mathrm{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$ l'ouvert formé des k-uplets *curvilignes* c'est-à-dire situés sur une courbe non-singulière. L'ouvert $\mathrm{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$ est en général non dense [15], mais en tout cas non-singulier [24] de dimension Nk. Il contient l'ouvert $\mathrm{Hilb}_{\neq}^k \mathbf{P}^N$ des k-uplets formés de points *distincts* comme ouvert dense.

Les k-uplets de $\mathbf{P}^N$ qui sont sous-schémas d'une droite, appelée *axe* du k-uplet, sont dits *alignés*. Ils forment une sous-variété non-singulière de dimension $2N + k - 2$, notée $Al^k \mathbf{P}^N$, de $\mathrm{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$. On a une fibration naturelle, au-dessus de la grassmannienne des droites:

$$\mathrm{Axe}: Al^k \mathbf{P}^N \to G(1, N)$$

qui à un-k-uplet aligné fait correspondre son axe. La fibre-type est $\mathrm{Hilb}^k \mathbf{P}^1 \simeq \mathbf{P}^k$.

Exemples et notations. Un doublet est toujours aligné. Si (x, y) sont les coordonnées de $\mathbf{C}^2$, le triplet d'idéal (x^2, xy, y^2) n'est pas curviligne; le triplet d'idéal $(x^3, y+x^2)$ est curviligne mais non aligné. On notera $\rightarrow$ un doublet de support réduit à un point. Un triplet curviligne de support réduit à un point sera noté $\overset{3}{\circlearrowleft}$ et s'il est aligné, on le notera $\overset{3}{\rightarrow}$. Remarquons par exemple que le quadruplet $\rightarrow \rightarrow$ est aligné, mais celui-ci: $\rightarrow \uparrow$ ne l'est pas, bien qu'évidemment le réduit associé le soit!

b) Définissons maintenant le *cycle des k-sécantes* d'une surface de $\mathbf{P}^N$.

Soit $S \subset \mathbf{P}^N$ une surface et $i: Al^k \mathbf{P}^N \hookrightarrow \mathrm{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$ l'injection canonique. Comme $\mathrm{Hilb}^k S$ s'identifie à un sous-schéma de $\mathrm{Hilb}^k \mathbf{P}^N$ (par exemple [8]), notons $\mathrm{Hilb}_c^k S$ la trace de $\mathrm{Hilb}^k S$ sur $\mathrm{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$. Le cycle associé $[\mathrm{Hilb}_c^k S]$ de $\mathrm{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$ est de dimension $2k$ et donc le cycle

$$i^* [\mathrm{Hilb}_c^k S]$$

appartient à $A^{k(N-2)}(Al^k \mathbf{P}^N)$ où $A^\bullet$ désigne l'anneau de Chow, gradué par la codimension. Soit Z un cycle fixé dans $Al^k \mathbf{P}^N$, de dimension complémentaire. *On appellera formule k-sécante pour* S *dans* $\mathbf{P}^N$, *une formule donnant le degré d'un* 0-*cycle* $Z . i^* [\mathrm{Hilb}_c^k S]$ *lorsque le cycle* Z *est fixé.*

Exemple. $N = 4$, $k = 4$; dans ce cas Z doit appartenir à $A^2(Al^4 \mathbf{P}^4)$. Un exemple de formule quadrisécante pour les surfaces de $\mathbf{P}^4$ est donc: *les quadrisécantes rencontrant une droite fixe.* Dans ce cas, on prend $Z = \mathrm{Axe}^*\sigma$ où $\sigma \in A^2(G(1, 4))$ est le cycle de Schubert des droites coupant une droite fixe.

Dans la suite de cet article, on ne s'intéressera qu'aux formules *trisécantes* pour une surface. On renvoie à [28] pour les autres cas.

2°) Platitude et équivalence rationnelle

La proposition 1 démontrée dans ce paragraphe est le cœur de l'article. Elle permet de remplacer $\mathrm{Hilb}_c^k S$ par $\mathrm{Hilb}_c^k \Sigma_0$.

a) Comme d'habitude, si V est un sous-schéma du schéma H, on désigne par $[V]$ le cycle associé. Commençons par montrer le

Lemme 1. *Soit* $\bar{U}$ *un ouvert de* $\mathbf{C}$ *contenant* 0 *et* 1 *et soit* $U = \bar{U} - \{0\}$. *Soit* H *un schéma.*

On se donne un sous-schéma réduit Z *de* $H \times U$ *qu'on suppose plat sur* U; *soit* $\bar{Z}$ *son adhérence dans* $H \times \bar{U}$. *Si la fibre* $\bar{Z}_0$ *est génériquement réduite, on a l'équivalence rationnelle dans* H:

$$[Z_1] \sim [\bar{Z}_0] = [(\bar{Z}_0)_{\mathrm{red}}] .$$

Preuve. Vu ([14], prop. 1.4) et ([11], I.9.5.9 et I.9.5.10), $\bar{Z}$ est l'unique sous-schéma relatif de $H \times \bar{U}$, plat sur $\bar{U}$, dont la restriction à U est Z. (De plus $\bar{Z}$ est réduit). Par définition de l'équivalence rationnelle, vu la platitude de $\bar{Z}$ sur $\bar{U}$, on a $[\bar{Z}_1] \sim [\bar{Z}_0]$. Mais $\bar{Z}_1 = Z_1$ et $[\bar{Z}_0] = [(\bar{Z}_0)_{\mathrm{red}}]$ par hypothèse, ce qui démontre le lemme.

Donnons maintenant une définition:

Définition 1. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit X/U un schéma relatif. On dit que X/U est *k-plat* si le schéma de Hilbert relatif

$$\mathrm{Hilb}_c^k X/U$$

est plat sur U et réduit.

Remarque 1. Le cas le plus évident, qui nous intéressera principalement, est celui où X/U est isomorphe à un produit $F \times U$. Dans ce cas, on a l'isomorphisme $\mathrm{Hilb}_c^k X/U \simeq (\mathrm{Hilb}_c^k F) \times U$. Ce schéma relatif étant un produit, est plat. *Il suffit donc de supposer* $\mathrm{Hilb}_c^k F$ *réduit*, ce qui est toujours le cas si F est non-singulier (car alors $\mathrm{Hilb}_c^k F$ est aussi non-singulier) ou bien si F est une surface à singularités ordinaires de $\mathbf{P}^4$ (voir Annexe 1).

On peut de manière analogue montrer le

LEMME 2. *Si* X/U *est un schéma relatif lisse, le schéma relatif* $\mathrm{Hilb}_c^k X/U$ *est également lisse, donc plat et réduit. Ainsi* X/U *est k-plat.*

Preuve. Soit $\pi: X \to U$ la projection et x un point de X. Il existe un voisinage $\mathscr{V}$ (disons transcendant) de x et un isomorphisme $\mathscr{V} \xrightarrow{\sim} U' \times F$ au-dessus d'un voisinage U' de $\pi(x)$, où F est non-singulier. Alors on a $\mathrm{Hilb}_c^k \mathscr{V}/U' \simeq (\mathrm{Hilb}_c^k F) \times U'$; or $\mathrm{Hilb}_c^k F$ est non-singulier, d'où la lissité.

b) Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer la

PROPOSITION 1. *Soit* $\bar{U}$ *un ouvert de* $\mathbf{C}$ *contenant* 0 *et* 1 *et soit* $U = \bar{U} - \{0\}$. *Soit* $H = \mathrm{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$.

Soit $X/\bar{U}$ *un sous-schéma relatif de* $\mathbf{P}^N \times \bar{U}$. *On suppose:*

a) *tout k-uplet curviligne dans la fibre* X_0 *est limite de k-uplets curvilignes dans des fibres* X_λ, *avec* $\lambda \neq 0$, *de* X/U;

b) $\mathrm{Hilb}_c^k X_0$ *est génériquement réduit;*

c) *le schéma relatif* X/U *est k-plat (déf. 1).*

Alors on a l'équivalence rationnelle dans $\mathrm{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$:

$$[\mathrm{Hilb}_c^k X_1] \sim [(\mathrm{Hilb}_c^k X_0)_{\mathrm{red}}] = [\mathrm{Hilb}_c^k X_0].$$

Preuve. Considérons le schéma relatif $Z/U = \mathrm{Hilb}_c^k X/U$. Par l'hypothèse c), Z est plat sur U et réduit. D'autre part Z est contenu dans le

schéma relatif $\mathrm{Hilb}_c^k X/\bar{U}$ et ce dernier est fermé dans $\mathrm{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N \times \bar{U}$. Par définition de l'adhérence, on a donc l'inclusion

$$\bar{Z} \subset \mathrm{Hilb}_c^k X/\bar{U}\,.$$

C'est une inclusion *de schémas* puisque $\bar{Z}$ est réduit. On en déduit l'inclusion *de schémas* entre les fibres:

$$\bar{Z}_0 \subset \mathrm{Hilb}_c^k X_0\,. \tag{1}$$

Maintenant l'hypothèse a) signifie précisément l'inclusion $(\mathrm{Hilb}_c^k X_0)_{\mathrm{red}} \subset \bar{Z}$. Comme $(\mathrm{Hilb}_c^k X_0)_{\mathrm{red}}$ est contenu dans la fibre en 0 de $\mathrm{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N \times \bar{U}$, on a donc l'inclusion

$$(\mathrm{Hilb}_c^k X_0)_{\mathrm{red}} \subset \bar{Z}_0\,. \tag{2}$$

On a donc montré

$$(\mathrm{Hilb}_c^k X_0)_{\mathrm{red}} \subset \bar{Z}_0 \subset \mathrm{Hilb}_c^k X_0\,. \tag{3}$$

Or l'hypothèse b) assure que $\mathrm{Hilb}_c^k X_0$ est génériquement réduit; donc $\bar{Z}_0$ aussi, d'après (3). Les hypothèses du lemme 1 sont donc satisfaites pour Z et l'on a ainsi, vu (3):

$$[Z_1] \sim [\bar{Z}_0] = [\mathrm{Hilb}_c^k X_0] = [(\mathrm{Hilb}_c^k X_0)_{\mathrm{red}}]\,.$$

Or par définition même, $Z_1 = (\mathrm{Hilb}_c^k X/U)_1 = \mathrm{Hilb}_c^k X_1$. La proposition 1 est donc démontrée.

c) *Nous allons donner pour l'instant comme application de cette proposition, un corollaire technique qui peut être sauté en première lecture.* Par *singularités ordinaires* d'une surface S' dans $\mathbf{P}^3$ nous entendons uniquement croisements normaux, points-triples et points-pince.

PROPOSITION 2. *Soit* $S' \subset \mathbf{P}^3$ *une surface à singularités ordinaires, de degré* n. *Alors pour tout cycle* K *dans* $A^{\bullet}(Al^3\,\mathbf{P}^3)$, *de dimension* 3, *le degré du* 0-*cycle*

$$K\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3 S']$$

est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3}$$

où a_1, a_2, a_3 *sont des constantes ne dépendant que de* K.

(Comme toujours, $i: Al^3\,\mathbf{P}^3 \hookrightarrow \mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^3$ désigne l'injection canonique.) Remarquons que $\mathrm{Hilb}_c^3\,S'$ est génériquement réduit par l'Annexe 2: S' n'a que des singularités ordinaires.

Preuve. Soit M la réunion de n plans en position générale dans $\mathbf{P}^3$, tous transverses à S'. Soit f_0 une équation de S' et f_2 une équation de M.

Considérons le sous-schéma relatif $X/\mathbf{C}$ de $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}$ défini par l'équation

$$(\lambda-2)f_0 + \lambda f_2 = 0$$

où λ parcourt $\mathbf{C}$. On a bien sûr $X_0 = S'$ et $X_2 = M$. Soit U l'ouvert maximal de $\mathbf{C}$ tel que X/U soit lisse au-dessus de U. Il est non vide et on peut toujours supposer que 1 lui appartient. Le schéma X/U est k-plat car il est lisse (lemme 2).

Soit $\bar{U}_0 = U \cup \{0\}$ et $\bar{U}_2 = U \cup \{2\}$. Les lemmes 10 et 11 de l'Annexe 2 montrent que les hypothèses a) et b) de la proposition 1 sont vérifiées: en effet localement au-dessus d'un voisinage de 0 ou 2, le schéma relatif X est isomorphe aux schémas relatifs Θ ou Π des lemmes 10 et 11. Cela résulte de ce que S' et M n'ont que des singularités ordinaires. On applique alors deux fois la proposition 1, en remplaçant l'une des deux fois 0 par 2 évidemment, et on trouve donc l'équivalence rationnelle:

$$[\mathrm{Hilb}_c^k\,X_0] \sim [\mathrm{Hilb}_c^k\,X_1] \sim [\mathrm{Hilb}_c^k\,X_2]\,,$$

soit encore

$$[\mathrm{Hilb}_c^k\,S'] \sim [\mathrm{Hilb}_c^k\,M]\,.$$

On s'est donc ramené à montrer la proposition pour la réunion de n plans. Soit $P_1, P_2 \dots P_n$ les plans dont la réunion est M; soit $k_1, k_2 \dots k_n$ des entiers positifs tels que $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 3$ et soit $U_{k_1, k_2 \dots k_n}$ l'ensemble des triplets *simples* ayant k_i points sur P_i. D'après le lemme 10 (Annexe 2) le schéma $(\mathrm{Hilb}_c^3\,M)_{\mathrm{red}}$ admet les adhérences $\overline{U_{k_1, k_2 \dots k_n}}$ comme uniques composantes irréductibles. Appelons « type » d'une telle composante l'ensemble des k_i non nuls. Ainsi $(\mathrm{Hilb}_c^3\,M)_{\mathrm{red}}$ est formé de

$\binom{n}{3}$ composantes irréductibles de type $\{1, 1, 1\}$,

$2\binom{n}{2}$ composantes irréductibles de type $\{2, 1\}$,

n composantes irréductibles de type $\{3\}$.

De plus, deux composantes irréductibles de même type sont évidemment rationnellement équivalentes dans $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^3$, comme on le voit en faisant agir $PGL(3)$ sur les triplets de plans. Ainsi,

$$[\mathrm{Hilb}_c^3\,M] = [(\mathrm{Hilb}_c^3\,M)_{\mathrm{red}}] = \binom{n}{3}A + \binom{n}{2}B + nC$$

où A, B et C sont trois cycles fixés dans l'anneau de Chow de $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^3$; d'où le résultat annoncé.

Remarque 2. Le lecteur adaptera sans peine la démonstration pour montrer que pour tout cycle $K \in A^{\bullet}(Al^k\,\mathbf{P}^3)$, de dimension k, le degré du 0-cycle $K\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^k\,S']$ est de la forme

$$a_1 n + a_2\binom{n}{2} + \ldots + a_k\binom{n}{k}$$

où les a_i ne dépendent que de K.

3°) Déformation de S en Σ_0; étude de $\mathrm{Hilb}_c^k\,\Sigma_0$

Soit S une surface de $\mathbf{P}^4$. La définition donnée en 1) des formules k-sécantes pour S oblige à connaître la classe d'équivalence de $[\mathrm{Hilb}_c^k\,S]$ dans l'anneau de Chow de $\mathrm{Hilb}_c^k\,\mathbf{P}^4$.

L'idée qu'on va utiliser est de construire un schéma relatif $\Sigma/\mathbf{C}$ avec fibre $\Sigma_1 = S$, la fibre Σ_0 ayant pour réduit la projection S' de S sur un hyperplan générique H. *On essayera alors d'arriver à l'équivalence rationnelle* $[\mathrm{Hilb}_c^k\,S] \sim [\mathrm{Hilb}_c^k\,\Sigma_0]$ *et d'utiliser la proposition 1.* Considérons maintenant un schéma F. Si F est non-singulier, l'ouvert $\mathrm{Hilb}_{\neq}^k\,F$ des k-uplets simples est dense dans $\mathrm{Hilb}_c^k\,F$: car un k-uplet curviligne dans F est aussi contenu dans une courbe non-singulière Δ située sur F; on le déforme alors en k points simples sur Δ. (Remarquer par contre que $\mathrm{Hilb}_c^k\,F$ n'est en général pas dense dans $\mathrm{Hilb}^k\,F$; voir [15]).

Remarque 3. C'est justement la présence de composantes immergées dans Σ_0 (de réduit S') qui fait qu'on a $\mathrm{Hilb}_{\neq}^k\,\Sigma_0$ (ou $\mathrm{Hilb}_{\neq}^k\,S'$) *non dense* dans $\mathrm{Hilb}_c^k\,\Sigma_0$. *En fait, on verra que* $\mathrm{Hilb}_c^k\,S'$ (qui est l'adhérence de $\mathrm{Hilb}_{\neq}^k\,S'$) *est seulement une composante irréductible de* $\mathrm{Hilb}_c^k\,\Sigma_0$, lequel scinde en plusieurs composantes. Et c'est l'évaluation de la contribution de chacune de ces composantes dans les formules k-sécantes qui constitue l'essentiel de la démonstration.

a) Commençons par décrire un procédé général de déformation d'un sous-schéma de $\mathbf{P}^N$.

Soit $Z \subset \mathbf{P}^N$ un schéma réduit et Z' sa projection sur un hyperplan H par un point générique ω. D'après ([14], prop. 1.4) ou encore ([13], III, ex. 9.8.3), il existe un sous-schéma réduit $\mathscr{Z}$ de $\mathbf{P}^N \times \mathbf{C}$, plat sur $\mathbf{C}$, avec pour fibres $\mathscr{Z}_1 = Z$ et $(\mathscr{Z}_0)_{\mathrm{red}} = Z'$. Rappelons pourquoi: On prend pour cela un système de coordonnées homogènes $(x_0 : x_1 : \ldots : x_N)$ pour lequel H ait pour équation $x_N = 0$, le point ω étant le point $(0:0:\ldots:0:1)$. Le schéma a la structure — réduite — de l'adhérence dans $\mathbf{P}^N \times \mathbf{C}$ de l'image de $Z \times \mathbf{C}^*$ par le plongement

$$Z \times \mathbf{C}^* \hookrightarrow \mathbf{P}^N \times \mathbf{C}^*$$
$$((x_0 : x_1 : \ldots : x_{N-1} : x_N), \lambda) \mapsto ((x_0 : x_1 : \ldots : x_{N-1} : \lambda x_N), \lambda).$$

En général, la fibre $\mathscr{Z}_0$ possède des composantes immergées (voir [13], p. 260).

Remarque 4. Si on pose $\bar{U} = \mathbf{C}$ et $U = \mathbf{C}^*$, le schéma relatif $\mathscr{Z}/U$ est plat puisqu'il est isomorphe au produit $Z \times U$.

b) Appliquons ce qui précède à une surface S à singularités ordinaires de $\mathbf{P}^4$. On la projette génériquement en S' sur un hyperplan H. La sous-variété S' possède une courbe-double Γ, des points triples $M_1, \ldots, M_t$ et des points-pinces $P_1, \ldots, P_v$. Il s'agit d'abord d'établir la structure nilpotente de Σ_0, sachant que $(\Sigma_0)_{\mathrm{red}} = S'$. Nous pouvons énoncer deux propositions.

PROPOSITION 3. *Avec les notations précédentes, on a l'égalité des sous-schémas de* $\mathbf{P}^4$:

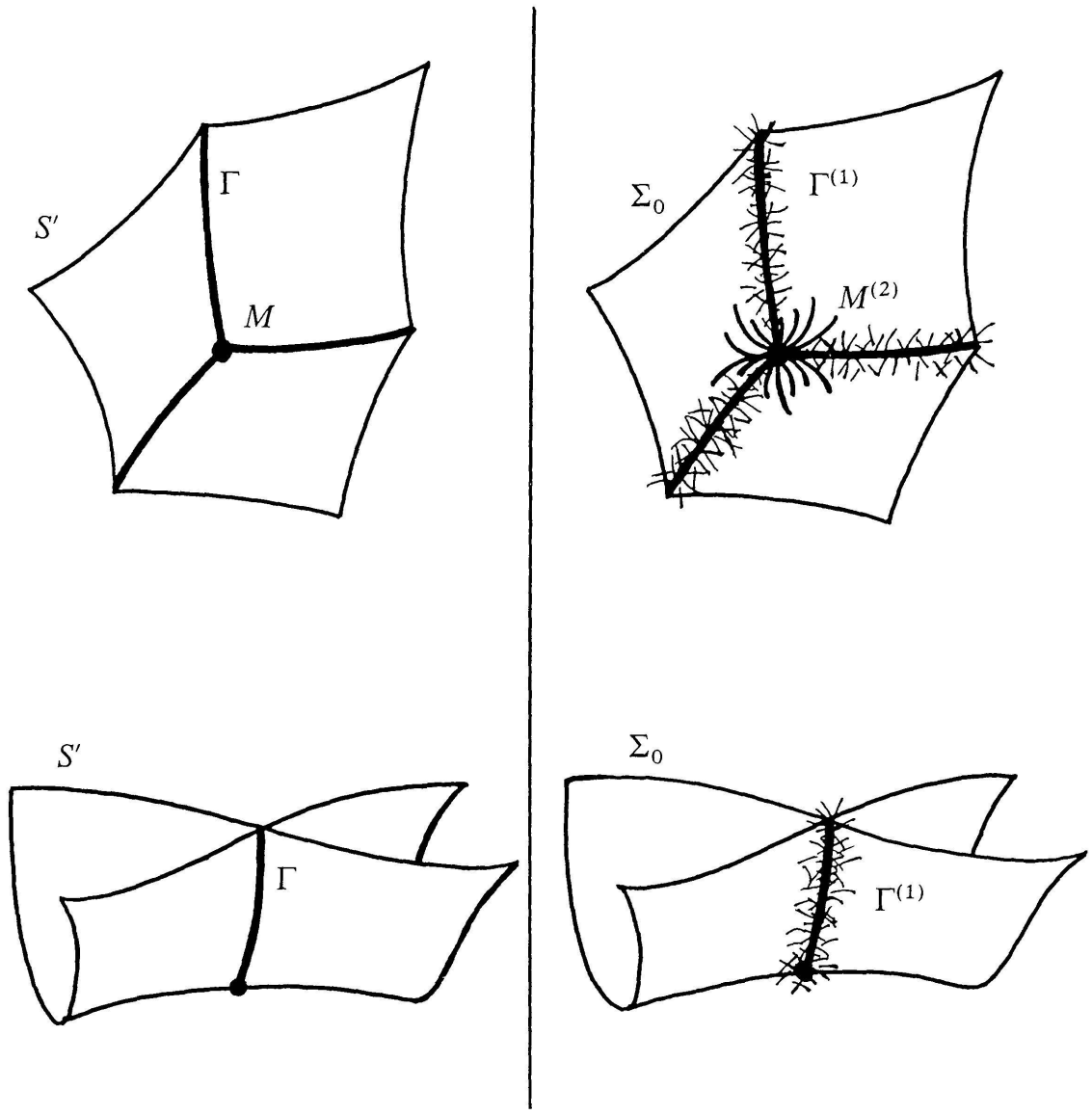
$$\Sigma_0 = S' \cup \Gamma^{(1)} \cup M_1^{(2)} \cup \ldots \cup M_t^{(2)}$$

où pour $V \subset \mathbf{P}^4$, $V^{(i)}$ *désigne le i-ème voisinage infinitésimal de* V dans $\mathbf{P}^4$. *De plus,* $S' = (\Sigma_0)_{\mathrm{red}} = \Sigma_0 \cap H$.

Dans le dessin ci-après les nilpotents sont dans $\mathbf{P}^4$; on a représenté les doublets (dans $\mathbf{P}^4$) par des traits courts et les triplets par des traits courbés plus longs.

Avant d'énoncer la proposition suivante, donnons une définition. Celle-ci est motivée par le fait, comme on l'a dit, que pour un schéma quelconque F, l'ouvert $\mathrm{Hilb}^k_{\neq} F$ n'est en général pas dense dans $\mathrm{Hilb}^k_c F$.

Définition 2. Appelons k-uplet « double » (resp. « triple »), une réunion disjointe de points simples et de doublets de support un point (resp. points



simples, doublets de support un point et triplets *curvilignes* de support un point).

Alors à défaut de pouvoir déformer tout k-uplet curviligne d'un schéma F en k-uplets simples, on peut espérer le déformer en k-uplets doubles, voire triples. C'est justement ce qu'affirme la proposition suivante (en i) pour le schéma Σ_0.

PROPOSITION 4. *Soit* $\Sigma/\mathbf{C}$ *le schéma relatif associé à une surface à singularités ordinaires* S *de* $\mathbf{P}^4$, *dont* S' *est la projection sur l'hyperplan* H.

i) *Tout k-uplet curviligne dans* Σ_0, *de support un point-triple* $\{M\}$, *est limite (pour* $k \geqslant 4$*) de k-uplets triples dans* Σ_0.

Tout k-uplet curviligne dans Σ_0 *de support un point-pince* $\{P\}$, *est limite (pour* $k \geqslant 3$*) de k-uplets doubles dans* Σ_0.

Tout k-uplet curviligne dans Σ_0, *de support un point de la courbe double* Γ *de* S', *est limite (pour* $k \geqslant 3$*) de k-uplets double dans* Σ_0.

ii) *Tout k-uplet curviligne dans* Σ_0 *est limite de k-uplets curvilignes dans des fibres* Σ_λ *de* $\Sigma/\mathbf{C}$ *avec* $\lambda \neq 0$.

iii) $\mathrm{Hilb}^3\, \Sigma_0$ *est réduit au voisinage d'un triplet curviligne* t *de support un point-triple* $\{M\}$, *lorsque* $t \not\subset S' = (\Sigma_0)_{\mathrm{red}} = \Sigma_0 \cap H$.

$\mathrm{Hilb}^2\, \Sigma_0$ *est réduit au voisinage d'un doublet* d *de support un point-pince* $\{P\}$, *lorsque* $d \not\subset S'$.

$\mathrm{Hilb}^2\, \Sigma_0$ *est réduit au voisinage d'un doublet* d *de support un point de* Γ, *lorsque* $d \not\subset S'$.

Preuves des propositions 3 et 4. Il s'agit essentiellement, par des calculs en coordonnées, de se ramener à l'étude de modèles locaux pour Σ_0, d'abord au voisinage de la courbe double Γ, puis d'un point triple M et enfin d'un point pince. Or cette étude pour les modèles locaux a été faite dans [24]. Voir l'Annexe 3 pour tous les détails de calcul.

II) Trisécantes dans $\mathbf{P}^4$: la théorie

Soit S une surface de $\mathbf{P}^4$ à singularités ordinaires. Notons n son degré, d le degré de la courbe double apparente et t le nombre de points-triples apparents, dans une projection générique sur un $\mathbf{P}^3$.

On regarde le diagramme, où les flèches sont les injections canoniques et les dimensions sont entre parenthèses :

$$\begin{array}{ccccc} (9) & Al^3\, \mathbf{P}^4 & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathrm{Hilb}^3_c\, \mathbf{P}^4 & (12) \\ & & & \uparrow & \\ & & & \mathrm{Hilb}^3_c\, S & (6)\,. \end{array}$$

Le but de ce § II est de montrer la

Proposition 5. *Soit* S *une surface de* $\mathbf{P}^4$, *d'invariants* (n, d, t). *Pour tout cycle* Z *dans* $A^3(Al^3\, \mathbf{P}^4)$, *la formule trisécante donnant le degré du 0-cycle* $Z \,.\, i^*\, [\mathrm{Hilb}^3_c\, S]$ *est de la forme*

$$T(S) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma)$$

où $a_1, a_2, a_3, \alpha, \beta$ *et* γ *sont des constantes ne dépendant que de* Z.

1°) Composantes de $\mathrm{Hilb}_c^3\, \Sigma_0$

a) Notons S' la projection de S sur un $\mathbf{P}^3$ générique de $\mathbf{P}^4$. S' admet une courbe double Γ avec t points-triples $M_1 \dots M_t$ et ν points-pince. En I.3.b on a construit un schéma relatif $\Sigma/\mathbf{C}$ avec $\Sigma_1 = S$ et $(\Sigma_0)_{\mathrm{red}} = S'$. De plus (proposition 3), on a

$$(*) \qquad \Sigma_0 = S' \cup \Gamma^{(1)} \cup M_1^{(2)} \cup \dots \cup M_t^{(2)}$$

où $V^{(i)}$ désigne le i-ème voisinage infinitésimal de V *dans* $\mathbf{P}^4$; on a $\Sigma_0 \cap \mathbf{P}^3 = S'$.

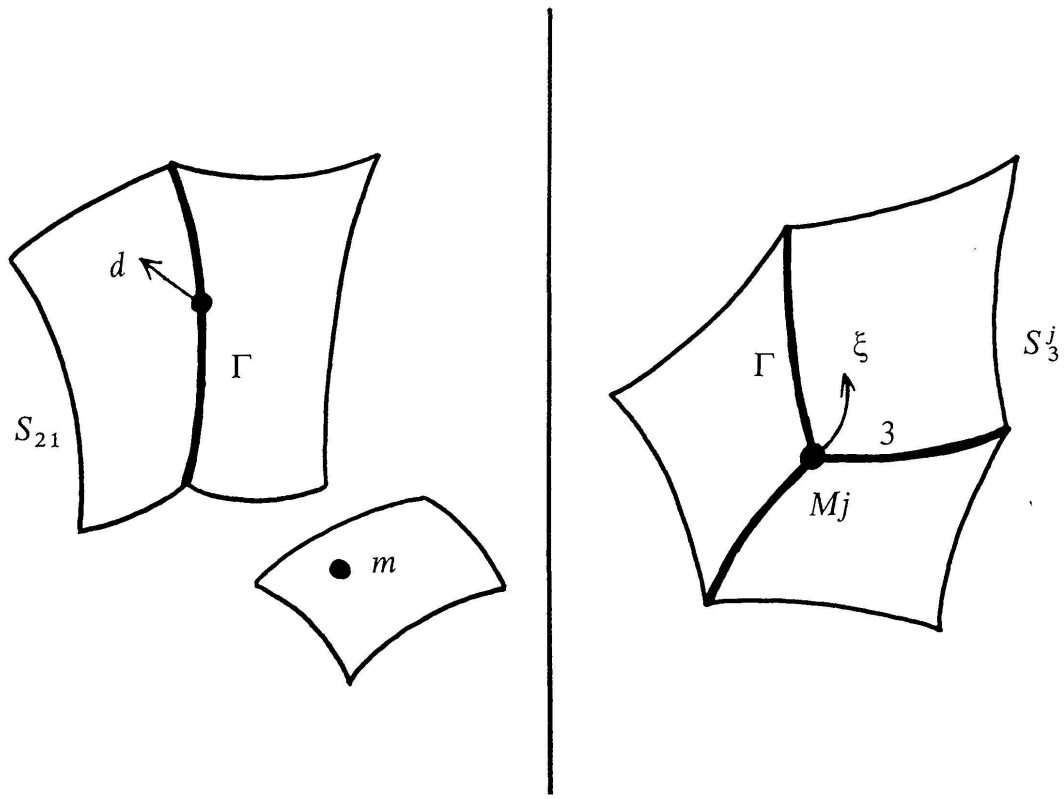
Nous allons détailler les différentes composantes du schéma $(\mathrm{Hilb}^3\, \Sigma_0)_{\mathrm{red}}$.

Notation 1. Notons S_{21} la sous-variété (localement fermée) de $\mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^4$ formée des triplets $t = d \cup m$ où

d est un doublet de $\mathbf{P}^4$ de support un point de Γ,

m est un point de $S' - \Gamma$.

Soit $\overline{S_{21}}$ l'adhérence de S_{21} dans $\mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^4$.



Notons S_3^j pour $j = 1, 2 \dots t$ la sous-variété de $\mathrm{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$ des triplets curvilignes ξ de $\mathbf{P}^4$, de support $\{M_j\}$. Soit S_3 leur réunion (disjointe).

Remarque 5. Bien sûr, $\overline{S_{21}}$ et S_3 sont contenus dans $(\mathrm{Hilb}_c^3 \Sigma_0)_{\mathrm{red}}$ d'après la structure nilpotente même de Σ_0 (*).

b) On a la

PROPOSITION 6.

i) $(\mathrm{Hilb}_c^3 \Sigma_0)_{\mathrm{red}}$ *est réunion de* $(\mathrm{Hilb}_c^3 S')_{\mathrm{red}}$, *de* S_{21} *et des* S_3^j $(j = 1, 2 \dots t)$.

ii) $\mathrm{Hilb}_c^3 \Sigma_0$ *est génériquement réduit le long de ces composantes.*

Preuve. i) Soit t un triplet curviligne contenu dans Σ_0. Si t est contenu dans l'hyperplan $\mathbf{P}^3$, comme $\Sigma_0 \cap \mathbf{P}^3 = S'$, on a $t \in (\mathrm{Hilb}_c^3 S')_{\mathrm{red}}$. Si $t \not\subset \mathbf{P}^3$, le support de t ne peut être formé de trois points simples, puisque $(\Sigma_0)_{\mathrm{red}} = S'$ et $S' \subset \mathbf{P}^3$. Donc $\mathrm{Supp}\, t$ rencontre Γ, car en dehors de Γ, les faisceaux structuraux de S' et Σ_0 sont égaux.

Premier cas. $\mathrm{Supp}\, t = \{a, b\}$ avec $a \in \Gamma$ et t double en a. Si $b \notin \Gamma$, par définition, on a $t \in S_{21}$. Si $b \in \Gamma$, on le « bouge » en $b' \in S' - \Gamma$ et donc t appartient à $\overline{S_{21}}$.

Deuxième cas. $\mathrm{Supp}\, t = \{a\}$ où $a \in \Gamma$. Si a est l'un des points-triples M_j, on a $t \in S_3$. Si a n'est pas l'un des points M_j, c'est soit un point-pince soit un point générique de Γ. Dans les deux cas, t est limite de triplets de support formé de deux points: en effet cela résulte de la proposition 4.

ii) La composante $\mathrm{Hilb}_c^3 S'$ est génériquement réduite d'après les lemmes 10 et 11 de l'Annexe 2 puisque $S' \subset \mathbf{P}^3$ n'a que des singularités ordinaires. Par ailleurs S_3^j est génériquement réduite d'après la proposition 4 iii): un triplet générique de S_3^j n'est pas dans H. Enfin, montrons que S_{21} (donc $\overline{S_{21}}$) est génériquement réduit. Soit $d \cup m$ un triplet générique de S_{21}; ainsi le support de d n'est pas un point triple et $d \not\subset H$. Alors $\mathrm{Hilb}^2 \Sigma_0$ est réduit au voisinage de d par la proposition 4 iii); d'où S_{21} réduit au voisinage de $d \cup m$.

2°) CONTRIBUTION DE CES COMPOSANTES DANS $T(S)$

Soit $Z \in A^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$ un cycle fixé. Nous allons montrer trois lemmes, avec les notations précédentes.

LEMME 3. *Le degré du 0-cycle* $Z \,.\, i^* [\mathrm{Hilb}_c^3 S']$ *est de la forme*

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3}$$

où a_1, a_2 *et* a_3 *ne dépendent que de* Z.

LEMME 4. *Le degré du* 0-*cycle* $Z.i^*[S_3]$ *est de la forme* αt *où* α *ne dépend que de* Z. *(*S_3 *désigne la réunion disjointe des* S_3^j *pour* $j=1, 2 \dots t$.*)*

LEMME 5. *Le degré du* 0-*cycle* $Z.i^*[\overline{S_{21}}]$ *est de la forme* $d(\beta n+\gamma)$ *où* β *et* γ *ne dépendent que de* Z.

a) Prouvons le lemme 3. Regardons le diagramme commutatif où les flèches sont les injections canoniques et les dimensions entre parenthèses:

$$\begin{array}{ccccc}
(9) & Al^3\,\mathbf{P}^4 & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^4 & (12) \\
 & {\scriptstyle j}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle u} & \\
(7) & Al^3\,\mathbf{P}^3 & \overset{\hat{i}}{\hookrightarrow} & \mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^3 & (9) \\
 & & & \uparrow & \\
 & & & \mathrm{Hilb}_c^3\,S' & (6)\,.
\end{array}$$

Nous voyons par examen des dimensions que $Al^3\,\mathbf{P}^4$ et $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^3$ ne se coupent pas proprement dans $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^4$.

Nous aurons besoin du théorème de l'intersection résiduelle [7] [17] sous forme de la formule de Fulton-MacPherson [6], qu'on énoncera ainsi:

THÉORÈME (Fulton-MacPherson). *Soit* Y *une sous-variété non-singulière de la variété non-singulière* X. *Soit* A *une sous-variété de* X *et* $I = A \cap Y$. *Considérons le diagramme commutatif où les flèches sont les injections canoniques:*

$$\begin{array}{ccc}
A & \overset{i}{\hookrightarrow} & X \\
{\scriptstyle j}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle u} \\
I & \overset{\hat{i}}{\hookrightarrow} & Y\,.
\end{array}$$

Si I est localement intersection complète dans A et si

$$\dim I = \dim A + \dim Y - \dim X + r\,,$$

alors pour tout cycle α dans Y, le cycle $i^*u_*\alpha$ dans A est égal à $j_*(C_r.\hat{\imath}^*\alpha)$ où C_r est fixé dans $A^r(I)$.

L'Annexe 7 montre que $Al^3\,\mathbf{P}^4$ et $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^3$ se coupent *schématiquement* en $Al^3\,\mathbf{P}^3$. Appliquons alors la formule de Fulton-MacPherson à $\alpha = [\mathrm{Hilb}_c^3\,S']$ dans $A^{\bullet}(\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^3)$. Comme ici $r = 1$, on obtient

$$i^*u_*\alpha = i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\,S'] = j_*C$$

où $C = C_1.\hat{\imath}^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\,S']$ avec C_1 fixé dans $A^1(Al^3\,\mathbf{P}^3)$. Par suite, par la formule des projections, on a dans $A^{\bullet}(Al^3\,\mathbf{P}^4)$:

$$Z.i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\,S'] = Z.j_*C = j_*(j^*Z.C_1.\hat{\imath}^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\,S'])\,.$$

Mais $K = j^*Z.C_1$ appartient à $A^4(Al^3\,\mathbf{P}^3)$ et donc par la proposition 2:

$$\deg Z.i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\,S'] = \deg K.\hat{\imath}^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\,S']$$

est de la forme

$$a_1 n + a_2\binom{n}{2} + a_3\binom{n}{3}$$

où a_1, a_2 et a_3 sont des constantes. Le lemme 3 est donc prouvé.

b) Prouvons le lemme 4. Pour cela nous avons besoin d'un lemme auxiliaire:

LEMME 6. *Désignons par I^j l'intersection ensembliste de S_3^j (défini dans ce paragraphe en 1.a) et de $Al^3\,\mathbf{P}^4$ dans $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^4$.*

Alors génériquement, S_3^j et $Al^3\,\mathbf{P}^4$ se coupent transversalement; par suite $i^*\,[S_3^j] = [I^j]$.

Remarquer que I^j est isomorphe à $\mathbf{P}^3$ par le choix de l'axe du triplet passant par M_j.

Preuve du lemme 6. C'est un simple calcul en coordonnées, comme on en fera beaucoup dans l'Annexe: soit ξ_0 un triplet aligné de support $\{M_j\}$, d'axe transverse à $\mathbf{P}^3$ (l'hyperplan qui contient S'). Dans un système inhomogène de coordonnées (x, y, z, u) centré en M_j, S' a pour équations

$$xyz + \ldots = 0\,, \qquad u = 0$$

et Axe ξ_0 est engendré par un vecteur de coordonnées $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Puisque ξ_0 est supposé générique dans I^j, on se ramène à $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ et l'idéal de ξ_0 est alors

$$I_0 = (x^3, y-x, z-x, u-x).$$

Une carte de $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^4$ en ξ_0 est donnée par

$$(a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3)$$

correspondant à l'idéal voisin:

$$I = (x^3+ax^2+bx+c,\ y-x+a_1x^2+b_1x+c_1,\ z-x+a_2x^2+b_2x+c_2,\ u-x+a_3x^2+b_3x+c_3).$$

Dans cette carte, $Al^3\,\mathbf{P}^4$ s'exprime par $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et S_3^j par

— d'une part $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ car la courbe sur laquelle est le triplet curviligne doit passer par 0,

— d'autre part $a = b = c = 0$ car le support doit être $\{0\}$. Cela termine la démonstration du lemme 6.

Nous aurons besoin de rappeler la proposition suivante (montrée en [25]). C'est une conséquence facile du théorème de Leray-Hirsch, car

$$\mathrm{Axe}: Al^k\,\mathbf{P}^N \to G(1, N)$$

est une fibration de fibre type $\mathbf{P}^k$.

PROPOSITION 7. *Soit i un entier et $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2 \dots \mathscr{H}_i$ des hyperplans de $\mathbf{P}^N$ en position générale. Pour $k \geqslant i$, soit H_i la sous-variété de $Al^k\,\mathbf{P}^N$ formée des k-uplets alignés ξ avec $\xi \cap \mathscr{H}_p \neq \emptyset$ pour $1 \leqslant p \leqslant i$. Alors on a l'égalité dans $A^\bullet_{\mathbf{Q}}(Al^k\,\mathbf{P}^N)$ des sous-espaces vectoriels*

$$A^i_{\mathbf{Q}}(Al^k\,\mathbf{P}^N) \quad \textit{et} \quad \bigoplus_{j=0}^{i} \mathrm{Axe}^* A^{i-j}_{\mathbf{Q}}(G).[H_j].$$

(On note $A^\bullet_{\mathbf{Q}} = A^\bullet \otimes_{\mathbf{Z}}$ et $G = G(1, N)$).

Dans le cas qui nous occupe ($k=3$), on a donc en fixant $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}_3$ trois hyperplans de $\mathbf{P}^4$ en position générale, l'égalité:

$$A^3_{\mathbf{Q}}(Al^3\,\mathbf{P}^4)$$
$$= \mathrm{Axe}^* A^3_{\mathbf{Q}}(G) \oplus \mathrm{Axe}^* A^2_{\mathbf{Q}}(G).[H_1] \oplus \mathrm{Axe}^* A^1_{\mathbf{Q}}(G).[H_2] \oplus \mathbf{Q}\,[H_3].$$

Or il est bien connu par la décomposition de Schubert (voir par exemple [21]) que $A^\bullet(G(1, 4))$ est donné par:

— $A^3(G) = \mathbf{Z}(0, 4) \oplus \mathbf{Z}(1, 3)$ où

$$\begin{cases} (0,4) = \text{droites passant par un point fixe } 0 \text{ de } \mathbf{P}^4, \\ (1,3) = \text{droites contenues dans un hyperplan } H' \text{ de } \mathbf{P}^4 \text{ et coupant une droite } \Delta' \text{ de } H'. \end{cases}$$

— $A^2(G) = \mathbf{Z}(1,4) \oplus \mathbf{Z}(2,3)$ où

$$\begin{cases} (1,4) = \text{droites coupant une droite } \Delta'' \text{ de } \mathbf{P}^4, \\ (2,3) = \text{droites contenues dans un hyperplan } H'' \text{ de } \mathbf{P}^4. \end{cases}$$

— $A^1(G) = \mathbf{Z}(2,4)$ où

$(2,4) =$ droites coupant un plan fixe π de $\mathbf{P}^4$.

Pour montrer l'assertion du lemme 4, il suffit de la montrer pour Z décrivant une base de $A^3(Al^3\,\mathbf{P}^4)$. Mais on a (lemme 6) $Z\,.\,i^*\,[S_3^j] = Z\,.\,[I^j]$. Or dans la base énumérée ci-dessus de $A^3_{\mathbf{Q}}(Al^3\,\mathbf{P}^4)$, seul le premier cycle Axe*(0, 4) a une intersection non vide avec I^j. En effet,

$$\begin{cases} \text{Axe}^*(1,3)\,.\,[I^j] = 0 & \text{car} \quad M_j \notin H' \\ \text{Axe}^*(1,4)\,.\,[H_1]\,.\,[I^j] = 0 & \text{car} \quad M_j \notin \mathscr{H}_1 \\ \text{Axe}^*(2,3)\,.\,[H_1]\,.\,[I^j] = 0 & \text{car} \quad M_j \notin \mathscr{H}_1 \\ \text{Axe}^*(2,4)\,.\,[H_2]\,.\,[I^j] = 0 & \text{car} \quad M_j \notin \mathscr{H}_1 \\ [H_3]\,.\,[I^j] = 0 & \text{car} \quad M_j \notin \mathscr{H}_1\,. \end{cases}$$

Notons alors α le degré d'intersection Axe*(0, 4) . $[I^j]$. (On peut se convaincre que c'est 1 par un calcul en coordonnées, mais c'est inutile pour la suite). Cela correspond à l'unique triplet aligné ξ_0 dans $\mathbf{P}^4$ de support $\{M_j\}$ et d'axe $\overline{OM_j}$. On a donc $\deg \text{Axe}^*(0,4)\,.\,i^*\,[S_3^j] = \alpha$ d'où $\deg \text{Axe}^*(0,4)\,.\,i^*\,[S_3] = \alpha t$ puisque $[S_3] = \sum_{j=1}^{t} [S_3^j]$.

L'assertion du lemme 4 est prouvée pour Z décrivant une base de $A^3(Al^3\,\mathbf{P}^4)$, donc le lemme 4 est démontré.

c) Prouvons le lemme 5. Nous aurons besoin comme en b), d'un lemme auxiliaire :

LEMME 7. *Désignons par I l'intersection ensembliste de $\overline{S_{21}}$ (défini dans ce paragraphe en 1.a)) et de $Al^3\,\mathbf{P}^4$ dans $\text{Hilb}^3_c\,\mathbf{P}^4$. Alors génériquement, $\overline{S_{21}}$ et $Al^3\,\mathbf{P}^4$ se coupent transversalement ; par suite $i^*\,[S_{21}] = [I]$ dans $A^{\cdot}(Al^3\,\mathbf{P}^4)$.*

La preuve du lemme 7 est un calcul en coordonnées comme le lemme 6 : voir l'Annexe 4.

D'après ce lemme, pour prouver le lemme 5, il suffit de montrer que pour tout cycle Z dans $A^3((Al^3\,\mathbf{P}^4)$, le degré du 0-cycle $Z\,.\,[I]$ est de la forme $d(\beta n+\gamma)$ où β et γ ne dépendent que de Z. *Il suffit donc de le vérifier pour* Z *décrivant une base de* $A^3_{\mathbf{Q}}(Al^3\,\mathbf{P}^4)$. Or une telle base a été explicitée en b), comme conséquence de la proposition 7. On utilise donc les mêmes notations qu'en b).

Il s'agit de voir que les degrés des 0-cycles

$$\begin{cases} \text{i)} & \mathrm{Axe}^*(0,4)\,.\,[I] \\ \text{ii)} & \mathrm{Axe}^*(1,3)\,.\,[I] \\ \text{iii)} & \mathrm{Axe}^*(1,4)\,.\,[H_1]\,.\,[I] \\ \text{iv)} & \mathrm{Axe}^*(2,3)\,.\,[H_1]\,.\,[I] \\ \text{v)} & \mathrm{Axe}^*(2,4)\,.\,[H_2]\,.\,[I] \end{cases}$$

vi) $[H_3]\,.\,[I]$

vérifient l'assertion du lemme 5.

Montrons-le rapidement cas par cas, *toujours avec les notations de b).* L'hyperplan de $\mathbf{P}^4$ contenant la projection S' est noté $\mathbf{P}^3$.

i) Les axes des triplets éléments de I sont dans $\mathbf{P}^3$, donc ne peuvent rencontrer un point fixe O de $\mathbf{P}^4$. Le premier des degrés cherchés est donc O.

ii) Les axes des triplets de I sont dans le plan $H' \cap \mathbf{P}^3$ de $\mathbf{P}^3$ et passent par le point fixe $\Delta' \cap \mathbf{P}^3$ de ce plan. Donc il y a d possibilités pour le choix d'un point-double et il reste $n-2$ autres possibilités pour le point simple. Dans ce cas le degré cherché est $d(n-2)$.

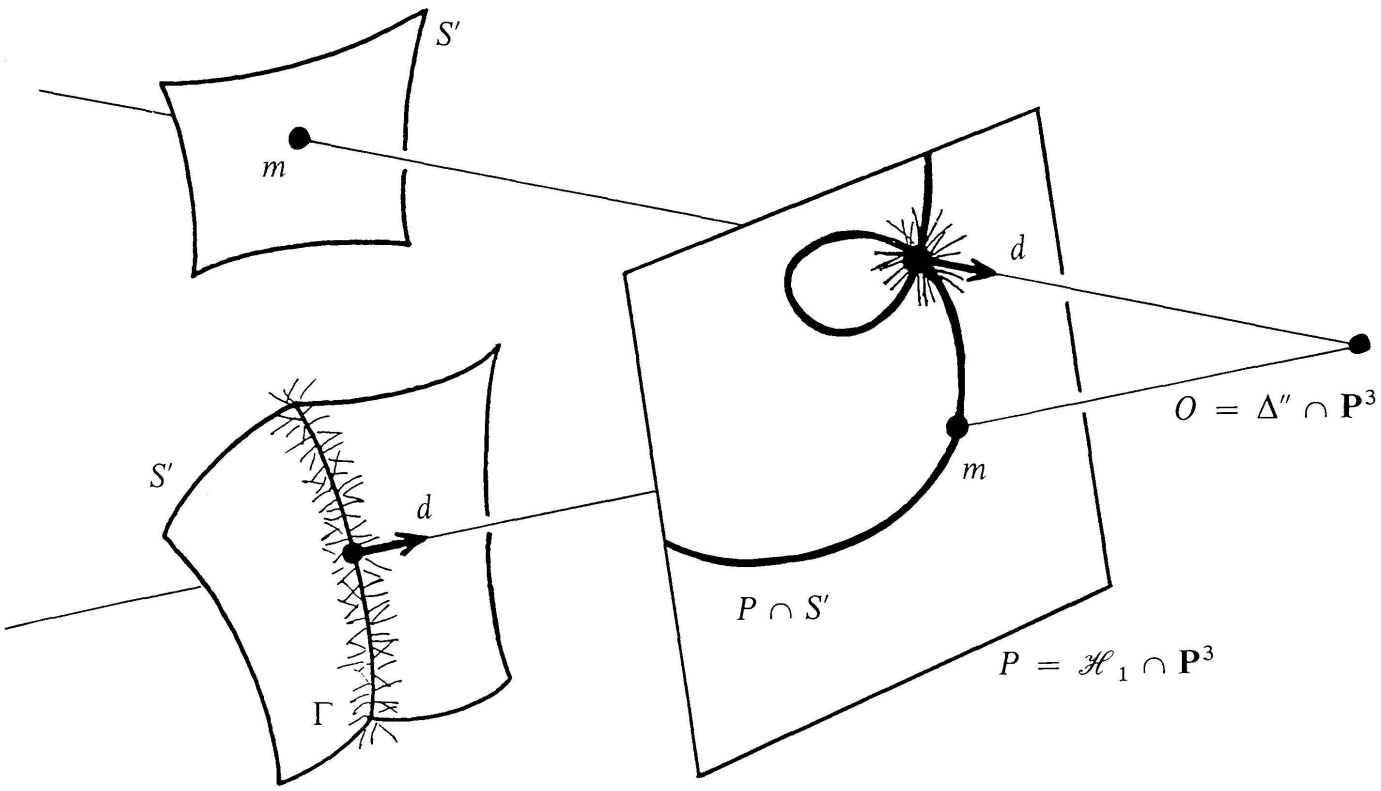
On ne tient pas compte d'une multiplicité éventuelle, car cela ne change rien à l'énoncé du lemme.

iii) Soit $O = \Delta'' \cap \mathbf{P}^3$ et $P = \mathscr{H}_1 \cap \mathbf{P}^3$ (où $\mathscr{H}_1$ est l'hyperplan qui définit le cycle H_1). Les axes des triplets de I doivent passer par O et les triplets avoir un point au moins sur P. Deux cas à distinguer:

— ou le point simple est sur $P \cap S'$ et le point-double a son support sur Γ. Il y a donc nd choix possibles puisque $\deg \Gamma = d$;

— ou le point-double a pour support l'un des d points de $P \cap \Gamma$ et il reste $n-2$ autres possibilités pour le point simple. (En plus, dans ce cas la multiplicité est 2).

La somme est bien de toute façon de la forme $d(\beta n+\gamma)$.



Dans l'un comme l'autre cas de figure ci-dessus, les petits traits représentent les doublets *dans* $\mathbf{P}^4$, de support Γ.

iv) Soit $P = H'' \cap \mathbf{P}^3$ et $P_1 = \mathscr{H}_1 \cap \mathbf{P}^3$. Les triplets doivent donc être dans P et avoir au moins un point sur la droite $\Delta = P \cap P_1$. Il y a donc n possibilités pour le point simple, d'où dn possibilités pour le choix d'un tel triplet.

v) Les axes des triplets de I doivent couper la droite fixe $\Delta = \pi \cap \mathbf{P}^3$ et les triplets doivent avoir deux points sur $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$. Soit $P_i = \mathscr{H}_i \cap \mathbf{P}^3$. Comme les triplets de I ne sont pas formés de trois points distincts, le support $\{O\}$ du point-double doit être ou sur P_1 ou sur P_2. Supposons qu'il soit sur P_1; comme le degré de Γ est d, cela donne d possibilités de choix pour O. Mais alors la droite Δ et le point O engendrent un plan P. La droite $P \cap P_2$ coupe S' en n points dans P parmi lesquels est choisi le troisième point du triplet; donc il y a dn solutions et par symétrie entre P_1 et P_2, $2dn$ au total.

vi) Soit $P_i = \mathscr{H}_i \cap \mathbf{P}^3$. Les triplets de I doivent avoir un point sur chacun des trois plans P_1, P_2, P_3; mais comme ces triplets ne sont pas simples, la partie doublet est obligatoirement à support sur une des droites $P_i \cap P_j$. Or aucune de ces droites ne coupe Γ; l'intersection est donc O.

Le lemme 5 est ainsi démontré.

d) *Conclusion*

Soit S une surface de $\mathbf{P}^4$ à singularités ordinaires et $\Sigma/\mathbf{C}$ le schéma relatif associé défini en I.3.b. Posons $\bar{U} = \mathbf{C}$ et $U = \mathbf{C}^*$. Nous allons voir que les hypothèses de la proposition 1 sont satisfaites pour le schéma relatif $\Sigma/\mathbf{C}$.

Pour a), cela résulte de la proposition 4 ii). Pour b), cela résulte de la proposition 6 ii), chaque composante de $\mathrm{Hilb}^3\, \Sigma_0$ étant génériquement réduite. Enfin le schéma $\Sigma/\mathbf{C}^*$ est isomorphe au produit $S \times \mathbf{C}^*$ par construction même (remarque 3). Donc par la remarque 1, $\Sigma/\mathbf{C}^*$ est k-plat, puisque $S \subset \mathbf{P}^4$ n'a que des singularités ordinaires. L'hypothèse c) de la proposition 1 est donc satisfaite.

La proposition 1 donne alors l'équivalence rationnelle dans $\mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^4$:

$$[\mathrm{Hilb}_c^3\, S] \sim [\mathrm{Hilb}_c^3\, \Sigma_0]\,.$$

Or par la proposition 6 i), on a l'égalité des cycles:

$$[\mathrm{Hilb}_c^3\, \Sigma_0] = [\mathrm{Hilb}_c^3\, S'] + [\overline{S_{21}}] + [S_3]\,.$$

D'où pour n'importe quel cycle Z de $A^3(Al^3\, \mathbf{P}^4)$, l'égalité des 0-cycles:

$$Z\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\, S] = Z\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\, S'] + Z\,.\,i^*\,[\overline{S_{21}}] + Z\,.\,i^*\,[S_3]\,.$$

Des lemmes 3, 4 et 5 résulte alors aussitôt la proposition 5 que l'on cherchait à prouver.

III) Trisécantes dans $\mathbf{P}^4$: les calculs

Soit S une surface de $\mathbf{P}^4$ d'invariants n, d, t (notations du § II). On va donner deux formules trisécantes pour S, supposée à singularités ordinaires dans $\mathbf{P}^4$.

1°) Tangentes à S recoupant S et une droite fixée.

Nous cherchons le degré du 0-cycle

$$[\mathscr{D}]\,.\,\mathrm{Axe}^*\sigma_2\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\, S]$$

où comme d'habitude, $i\colon Al^3\, \mathbf{P}^4 \hookrightarrow \mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^4$ est l'injection canonique. Ici, $\mathscr{D} \subset Al^3\, \mathbf{P}^4$ est l'hypersurface des triplets alignés non simples et $\sigma_2 = (1, 4)$ est le cycle de $A^2(G(1, 4))$ des droites de $\mathbf{P}^4$ coupant une droite fixe Δ. D'après la proposition 5, ce nombre est de la forme

$$T(S) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma).$$

a) Avant de commencer le calcul des six coefficients, regardons le cas où S est singulière avec δ points-doubles impropres. Soit O l'un de ces points. Il engendre avec Δ un plan P recoupant S en $n-2$ autres points et non pas $n-3$ (voir IV.1.c.i). Or chacune des $n-2$ droites joignant O à l'un de ces $n-2$ points est une droite coupant S suivant un triplet non simple (car double en O). C'est une « fausse » tangente à S. Donc il faudra, pour avoir le nombre de « vraies » tangentes à S, retrancher de $T(S)$ ces $\delta(n-2)$ fausses tangentes par les points-doubles de S. Mais il faut le faire bien sûr en comptant la multiplicité.

Un calcul montre alors (Annexe 8) que cette multiplicité est 2. C'est tout à fait analogue au fait que la *classe* d'une courbe plane avec δ points-doubles ordinaires est $n(n-1) - 2\delta$ puisqu'on doit retrancher les droites, comptant deux fois, qui passent par les points-doubles.

b) Soit alors $\tilde{S}$ la réunion de S et d'un plan P générique de $\mathbf{P}^4$. Essayons d'évaluer $T(\tilde{S})$. D'après le lemme 9 (Annexe 1) $\mathrm{Hilb}^3_c\, \tilde{S}$ se décompose en quatre composantes (réduites)

$$\begin{cases} \mathrm{Hilb}^3_c\, S \\ \overline{\mathrm{Hilb}^2\, S_0 \times P_0} \\ \overline{S_0 \times \mathrm{Hilb}^2\, P_0} \\ \mathrm{Hilb}^3_c\, P \end{cases}$$

où $S_0 = S - P$ et $P_0 = P - S$; la barre est l'adhérence dans $\mathrm{Hilb}^3_c\, \mathbf{P}^4$.

On a donc, si $i : Al^3\, \mathbf{P}^4 \hookrightarrow \mathrm{Hilb}^3_c\, \mathbf{P}^4$ est l'injection canonique,

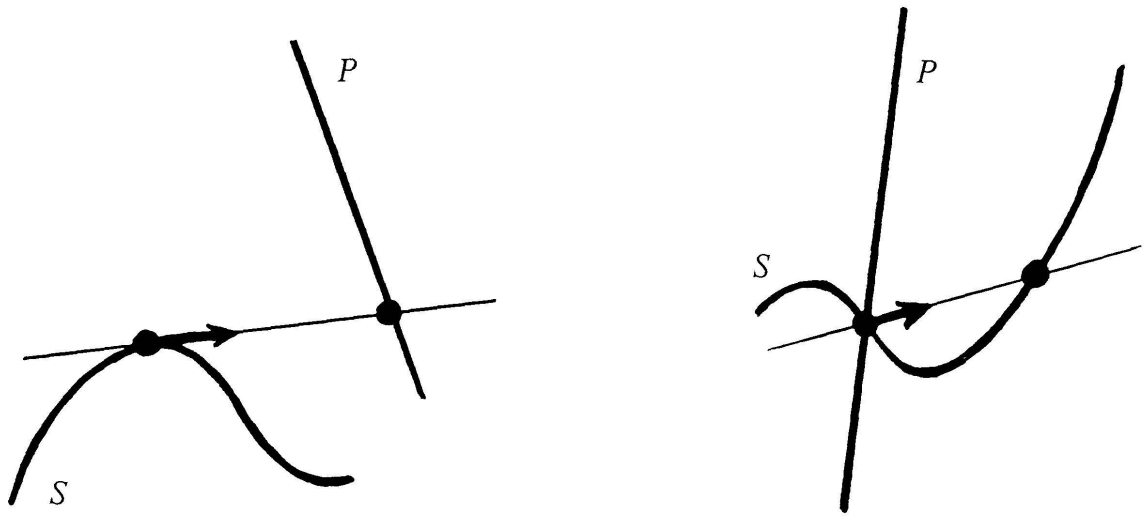
$$i^* [\mathrm{Hilb}^3_c\, \tilde{S}]$$
$$= i^* [\mathrm{Hilb}^3_c\, S] + i^* [\overline{\mathrm{Hilb}^2\, S_0 \times P_0}] + i^* [\overline{S_0 \times \mathrm{Hilb}^2\, P_0}] + i^* [\mathrm{Hilb}^3_c\, P].$$

Pour obtenir $T(\tilde{S})$, on intersecte avec $[\mathscr{D}]$. Axe$^*\sigma_2$ dans $A^\cdot(Al^3\, \mathbf{P}^4)$. Le premier terme va donc donner par définition $T(S)$ et le dernier $T(P)$. Le troisième terme, lui, va donner O car une droite dans P ne recoupe pas une droite fixée générique.

Reste à voir la contribution du deuxième terme. Rappelons qu'on cherche des triplets *non simples*. Deux cas sont à distinguer :

— ou le point-double est sur S et le point simple sur P,

— ou deux points simples sont sur S et le point-double provient de la rencontre avec P en l'un des points-simples.



Premier cas Deuxième cas

Dans le premier cas, le nombre cherché est $n(n-1)$. En effet, il s'agit du nombre de tangentes à S coupant un plan P fixé et une droite fixée. Par la formule de Pieri, on a dans $A^{\bullet}(G(1,4))$:

$$(1,4)\,.\,(2,4) = (0,4) + (1,3)\,.$$

Il s'agit donc du nombre de tangentes à S passant par un point fixe O plus le rang (μ_1) d'une section hyperplane. C'est donc $\nu + 2\delta$ d'une part (il faut bien compter, *et avec multiplicité 2*, les δ fausses tangentes à S passant par O et l'un des δ points-doubles impropres de S) et d'autre part $\mu_1 = n(n-1) - 2d$ ([34], p. 190) car une section hyperplane de S a degré n et d points-doubles apparents.

Soit au total $n(n-1)$ car $2d = \nu + 2\delta$ (cf. Annexe 6). La multiplicité est 1 car P est choisi générique.

Dans le deuxième cas, vu ce qu'on a dit au début de ce paragraphe, il s'agit de « fausses » tangentes à $\tilde{S}$ par l'un des n points d'intersection de P et S. Donc on doit les compter $2n(n+1-2)$ puisque $\tilde{S}$ est de degré $n+1$.

Au total, la contribution du deuxième terme dans $T(\tilde{S})$ est $3n(n-1)$. On a donc montré la relation

$$T(\tilde{S}) = T(S) + T(P) + 3n(n-1)\,,$$

soit en utilisant le lemme 13 de l'Annexe 5:

$$a_1(n+1) + a_2\binom{n+1}{2} + a_3\binom{n+1}{3} + \alpha(t+d) + (d+n)\left(\beta(n+1)+\gamma\right)$$
$$= a_1 n + a_2\binom{n}{2} + a_3\binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n+\gamma) + a_1 + 3n(n-1)\,.$$

(Il vient $T(P) = a_1$ car alors $n = 1$, $d = t = 0$). Or le lemme 12 (Annexe 5) permet d'identifier les coefficients ce qui donne:

pour d: $\alpha + \beta = 0$,

pour n: $\begin{cases} -\gamma = a_2 - a_3 + 6 & \text{(on a fait } n = -1) \\ a_2 + 2\beta + \gamma = 0 & \text{(on a fait } n = 1)\,. \end{cases}$

Il reste à trouver trois autres équations. On remarque tout d'abord que ni un plan, ni une quadrique de $\mathbf{P}^3$ plongée dans $\mathbf{P}^4$ n'ont de trisécante rencontrant une droite fixe. On a donc $T = 0$ pour ces deux surfaces, soit $a_1 = 2a_1 + a_2 = 0$. Ensuite, la surface $S(2, 2)$, intersection complète de deux hyperquadriques de $\mathbf{P}^4$, vérifie $T = 0$; car pour raison de degré, une trisécante est l'une des 16 droites qu'elle contient et aucune ne rencontre une droite fixe. Mais on connaît n, d, t (Annexe 6) d'où

$$4a_1 + 6a_2 + 4a_3 + 2(4\beta+\gamma) = 0\,.$$

Ces six équations ensemble forment un système inversible dont la solution est:

$$\begin{cases} a_1 = 0 & a_2 = 0 & a_3 = -6 \\ \alpha = -6 & \beta = 6 & \gamma = -12\,. \end{cases}$$

On a donc démontré (vu a)) le

THÉORÈME 1. *Soit S une surface à singularités ordinaires de $\mathbf{P}^4$, d'invariants n, d, t. Alors le degré du 0-cycle*

$$[\mathscr{D}]\,.\,\mathrm{Axe}^*\sigma_2\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}^3_c\, S]$$

(nombre de tangentes à S recoupant S et une droite fixe) *est*

$$6\left(d(n-2) - \binom{n}{3} - t\right).$$

Et les δ points-doubles impropres éventuels de S contribuent de $2\delta(n-2)$ dans ce nombre.

2°) TANGENTES D'INFLEXION COUPANT UN PLAN FIXÉ

Nous cherchons cette fois le degré $T(S)$ du 0-cycle

$$[\mathscr{T}] \,.\, \mathrm{Axe}^*\sigma_1 \,.\, i^* \,[\mathrm{Hilb}^3_c\, S] \,.$$

Cette fois, $\mathscr{T} \subset Al^3\, \mathbf{P}^5$ est la sous-fibration en $\mathscr{T}_0 \subset \mathrm{Hilb}^3\, \mathbf{P}^1$ formée des triplets alignés de support un point. ($\mathscr{T}_0$ a la structure d'une cubique gauche dans $\mathrm{Hilb}^3\, \mathbf{P}^1 \simeq \mathbf{P}^3$). Le cycle σ_1 de $A^1(G(1, 4))$, encore noté (2, 4), est formé des droites coupant un plan π fixé.

Toujours d'après la proposition 5, le nombre $T(S)$ est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) \,.$$

a) Avant de chercher les six coefficients, regardons le cas où S est singulière avec δ points-doubles impropres.

Soit O l'un de ces points. Chacun des plans tangents P_1 (resp. P_2) à S en O coupe le plan π fixé en un point m_1 (resp. m_2). Les deux triplets alignés de support $\{O\}$ et d'axe $\overline{Om_1}$ (resp. $\overline{Om_2}$) sont dans S et interviennent donc dans $T(S)$. Cependant, ces droites sont de « fausses » tangentes d'inflexion. *L'Annexe 8 b) montre qu'elles comptent avec multiplicité 3.* On devra donc retrancher de $T(S)$ le nombre 6δ de façon à obtenir le nombre de « vraies » tangentes d'inflexion. Ceci est analogue au fait que pour une courbe plane ayant seulement δ points-doubles ordinaires, on doit retrancher 6δ à $3n(n-2)$ pour avoir le nombre de « vrais » points d'inflexion ([34], p. 78).

b) Soit, comme en 1), $\tilde{S}$ la réunion de S et d'un plan P. On obtient, avec les mêmes notations:

$$i^* \,[\mathrm{Hilb}^3_c\, \tilde{S}]$$
$$= i^* \,[\mathrm{Hilb}^3_c\, S] + i^* \,[\overline{\mathrm{Hilb}^2\, S_0 \times P_0}] + i^* \,[\overline{S_0 \times \mathrm{Hilb}^2\, P_0}] + i^* \,[\mathrm{Hilb}^3_c\, P] \,.$$

Pour obtenir $T(\tilde{S})$, on intersecte avec $[\mathscr{T}] \,.\, \mathrm{Axe}^*\sigma_1$; le premier terme va donc donner par définition $T(S)$ et le dernier: $T(P) = a_1$. Reste à voir la contribution des deuxième et troisième termes.

D'après a), elle est de $3n$ pour chacun d'eux. En effet, pour chaque point d'intersection O de S et P, il y a deux triplets alignés de support $\{O\}$ coupant un plan fixe π: l'un dans $T_0 S$ et l'autre dans P; et chacun compte, vu a), avec la multiplicité 3. On a donc montré la relation

$$T(\tilde{S}) = T(S) + a_1 + 6n\,,$$

soit comme précédemment:

$$a_1(n+1) + a_2\binom{n+1}{2} + a_3\binom{n+1}{3} + \alpha(t+d) + (d+n)\,(\beta(n+1)+\gamma)$$
$$= a_1 n + a_2\binom{n}{2} + a_3\binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n+\gamma) + a_1 + 6n\,.$$

Grâce à l'Annexe 5, on peut identifier comme précédemment en d et n, d'où

$$\alpha + \beta = 0\,, \quad -\gamma = a_2 - a_3 - 6 \quad \text{et} \quad a_2 + 2\beta + \gamma = 6$$

comme équations.

Il reste à en trouver trois autres. La surface $S(2, 2)$ contient 16 droites dont aucune ne coupe un plan fixe; donc $T(S(2, 2)) = 0$. D'où comme plus haut: $4a_1 + 6a_2 + 4a_3 + 2(4\beta+\gamma) = 0$. Enfin, par un calcul énumératif simple (Annexe 9), on a $T(S(2, 3)) = 60$ et $T(S(2, 4)) = 192$ d'où deux dernières équations:

$$\begin{cases} 6a_1 + 15a_2 + 20a_3 + 6(6\beta+\gamma) = 60 & \text{car on connaît } (n, d, t) \\ 8a_1 + 28a_2 + 56a_3 + 12(8\beta+\gamma) = 192 & \text{pour ces surfaces (Annexe 6)}\,. \end{cases}$$

Ces six équations ensemble forment un système inversible dont la solution est

$$\begin{cases} a_1 = -3 & a_2 = -6 & a_3 = 12 \\ \alpha = 6 & \beta = -6 & \gamma = 24\,. \end{cases}$$

On a donc démontré, vu a), le

THÉORÈME 2. *Soit S une surface à singularités ordinaires de $\mathbf{P}^4$, d'invariants n, d, t. Alors le degré du 0-cycle* $[\mathscr{T}]\,.\,\mathrm{Axe}^*\sigma_1\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}^3_c\,S]$ (nombre de tangentes d'inflexion à S coupant un plan fixe) *est*

$$n(n-4)\,(2n-1) + 6(t-d(n-4))\,.$$

Et les δ points-doubles impropres éventuels de S contribuent de 6δ dans ce nombre.

Deuxième partie: $\mathbf{P}^5$, $\mathbf{P}^6$, $\mathbf{P}^7$

IV) Trisécantes dans $\mathbf{P}^5$

Soit V une surface non-singulière de $\mathbf{P}^5$. Outre les invariants n, d, t de V comme dans $\mathbf{P}^4$, soit δ le nombre de points-doubles impropres apparents de V, i.e. le nombre de points-doubles impropres de la projection V' de V sur un $\mathbf{P}^4$ générique de $\mathbf{P}^5$.

Nous allons voir au paragraphe 1 que toute formule trisécante pour V dans $\mathbf{P}^5$ est de la même forme que pour V' dans $\mathbf{P}^4$, avec un terme supplémentaire $\delta(un+v)$ où u et v sont des constantes.

On en déduira au paragraphe 2 trois formules trisécantes dans $\mathbf{P}^5$: les tangentes d'inflexion de V, les tangentes à V recoupant V ainsi qu'un $\mathbf{P}^3$ fixé, les trisécantes à V coupant un $\mathbf{P}^2$ fixé.

1°) Retour à $\mathbf{P}^4$

a) Soit V une surface non-singulière de $\mathbf{P}^5$ et projetons-la génériquement en V' sur un hyperplan H. Par le procédé de construction de I.3.a, on voit qu'il existe un schéma relatif $\Phi/\mathbf{C}$ avec fibres

$$\Phi_1 = V \quad \text{et} \quad (\Phi_0)_{\text{red}} = V'.$$

On peut énoncer les deux propositions suivantes, dont les démonstrations sont analogues — mais plus simples — à celles des propositions 3 et 4, en ce sens qu'il suffit de se ramener à un modèle local, comme dans l'Annexe 3. (Ce modèle local correspond à V formé de deux plans disjoints dans $\mathbf{P}^5$, soit V' formé de deux plans transverses dans H.) Nous laissons les détails au lecteur; on peut aussi consulter [23] où la situation est tout à fait analogue.

On désignera les points singuliers de V' par $N_1, N_2, \ldots, N_\delta$.

Proposition 8. *Avec les notations précédentes, on a l'égalité de sous-schémas de* $\mathbf{P}^5$:

$$\Phi_0 = V' \cup N_1^{(1)} \cup \ldots \cup N_\delta^{(1)}$$

où $N_i^{(1)}$ *désigne le premier voisinage infinitésimal de* N_i dans $\mathbf{P}^5$. *De plus,* $V' = (\Phi_0)_{\text{red}} = \Phi_0 \cap H$.

PROPOSITION 9. *Soit* $\Phi/\mathbf{C}$ *le schéma relatif associé à* V *comme ci-dessus. Alors*

i) *Pour* $k \geqslant 3$ *tout k-uplet curviligne dans* Φ_0 *de support un des points singuliers* $\{N\}$ *de* V' *est limite de k-uplets doubles dans* Φ_0 *(notations de la définition 2).*

ii) *Tout k-uplet curviligne dans* Φ_0 *est limite de k-uplets curvilignes dans des fibres* Φ_λ *de* $\Phi/\mathbf{C}$ *avec* $\lambda \neq 0$.

iii) $\mathrm{Hilb}^2\,\Phi_0$ *est réduit au voisinage d'un doublet* d *de support un point singulier* $\{N\}$ *lorsque* $d \not\subset V'$.

Ceci étant, afin d'étudier les composantes irréductibles de $\mathrm{Hilb}^3_c\,\Phi_0$, nous donnons la

Définition 3. Pour $j = 1, 2, ..., \delta$ notons $\overline{U_j}$ l'adhérence dans $\mathrm{Hilb}^3_c\,\mathbf{P}^5$ de la partie U_j formée des triplets $d \cup m$ où

d est un doublet de $\mathbf{P}^5$ de support $\{N_j\}$,

m est un point simple de $V' - \{N_j\}$.

Bien entendu, $\overline{U_j}$ est dans $(\mathrm{Hilb}^3_c\,\Phi_0)_{\mathrm{red}}$, d'après la structure nilpotente de Φ_0 donnée par la proposition 8. On a alors la

PROPOSITION 10.

i) $(\mathrm{Hilb}^3_c\,\Phi_0)_{\mathrm{red}}$ *est réunion des* $\overline{U_j}$ *et de* $(\mathrm{Hilb}^3_c\,V')_{\mathrm{red}}$;

ii) $\mathrm{Hilb}^3_c\,\Phi_0$ *est génériquement réduit le long des* $\overline{U_j}$ *et* $\mathrm{Hilb}^3_c\,V'$.

Preuve.

i) Soit t un triplet curviligne contenu dans Φ_0. Si t est dans H, comme $\Phi_0 \cap H = V'$, on a $t \in (\mathrm{Hilb}^3_c\,V')_{\mathrm{red}}$. Si maintenant t n'est pas dans H, le support de t ne peut être formé de trois points distincts; il contient forcément un des points N_j, car en dehors de ces points, on a $\mathcal{O}_{\Phi_0}$ égal à $\mathcal{O}_{V'}$. D'autre part, toujours puisque $t \not\subset H$, la multiplicité de t en l'un des N_j est strictement plus grande que 1. Si le support de t est réduit à $\{N_j\}$, d'après la proposition 9 i), on a $t \in \overline{U_j}$. Sinon, $\mathrm{Supp}\,t = \{N_j, m\}$ où $m \in V' - \{N_j\}$. Les multiplicités de t en N_j et m sont 2 et 1; ainsi $t \in U_j$.

ii) $\mathrm{Hilb}^3_c\,V'$ est en fait réduit d'après l'Annexe 1. Si maintenant $d \cup m \in U_j$ est générique, on a $d \not\subset H$, d'où $\mathrm{Hilb}^2\,\Phi_0$ réduit au voisinage de d (proposition 9 iii); par suite U_j est réduit au voisinage de $d \cup m$. La proposition 10 est ainsi prouvée.

Rappelons alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (11) & Al^3\,\mathbf{P}^5 & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^5 & (15) \\ & & & \uparrow & \\ & & & \mathrm{Hilb}_c^3\,V & (6) \end{array}$$

où les dimensions sont indiquées entre parenthèses.

Une formule trisécante pour V dans $\mathbf{P}^5$ exprime le degré du 0-cycle

$$Z\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\,V]$$

où Z est un cycle de $A^2(Al^3\,\mathbf{P}^5)$ fixé. Nous allons voir en d) qu'il suffit d'évaluer le degré de $Z\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\,\Phi_0]$, soit d'après la proposition qui précède:

$$Z\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\,V'] + \sum_{1\leqslant j\leqslant \delta} Z\,.\,i^*\,[\overline{U_j}]\,.$$

b) *Evaluation de* $Z\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\,V']$

Cette évaluation est analogue à celle effectuée en II.2.a. Comme V' est contenu dans $\mathbf{P}^4$, regardons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} (11) & Al^3\,\mathbf{P}^5 & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^5 & (15) \\ & \uparrow j & & \uparrow u & \\ (9) & Al^3\,\mathbf{P}^4 & \overset{\hat{i}}{\hookrightarrow} & \mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^4 & (12) \\ & & & \uparrow & \\ & & & \mathrm{Hilb}_c^3\,V' & (6) \end{array}$$

où les flèches sont les injections canoniques. Par l'Annexe 7, $Al^3\,\mathbf{P}^4$ est *intersection schématique* de $Al^3\,\mathbf{P}^5$ et $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^4$.

Or $\mathrm{Hilb}_c^3\,V'$ peut être considéré comme sous-variété de $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^4$; appliquons alors la formule de Fulton-MacPherson (II.2) à $\alpha = [\mathrm{Hilb}_c^3\,V']$ dans $A^{\bullet}(\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^4)$. On obtient

$$i^*u_*\alpha = i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\,V'] = j_*C$$

où $C = \hat{\imath}^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\,V']\,.\,c_1$ avec c_1 dans $A^1(Al^3\,\mathbf{P}^4)$. Par suite, par la formule des projections, on a dans $A^{\bullet}(Al^3\,\mathbf{P}^5)$:

$$Z\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\,V'] = j_*(j^*Z\,.\,c_1\,.\,\hat{\imath}^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\,V'])\,.$$

Mais $j^*Z \,.\, c_1$ est un cycle fixé dans $A^3(Al^3\,\mathbf{P}^4)$ et donc

$$\deg j^*Z \,.\, c_1 \,.\, i^* \,[\mathrm{Hilb}_c^3\, V']$$

représente une *formule trisécante pour la surface* V' *de* $\mathbf{P}^4$. Ce nombre est donc (proposition 5) de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma)$$

où n, t et d sont les invariants de V (donc de V') et a_1, a_2, a_3, α, β et γ des constantes.

c) *Evaluation de* $Z \,.\, i^* \,[\overline{U_j}]$

Pour cela, fixons j entre 1 et δ et soit $N = N_j$, $\overline{U} = \overline{U_j}$. Soit I l'intersection $\overline{U} \cap Al^3\,\mathbf{P}^5$ dans $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^5$. La sous-variété I, de dimension 2, est formée des triplets alignés de $\mathbf{P}^5$ dont l'axe passe par N, doubles en N et avec un troisième point sur V'.

LEMME 8. *L'intersection* $\overline{U} \cap Al^3\,\mathbf{P}^5$ *est génériquement transverse dans* $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^5$.

Preuve. C'est un simple calcul en coordonnées; voir l'Annexe 4.

Le lemme montre ainsi l'égalité $i^* \,[\overline{U}] = [I]$ dans $A^9(Al^3\,\mathbf{P}^5)$. Maintenant, pour connaître $i^* \,[\overline{U}] \,.\, Z$, il suffit évidemment d'évaluer $[I] \,.\, Z$ pour Z décrivant une base de $A^2_{\mathbf{Q}}(Al^3\,\mathbf{P}^5)$. Or la proposition 7 en donne une explicitement. Soit $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ deux hyperplans de $\mathbf{P}^5$ et soit $[H_1]$ et $[H_2]$ les cycles associés dans $A^1(Al^3\,\mathbf{P}^5)$ et $A^2(Al^3\,\mathbf{P}^5)$. On a l'égalité des espaces vectoriels:

$$A^2_{\mathbf{Q}}(Al^3\,\mathbf{P}^5) = \mathrm{Axe}^* A^2_{\mathbf{Q}}(G) \oplus \mathrm{Axe}^* A^1_{\mathbf{Q}}(G) \,.\, [H_1] \oplus \mathrm{Axe}^* A^0_{\mathbf{Q}}(G) \,.\, [H_2]$$

où $G = G(1, 5)$. Distinguons alors trois cas.

i) $Z \in \mathrm{Axe}^* A^2_{\mathbf{Q}}(G)$

Une base de $A^2(G)$ est formée des cycles de Schubert (notations de [21]):

$$\begin{cases} (3, 4)\text{: droites contenues dans un hyperplan fixé de } \mathbf{P}^5, \\ (2, 5)\text{: droites coupant un plan fixé } P \text{ de } \mathbf{P}^5. \end{cases}$$

On a alors $\mathrm{Axe}^*(2, 5) \,.\, [I] = \varepsilon(n-2)$ où ε est un entier > 0. En effet, $P \cap \mathbf{P}^4$ est une droite Δ de $\mathbf{P}^4$ et N et Δ engendrent un plan π passant

par N. Ce plan recoupe V' en $n-2$ autres points. (Le plan π coupe bien V' au voisinage de N en un triplet, premier voisinage infinitésimal de N dans π; mais un plan voisin générique ne le coupe qu'en un doublet. Le plan π recoupe donc V' en $n-2$ points et non pas $n-3$). La multiplicité éventuelle ε est en fait 1, comme il résultera de 2.a).

Par contre, on a $\mathrm{Axe}^*(3,4).[I] = 0$ car l'axe de tout triplet de I passe par N, qui n'est pas dans l'hyperplan fixé.

ii) $Z \in \mathrm{Axe}^* A^1_{\mathbf{Q}}(G).[H_1]$

Le cycle (3, 5) des droites coupant un solide fixé de $\mathbf{P}^5$ engendre $A^1_{\mathbf{Q}}(G)$. On a

$$\mathrm{Axe}^*(3,5).[H_1].[I] = \varepsilon n .$$

En effet, le solide coupe $\mathbf{P}^4$ en un plan P; N et P engendrent donc un $\mathbf{P}^3$ dans $\mathbf{P}^4$. Dans ce $\mathbf{P}^3$, il y a la courbe $C = V' \cap \mathbf{P}^3$ et le plan $\mathscr{H}'_1 = \mathscr{H}_1 \cap \mathbf{P}^3$. Bien sûr, N n'étant pas sur $\mathscr{H}_1$, n'est pas sur $\mathscr{H}'_1$. On cherche donc les triplets doubles en N, le troisième point étant sur $\mathscr{H}'_1 \cap C$. Il y en a donc n, avec une multiplicité éventuelle.

iii) $Z \in \mathrm{Axe}^* A^0_{\mathbf{Q}}(G).[H_2]$

Le triplet double en N devant avoir deux points sur $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ (par définition de $[H_2]$), on a

$$\mathbf{1}.[H_2].[I] = 0$$

puisque N n'appartient ni à $\mathscr{H}_1$ ni à $\mathscr{H}_2$.

Ceci prouve que pour tout Z dans $A^2_{\mathbf{Q}}(Al^3\,\mathbf{P}^5)$, le degré du 0-cycle $i^*[\overline{U_j}].Z$ est de la forme $un + v$ où u et v sont des constantes ne dépendant que de Z.

d) *Conclusion.* Soit V une surface non-singulière de $\mathbf{P}^5$ et $\Phi/\mathbf{C}$ le schéma relatif associé (IV.1.a). Si on pose $\bar{U} = \mathbf{C}$ et $U = \mathbf{C}^*$, les hypothèses de la proposition 1 sont vérifiées pour $\Phi/\mathbf{C}$. Pour a) cela résulte de la proposition 9 ii). Pour b), de la proposition 10 ii). Enfin $\Phi/\mathbf{C}^*$ est k-plat, car isomorphe au produit $V \times \mathbf{C}^*$ (voir remarque 1). On peut ainsi appliquer la proposition 1.

On a donc l'équivalence rationnelle dans $\mathrm{Hilb}^3_c\,\mathbf{P}^5$:

$$[\mathrm{Hilb}^3_c\, V] \sim [(\mathrm{Hilb}^3_c\, \Phi_0)_{\mathrm{red}}] = [\mathrm{Hilb}^3_c\, \Phi_0] .$$

D'où, par la proposition 10, l'équivalence rationnelle

$$[\mathrm{Hilb}_c^3\, V] \sim [\mathrm{Hilb}_c^3\, V'] + \sum_{j=1}^{\delta} [\overline{U_j}]\,.$$

En regardant alors les évaluations faites en b) et c), il vient la

PROPOSITION 11. *Soit* V *une surface non-singulière de* $\mathbf{P}^5$, *d'invariants* (n, d, t, δ). *Pour tout cycle* Z *de* $A^2(Al^3\,\mathbf{P}^5)$, *la formule trisécante donnant le degré du* 0-*cycle*

$$Z\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\, V]$$

est de la forme

$$T(V) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v)$$

où $a_1, a_2, \ldots, v$ *sont des constantes ne dépendant que de* Z.

2°) TROIS FORMULES

a) Pour une surface V de $\mathbf{P}^5$, commençons par regarder *le nombre de trisécantes à* V *rencontrant un plan* π *fixé*. Par définition, ce nombre $T(V)$ est le degré du 0-cycle $\mathrm{Axe}^*\sigma_2\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\, V]$ où comme toujours

$$i\colon Al^3\,\mathbf{P}^5 \hookrightarrow \mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^5$$

est l'injection canonique et $\sigma_2 \in A^2(G(1, 5))$, le cycle des droites coupant un plan fixe.

Vu la proposition 11, ce nombre est de la forme

$$T(V) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v)$$

où n, d, t, δ sont les invariants de V.

Soit alors $\tilde{V}$ la réunion de V et d'un plan P *disjoint*. On constate que $\mathrm{Hilb}_c^3\,\tilde{V}$ est formé de quatre « composantes » disjointes, avec des notations évidentes:

$$\mathrm{Hilb}_c^3\, V\,, \quad \mathrm{Hilb}^2\, V \times P\,, \quad V \times \mathrm{Hilb}^2\, P\,, \quad \mathrm{Hilb}_c^3\, P\,.$$

Quelle va être la contribution de chacune de ces composantes dans $T(\tilde{V})$?

Pour la première et la dernière, c'est clair: c'est respectivement $T(V)$ et $T(P) = a_1$ (car pour P, $n = 1$, $d = t = \delta = 0$). La troisième composante n'apporte aucune contribution puisqu'elle est disjointe de $Al^3\,\mathbf{P}^5$: un triplet aligné ayant deux points dans P est dans P puisque $P \cap V = \emptyset$.

Reste à trouver la contribution de la deuxième composante. C'est le nombre de sécantes à V coupant à la fois les plans P et π. Mais si $\sigma_2 = (2, 5)$ est le cycle dans $A^{\bullet}(G(1, 5))$ des droites coupant un plan fixe, la formule de Pieri donne

$$\sigma_2^2 = (0, 5) + (1, 4) + (2, 3).$$

On obtient donc $\mathrm{Axe}^*\sigma_2 \,.\, i^*\,[\mathrm{Hilb}^2\, V \times P]$ comme somme du

i) nombre de sécantes à V passant par un point fixe de $\mathbf{P}^5$,

ii) nombre de sécantes à V contenues dans un $\mathbf{P}^4$ et coupant une droite de ce $\mathbf{P}^4$,

iii) nombre de sécantes à V contenues dans un $\mathbf{P}^3$.

Ces trois nombres sont respectivement:

i) δ, car c'est le nombre de points-doubles impropres de la projection de V sur un $\mathbf{P}^4$,

ii) d, car c'est le nombre de points-doubles de la courbe $V \cap \mathbf{P}^4$ projetée sur un $\mathbf{P}^2$ par une droite de $\mathbf{P}^4$ (et le lieu double Γ de V projeté sur un $\mathbf{P}^3$ par une droite de $\mathbf{P}^5$ est de degré d),

iii) $\binom{n}{2}$, car il s'agit de trouver une droite passant par deux des n points de $V \cap \mathbf{P}^3$.

Les multiplicités sont toutes 1 car P est choisi générique. Ainsi on a $T(\tilde{V}) = T(V) + a_1 + \delta + d + \binom{n}{2}$, soit encore, puisque les invariants de $\tilde{V}$ sont (lemme 13, Annexe 5)

$$\tilde{n} = n + 1\,, \quad \tilde{d} = d + n\,, \quad \tilde{t} = t + d\,, \quad \tilde{\delta} = \delta + n\,,$$

la relation

$$a_1(n+1) + a_2\binom{n+1}{2} + a_3\binom{n+1}{3} + \alpha(t+d) + (d+n)\big(\beta(n+1)+\gamma\big)$$

$$+ (\delta+n)\big(u(n+1)+v\big) = a_1 n + a_2\binom{n}{2} + a_3\binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n+\gamma)$$

$$+ \delta(un+v) + a_1 + \delta + d + \binom{n}{2}.$$

Mais l'Annexe 5 permet d'identifier et on obtient donc par

— identification de $\delta : u = 1$,

— identification de $d : \alpha + \beta = 1$.

— identification de n: $\begin{cases} -\gamma - v = a_2 - a_3 + 1 & (n=-1) \\ a_2 + 2\beta + \gamma + 2u + v = 0 & (n=1) \end{cases}$.

Il reste alors à trouver quatre autres équations. On remarque d'abord que ni un plan ni une quadrique de $\mathbf{P}^3$ (plongée dans $\mathbf{P}^5$) n'ont de trisécante coupant un plan fixe, d'où $T = 0$ pour ces deux surfaces. Par suite, $a_1 = 2a_1 + a_2 = 0$.

Maintenant, soit $S(2, 2) \subset \mathbf{P}^4$ l'intersection complète de deux quadriques et considérons-la comme plongée dans $\mathbf{P}^5$. On a $T = 0$ pour cette surface car pour raison de degré, une trisécante est l'une des 16 droites qu'elle contient et aucune ne coupe le plan π fixé. De même la surface de Veronese (plongement de $\mathbf{P}^2$ dans $\mathbf{P}^5$ par $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)$) est intersection de quadriques et ne contient pas de droite. On a donc aussi $T = 0$ pour cette surface. Leurs invariants (n, d, t, δ) étant respectivement $(4, 2, 0, 0)$ et $(4, 3, 1, 0)$ (cf. Annexe 6), on obtient les deux équations

$$\begin{cases} 4a_1 + 6a_2 + 4a_3 + 8\beta + 2\gamma = 0 \\ 4a_1 + 6a_2 + 4a_3 + \alpha + 12\beta + 3\gamma = 0 . \end{cases}$$

Jointes aux équations précédentes, on obtient un système inversible dont la solution est

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \beta = -1 \end{cases} \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = 1 \qquad \alpha = 2$$
$$\gamma = 2 \qquad u = 1 \qquad v = -2 .$$

On a donc montré le

THÉORÈME 3. *Soit V une surface de $\mathbf{P}^5$ d'invariants (n, d, t, δ). Alors le degré du 0-cycle* $\mathrm{Axe}^*\sigma_2 . i^* [\mathrm{Hilb}_c^3 V]$ *de* $Al^3\, \mathbf{P}^5$ (nombre de trisécantes à V coupant un plan fixe) *est*

$$\binom{n}{3} + 2t + (n-2)(\delta - d) .$$

Remarque. On trouve ainsi, par exemple, 0 pour la surface intersection complète de trois quadriques, ce qui est évident.

b) Cherchons maintenant *le nombre de tangentes à V recoupant V et un $\mathbf{P}^3$ fixé de $\mathbf{P}^5$*. C'est le degré $T(V)$ du 0-cycle

$$[\mathscr{D}] \,.\, \mathrm{Axe}^*\sigma_1 \,.\, i^* \,[\mathrm{Hilb}_c^3\, V]$$

où $\sigma_1 \in A^1(G(1, 5))$ est le cycle des droites coupant un $\mathbf{P}^3$ fixé et $\mathscr{D}$ l'hypersurface de $Al^3\, \mathbf{P}^5$ formée des triplets non simples.

Toujours d'après la proposition 11, ce nombre est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v)\,.$$

Comme en a), soit $\tilde{V}$ la réunion de V et P où P est un plan disjoint de V. On a $\mathrm{Hilb}_c^3\, \tilde{V}$ comme réunion disjointe de

$$\mathrm{Hilb}_c^3\, V\,, \quad \mathrm{Hilb}^2\, V \times P\,, \quad V \times \mathrm{Hilb}^2\, P\,, \quad \mathrm{Hilb}_c^3\, P\,.$$

Les contributions des première, troisième et quatrième composantes dans $T(V)$ sont, comme en a), respectivement: $T(V)$, 0 et $T(P) = a_1$.

Reste à trouver la contribution de la deuxième composante. Ce sont les tangentes à V coupant à la fois P et le $\mathbf{P}^3$ fixé. Mais dans $A^{\cdot}(G(1, 5))$, par la formule de Pieri, on a

$$\sigma_1 \,.\, \sigma_2 = (1, 5) + (2, 4)\,.$$

De sorte que cette contribution se décompose en

— les tangentes à V coupant une droite de $\mathbf{P}^5$: c'est le nombre ν de points-pince d'une projection sur un $\mathbf{P}^3$ par une droite de $\mathbf{P}^5$,

— les tangentes à la courbe $V \cap \mathbf{P}^4$ rencontrant un $\mathbf{P}^2$ fixé de ce $\mathbf{P}^4$: c'est la classe de cette courbe, donnée par $n(n-1) - 2d$ ([34], p. 190).

Les multiplicités sont 1 car P est choisi générique. Comme on a $\nu = 2d - 2\delta$ (Annexe 6), on trouve donc finalement la relation

$$T(\tilde{V}) = T(V) + a_1 + n(n-1) - 2\delta\,.$$

En l'écrivant explicitement, vu que (Annexe 5) $\tilde{n} = n + 1$, $\tilde{d} = d + n$, $\tilde{t} = t + d$, $\tilde{\delta} = \delta + n$, on obtient en identifiant les termes

— en δ: $u = -2$,

— en d: $\alpha + \beta = 0$,

— en n: $\begin{cases} -\gamma - v = a_2 - a_3 + 2 & (n = -1) \\ a_2 + 2\beta + \gamma + 2u + v = 0 & (n = 1)\,. \end{cases}$

Il reste donc à trouver quatre autres équations. Soit $S(a, b, c)$ l'intersection complète de trois hypersurfaces de degrés a, b, c. Les quatre surfaces suivantes de $\mathbf{P}^5$ n'ont pas de trisécante rencontrant un $\mathbf{P}^3$ fixé: $S(2, 2, 1)$, $S(2, 2, 2)$, la surface de Veronese et enfin la surface de del Pezzo S_5: c'est l'éclaté de $\mathbf{P}^2$

en quatre points, plongé dans $\mathbf{P}^5$ par le système linéaire des cubiques passant par ces quatre points; S_5 est intersection de quadriques et contient 10 droites de self-intersection -1.

Pour raison de degré, on a $T = 0$ pour ces quatre surfaces. D'où (par l'Annexe 6) quatre nouvelles équations.

Jointes aux quatre équations précédentes, on obtient un système inversible dont la solution est:

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ \beta = 12 \end{cases} \qquad a_2 = 4 \qquad a_3 = -18 \qquad \alpha = -12$$
$$\gamma = -36 \qquad u = -2 \qquad v = 12 .$$

On a donc montré le

THÉORÈME 4. *Soit V une surface de $\mathbf{P}^5$ d'invariants (n, d, t, δ). Alors le degré du 0-cycle*

$$[\mathscr{D}] . \mathrm{Axe}^*\sigma_1 . i^* [\mathrm{Hilb}_c^3 V]$$

(nombre de tangentes à V recoupant V et un $\mathbf{P}^3$ fixé) *est*

$$-n(3n^2-11n+2) + 12(d(n-3)-t) - 2\delta(n-6) .$$

c) Enfin, cherchons pour V dans $\mathbf{P}^5$ *le nombre de tangentes d'inflexion de* V. Pour définir précisément ce nombre, notons que dans $\mathrm{Hilb}^3 \mathbf{P}^1 \simeq \mathbf{P}^3$, les triplets de support un point forment une cubique gauche $\mathscr{T}_0$. (C'est le plongement de Veronese $I \mapsto I^3$ de $\mathrm{Hilb}^1 \mathbf{P}^1$ dans $\mathrm{Hilb}^3 \mathbf{P}^1$). On a donc une sous-fibration $\mathscr{T}$ de $Al^3 \mathbf{P}^5$ de fibre $\mathscr{T}_0$ et donc $[\mathscr{T}]$ est dans $A^2(G(1, 5))$.

On définit le nombre de tangentes d'inflexion de V comme le degré $T(V)$ du 0-cycle $[\mathscr{T}] . i^* [\mathrm{Hilb}_c^3 V]$ où comme d'habitude $i: Al^3 \mathbf{P}^5 \hookrightarrow \mathrm{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^5$ est l'injection canonique. D'après la proposition 11, $T(V)$ est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v) .$$

Comme précédemment, on regarde la surface $\tilde{V} = V \cup P$ où P est un plan disjoint. Un triplet de support un point est dans $\tilde{V}$ si et seulement si il est dans V ou dans P. Donc

$$T(\tilde{V}) = T(V) + a_1$$

car $T(P) = a_1$. En identifiant, comme en a) et b), il vient

$$\begin{cases} u = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 + 2\beta + \gamma + 2u + v = 0 & (n=1) \\ -\gamma - v = a_2 - a_3 & (n=-1) . \end{cases}$$

Reste à trouver quatre autres équations. Or on a démontré ([26], 4.d) qu'une droite isolée de V contribue dans $T(V)$ de $-3(2+l)$ où $l \in \mathbf{Z}$ est sa self-intersection. Les quatre surfaces $S(2, 2, 1)$, $S(2, 2, 2)$, Veronese et del Pezzo S_5 (vues en b) contiennent respectivement 16, 0, 0, 10 droites et elles sont de self-intersection -1. Comme ces quatre surfaces sont des intersections de quadriques dans $\mathbf{P}^5$, elles n'ont pas d'autre trisécante que les droites qu'elles contiennent; ainsi pour ces surfaces, T est égal respectivement à $-48, 0, 0, -30$. On obtient donc comme en b) quatre nouvelles équations. Jointes aux quatre précédentes, on obtient un système inversible dont la solution est

$$\begin{cases} a_1 = 18 & a_2 = -48 \\ \beta = -12 & \gamma = 84 \end{cases} \qquad a_3 = 24 \qquad \alpha = 12 \qquad u = 0 \qquad v = -12 .$$

On a donc démontré le

THÉORÈME 5. *Soit V une surface de $\mathbf{P}^5$ d'invariants (n, d, t, δ). Alors le degré du 0-cycle $[\mathscr{T}] . i^* [\mathrm{Hilb}_c^3 V]$* (nombre de tangentes d'inflexion de V) *est*

$$2n(2n^2-18n+25) + 12(t-\delta-d(n-7)) .$$

De plus, si V contient un nombre fini de droites, la « contribution » d'une droite de self-intersection l dans ce nombre est $-3(2+l)$.

V) TRISÉCANTES DANS $\mathbf{P}^N$, $N > 5$

Naturellement, seuls les cas $N = 6$ et $N = 7$ vont nous intéresser car au-delà, il n'y a génériquement plus de trisécante à une surface.

1°) RETOUR À $\mathbf{P}^5$

Nous allons voir qu'une formule trisécante pour une surface de $\mathbf{P}^N$, $N > 5$, est de la même forme qu'une formule trisécante pour une surface de $\mathbf{P}^5$. Précisément, on a la

PROPOSITION 12. *Soit $N = 6$ ou $N = 7$. Soit V une surface non-singulière de $\mathbf{P}^N$, n son degré, δ le nombre de points-doubles impropres apparents au-dessus d'un $\mathbf{P}^4$, d le degré de la courbe double apparente au-dessus d'un $\mathbf{P}^3$ et t son nombre de points-triples.*

Alors toute formule trisécante pour V *est, comme dans* $\mathbf{P}^5$, *de la forme*

$$T(V) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v)$$

où $a_1, a_2, a_3, \alpha, \beta, \gamma, u$ *et* v *sont des constantes.*

Preuve. Elle consiste à appliquer le théorème de Fulton-MacPherson comme on l'a déjà fait en (IV.1.b), pour se ramener à $\mathbf{P}^5$.

Soit en effet $\mathbf{P}^5$ fixé dans $\mathbf{P}^N$ et projetons génériquement V dans $\mathbf{P}^5$ (par un point si $N = 6$, par une droite si $N = 7$). La projection est un isomorphisme de V sur l'image, notée $\hat{V}$. Comme toujours (voir I.3.a), on a dans $\mathbf{P}^N \times \mathbf{C}$ un sous-schéma relatif $\mathscr{V}/\mathbf{C}$ (qui dans ce cas est isomorphe à un produit puisque $\hat{V}$ n'acquiert pas de singularité par projection) avec $\mathscr{V}_1 = V$ et $\mathscr{V}_0 = \hat{V}$.

On a donc dans $\mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^N \times \mathbf{C}$ un sous-schéma relatif $\mathrm{Hilb}_c^3\, \mathscr{V}/\mathbf{C}$ isomorphe à un produit, ayant pour fibre $\mathrm{Hilb}_c^3\, V$ en 1 et $\mathrm{Hilb}_c^3\, \hat{V}$ en 0. Ainsi $[\mathrm{Hilb}_c^3\, V]$ est rationnellement équivalent à $[\mathrm{Hilb}_c^3\, \hat{V}]$ dans $\mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^N$.

Soit K un cycle fixé de $A^{7-N}(Al^3\, \mathbf{P}^N)$. On a

$$\deg K \,.\, i^* \,[\mathrm{Hilb}_c^3\, V] = \deg K \,.\, i^* \,[\mathrm{Hilb}_c^3\, \hat{V}]$$

soit encore $T(V) = T(\hat{V})$. Regardons alors le diagramme commutatif où les flèches sont les injections canoniques et les dimensions sont indiquées entre parenthèses :

$$\begin{array}{ccccc}
(2N+1) & Al^3\, \mathbf{P}^N & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^N & (3N) \\
 & \uparrow j & & \uparrow u & \\
(11) & Al^3\, \mathbf{P}^5 & \overset{\hat{i}}{\hookrightarrow} & \mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^5 & (15)\ .
\end{array}$$

Bien entendu, schématiquement $Al^3\, \mathbf{P}^N \cap \mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^5 = Al^3\, \mathbf{P}^5$, comme le prouve le lemme 14 de l'Annexe 7. D'après le théorème de Fulton-MacPherson (voir II.2.a), leur intersection en tant que cycle peut être choisie à support dans $Al^3\, \mathbf{P}^5$.

Plus précisément, si $\alpha = [\mathrm{Hilb}_c^3\, \hat{V}]$, on a $i^* u_* \alpha = j_* C$ où

$$C = \beta \,.\, i^* \,[\mathrm{Hilb}_c^3\, \hat{V}]$$

avec β dans $A^{N-5}(Al^3\, \mathbf{P}^5)$. (Le $N-5$ étant la différence entre $3N + 11$ et $2N + 16$). Par suite, pour un cycle fixé K de $A^{7-N}(Al^3\, \mathbf{P}^N)$, il vient par la formule des projections :

$$\deg K \,.\, i^* \,[\mathrm{Hilb}_c^3\, \hat{V}] = \deg K \,.\, j_* C = \deg j^* K \,.\, C$$
$$= \deg j^* K \,.\, \beta \,.\, i^* \,[\mathrm{Hilb}_c^3\, \hat{V}] \,.$$

Mais comme $j^*K \,.\, \beta$ est un cycle fixé dans $A^2(Al^3\, \mathbf{P}^5)$, ce degré représente une formule trisécante pour $\hat{V}$ dans $\mathbf{P}^5$, par définition même (voir I.1). D'après la proposition 11, il est donc de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v)$$

puisque les invariants de $\hat{V}$ sont évidemment les mêmes que ceux de V. D'où la proposition 12.

2°) Trisécantes dans $\mathbf{P}^6$

a) Commençons par chercher pour une surface V de $\mathbf{P}^6$, *le nombre de trisécantes à V rencontrant un $\mathbf{P}^4$ fixé.* Ce nombre $T(V)$ est par définition le degré du 0-cycle $\mathrm{Axe}^*\sigma_1 \,.\, i^* \,[\mathrm{Hilb}_c^3\, V]$ où $i : Al^3\, \mathbf{P}^6 \hookrightarrow \mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^6$ est l'injection canonique et $\sigma_1 \in A^1(G(1, 6))$ est le cycle des droites coupant un $\mathbf{P}^4$ fixé de $\mathbf{P}^6$.

D'après la proposition 12, ce nombre est de la forme

$$T(V) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v) \,.$$

Soit $\tilde{V}$ la réunion de V et d'un plan P disjoint. On a (vu l'Annexe 5) les invariants de $\tilde{V}$:

$$\tilde{n} = n + 1 \,, \quad \tilde{d} = n + d \,, \quad \tilde{t} = t + d \,, \quad \tilde{\delta} = \delta + n \,.$$

D'autre part, $\mathrm{Hilb}_c^3\, \tilde{V}$ est formé des quatre composantes disjointes $\mathrm{Hilb}_c^3\, V$, $\mathrm{Hilb}^2\, V \times P$, $V \times \mathrm{Hilb}^2\, P$ et $\mathrm{Hilb}_c^3\, P$. La contribution de la première et la dernière dans $T(\tilde{V})$ est respectivement $T(V)$ et $T(P) = a_1$ (puisque $n = 1$, $d = t = \delta = 0$ pour P). La troisième a une contribution nulle, puisqu'un triplet aligné ayant deux points dans P est dans P, donc ne peut couper V.

Reste à trouver la contribution à $T(\tilde{V})$ de la deuxième composante $\mathrm{Hilb}^2\, V \times P$. Il s'agit des sécantes à V coupant P et un $\mathbf{P}^4$. Par la formule de Pieri, on a dans $A^{\cdot}(G(1, 6))$:

$$\sigma_1 \,.\, (2, 6) = (2, 5) + (1, 6) \,.$$

De sorte que, à équivalence rationnelle près, la contribution à $T(\tilde{V})$ de $\mathrm{Hilb}^2\, V \times P$ se décompose en

— les sécantes à V rencontrant une droite de $\mathbf{P}^6$,

— les sécantes à V dans un $\mathbf{P}^5$ fixé et y rencontrant un plan.

Dans le premier cas, leur nombre est δ puisqu'il s'agit du nombre de points-doubles d'une projection sur un $\mathbf{P}^4$ par une droite. Dans le deuxième cas, il s'agit du nombre de points-doubles de la courbe $V \cap \mathbf{P}^5$ projetée sur un $\mathbf{P}^2$ par un plan de $\mathbf{P}^5$. C'est donc d: le degré de la courbe double Γ de la surface V projetée sur un $\mathbf{P}^3$. Grâce à la généricité de P, les multiplicités sont bien 1. On a donc en conclusion:

$$T(\tilde{V}) = T(V) + \delta + d + a_1 .$$

Comme d'habitude, on trouve par identification (lemme 12) de

$$\delta : u = 1 ,$$

$$d : \alpha + \beta = 1 ,$$

$$n : \begin{cases} -\gamma - v = a_2 - a_3 & (n=-1) \\ a_2 + 2\beta + \gamma + 2u + v = 0 & (n=1) . \end{cases}$$

Il reste maintenant à trouver quatre autres équations. Si on désigne par $S(a, b, c, d)$ l'intersection complète de quatre hypersurfaces de degrés a, b, c, d dans $\mathbf{P}^6$, on voit que $S(2, 2, 1, 1)$, $S(2, 2, 2, 1)$ et $S(2, 2, 2, 2)$ n'ont pas de trisécante pour raison de degré. De plus, seule la première contient des droites, en nombre fini: 16. On a donc $T = 0$ pour ces trois surfaces puisqu'elles n'ont pas de trisécante rencontrant un $\mathbf{P}^4$ fixé.

De même, la surface de Veronese dans $\mathbf{P}^5$, plongée dans $\mathbf{P}^6$, n'a pas de trisécante car elle est intersection de quadriques dans $\mathbf{P}^5$ et elle ne contient pas de droite non plus. Pour elle aussi, $T = 0$. On obtient ainsi quatre nouvelles équations. Jointes aux précédentes, elles forment un système inversible dont la solution est

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ \beta = -3 \end{cases} \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = 4 \qquad \alpha = 4$$
$$\gamma = 8 \qquad u = 1 \qquad v = -4 .$$

On a donc démontré le

THÉORÈME 6. *Soit V une surface de $\mathbf{P}^6$ d'invariants (n, d, t, δ). Alors le degré du 0-cycle* $\mathrm{Axe}^*\sigma_1 . i^* [\mathrm{Hilb}_c^3 V]$ (nombre de trisécantes à V rencontrant un $\mathbf{P}^4$ fixé) *est*

$$4\binom{n}{3} - 2n + 4t - d(3n-8) + \delta(n-4) .$$

b) Cherchons maintenant, toujours pour une surface V de $\mathbf{P}^6$, *le nombre de tangentes à V recoupant V.* Cette fois, ce nombre $T(V)$ est le degré du 0-cycle $[\mathscr{D}] . i^* [\mathrm{Hilb}_c^3 V]$ où $\mathscr{D}$ est l'hypersurface de $Al^3 \mathbf{P}^6$ formée des triplets non simples.

Toujours d'après la proposition 12, ce nombre est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v) .$$

Soit $\tilde{V} = V \cup P$ où P est un plan disjoint de V, comme en a). La contribution de la composante $\mathrm{Hilb}^2 V \times P$ de $\mathrm{Hilb}_c^3 \tilde{V}$ dans $T(\tilde{V})$ est alors le nombre de tangentes à V coupant un plan fixe. C'est donc le nombre ν de points de ramification dans une projection générique sur un $\mathbf{P}^3$ par un plan de $\mathbf{P}^6$, correspondant aux ν points-pince de la surface projetée. Or on a (Annexe 6) $\nu = 2(d - \delta)$. D'où comme précédemment,

$$T(\tilde{V}) = T(V) + a_1 + 2(d - \delta) .$$

Comme en a), par identification grâce au lemme 12, on obtient quatre équations.

Maintenant, des quatre surfaces vues précédemment: $S(2, 2, 1, 1)$, $S(2, 2, 2, 1)$, $S(2, 2, 2, 2)$ et Veronese, les trois dernières ne contiennent pas de droite et n'ont pas de trisécante. On a donc $T = 0$ pour ces trois surfaces, d'où trois nouvelles équations. Par contre, $S(2, 2, 1, 1)$ contient 16 droites de self-intersection -1. Or on a montré ([26], 4.e) qu'une droite isolée dans V, de self-intersection $l \in \mathbf{Z}$, contribue de $4\binom{3+l}{2}$ dans le nombre $T(V)$. Pour $S(2, 2, 1, 1)$, on a donc $T = 64$. D'où une dernière équation.

Le système de huit équations ainsi obtenu est inversible et on trouve

$$\begin{cases} a_1 = -24 & a_2 = 72 & a_3 = -48 & \alpha = -24 \\ \beta = 26 & \gamma = -144 & u = -2 & v = 24 . \end{cases}$$

On a donc montré le

THÉORÈME 7. *Soit V une surface de $\mathbf{P}^6$ d'invariants (n, d, t, δ). Alors le degré du 0-cycle $[\mathscr{D}] . i^* [\mathrm{Hilb}_c^3 V]$* (nombre de tangentes à V recoupant V) *est:*

$$-4n(2n^2 - 15n + 19) - 24t + 2d(13n - 72) - 2\delta(n - 12) .$$

De plus, si V contient un nombre fini de droites, la « contribution » d'une droite de self-intersection $l \in \mathbf{Z}$ dans ce nombre est $4\binom{3+l}{2}$.

3°) TRISÉCANTES DANS $\mathbf{P}^7$

Dans ce cas, il n'y a qu'une formule à chercher, car *en général il n'y a qu'un nombre fini de trisécantes* pour une surface V de $\mathbf{P}^7$. Nous nous intéressons donc au degré $T(V)$ du 0-cycle i^* [$\mathrm{Hilb}_c^3\, V$] où comme d'habitude $i\colon Al^3\, \mathbf{P}^7 \hookrightarrow \mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^7$ est l'injection canonique. D'après la proposition 12, ce degré est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v)\,.$$

Comme dans le cas de $\mathbf{P}^6$ (paragraphe 2), soit $\tilde{V}$ la réunion de V et d'un plan P disjoint. Pour les mêmes raisons que précédemment, on a

$$T(\tilde{V}) = T(V) + a_1 + \delta\,.$$

En effet, δ est la contribution de la composante $\mathrm{Hilb}^2\, V \times P$ de $\mathrm{Hilb}_c^3\, \tilde{V}$ dans $T(\tilde{V})$: c'est le nombre de sécantes à V rencontrant un plan P, soit le nombre de points-doubles δ de la projection de V sur un $\mathbf{P}^4$. (Les multiplicités sont 1 car P est générique).

Il vient alors une identité entre n, d, t, δ puisqu'on connaît (lemme 13) les invariants de V. Grâce au lemme 12, par identification, on obtient quatre équations liant les coefficients $a_1, a_2 \ldots v$. Il reste à trouver quatre autres équations. Soit $S(a, b, c, d, e)$ l'intersection complète de cinq hypersurfaces de degrés a, b, c, d, e dans $\mathbf{P}^7$. Aucune des quatre surfaces suivantes n'a de trisécante dans $\mathbf{P}^7$, pour raison de degré, et aucune ne contient de droite: $S(2, 2, 2, 1, 1)$, $S(2, 2, 2, 2, 1)$, $S(2, 2, 2, 2, 2)$ et la surface de Veronese (plongée dans $\mathbf{P}^7$). On a donc $T = 0$ pour ces quatre surfaces, d'où (puisqu'on connaît leurs invariants) quatre autres équations.

Jointes aux quatre équations précédentes, on obtient un système inversible dont la solution est

$$\begin{cases} a_1 = 5 & a_2 = -18 \qquad a_3 = 14 \qquad \alpha = 8 \\ \beta = -8 & \gamma = 40 \qquad u = 1 \qquad v = -8\,. \end{cases}$$

Par ailleurs, on a vu ([26], 4.f) qu'une droite isolée de V, de self-intersection $l \in \mathbf{Z}$, contribue de $-\binom{4+l}{3}$ dans le nombre $T(V)$.

On a donc dénombré le

THÉORÈME 8. *Soit V une surface de $\mathbf{P}^7$ d'invariants (n, d, t, δ). Alors le degré du 0-cycle i^* [$\mathrm{Hilb}_c^3\, V$] (nombre de trisécantes à V) est*

$$5n - 18\binom{n}{2} + 14\binom{n}{3} + 8t - 8d(n-5) + \delta(n-8).$$

Si de plus V contient un nombre fini de droites, la « contribution » d'une telle droite de self-intersection $l \in \mathbf{Z}$ à ce nombre est $-\binom{4+l}{3}$.

Remarque. On peut par exemple vérifier que la surface $S(2, 2, 2, 2, 3)$ de $\mathbf{P}^7$ possède 512 trisécantes, ce que donne un calcul direct dans la grassmannienne $G(1, 7)$.

VI) Annexe

Nous avons regroupé dans cette annexe tous les calculs auxiliaires qui auraient alourdi le cours du texte. Il s'agira la plupart du temps de calculs en coordonnées locales.

1°) $\mathrm{Hilb}_c^k Q$

Ce paragraphe sert à étudier $\mathrm{Hilb}_c^3 S$ lorsque $S \subset \mathbf{P}^4$ est une surface dont les singularités sont *ordinaires*, i.e. localement réunion de deux branches lisses transverses. (Voir I.2.a.)

Soit Q dans $\mathbf{C}^4$ la réunion de deux plans P_1 et P_2 se coupant en l'origine.

Lemme 9. a) *Tout k-uplet curviligne ξ_0 de support $\{0\}$ contenu dans Q est limite dans $(\mathrm{Hilb}_c^k Q)_{\mathrm{red}}$ de k-uplets formés de points distincts. En particulier $\mathrm{Hilb}_c^k Q$ est génériquement réduit car $\mathrm{Hilb}_{\neq}^k Q$ est dense (et réduit).*

b) $\mathrm{Hilb}_c^k Q$ *est en fait réduit.*

Preuve. Soit (x, y, z, u) un système de coordonnées pour lequel P_1 est donné par $x = y = 0$ et P_2 par $z = u = 0$. De sorte que l'idéal de Q est

$$J = (x, y) \cap (z, u) = (xz, yz, xu, yu).$$

Montrons a). Soit ξ_0 dans Q un k-uplet curviligne avec $\mathrm{Supp}\,\xi_0 = \{0\}$. Mais ξ_0 est contenu dans une courbe non-singulière Γ. Celle-ci est « transverse » soit à P_1 soit à P_2; supposons Γ transverse à P_1; quitte à faire une transformation linéaire sur x et y, Γ peut être paramétrée par

$$y = \alpha(x), \qquad z = \beta(x), \qquad u = \gamma(x),$$

où α, β, γ sont dans l'idéal maximal de $\mathbf{C}[[x]]$. L'idéal de ξ_0 dans $\mathbf{C}[[x, y, z, u]]$ est donc

$$I_0 = (x^k, y-\alpha(x), z-\beta(x), u-\gamma(x)).$$

Comme on a l'inclusion $\xi_0 \subset Q$, soit encore $I_0 \supset J$, il vient $x\beta(x)$ et $x\gamma(x)$ multiples de x^k. En supprimant par ailleurs les termes de degré supérieur à k, l'idéal se réécrit:

$$I_0 = (x^k, y-A(x), z-\beta_0 x^{k-1}, u-\gamma_0 x^{k-1})$$

où A est un polynôme de degré $\leqslant k-1$, nul en 0.

Considérons pour $t \neq 0$ l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^4}$ défini par

$$I_t = (x(x^{k-1}-t^{k-1}), y-A(x), z-\beta_0(x^{k-1}-t^{k-1}), u-\gamma_0(x^{k-1}-t^{k-1})).$$

C'est l'idéal de la réunion du point simple de coordonnées $(0, 0, -\beta_0 t^{k-1}, -\gamma_0 t^{k-1})$ dans P_1 et de $k-1$ points simples distincts (et distincts du précédent) dans P_2 car $z = u = 0$ pour ces points-là.

Clairement $I_t \to I_0$ si $t \to 0$, d'où l'assertion a).

Montrons b). On se ramène comme toujours à Supp $\xi_0 = \{0\}$. Une carte de $\mathrm{Hilb}^k\, \mathbf{C}^4$ en I_0 est donnée par

$$(a_1, \dots a_k, a'_1, \dots a'_k, b_1, \dots b_k, c_1, \dots c_k)$$

correspondant à l'idéal

$$\begin{aligned} I = (&x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k, y-A(x) + a'_1 x^{k-1} + \dots + a'_k, \\ &z-\beta_0 x^{k-1} + b_1 x^{k-1} + \dots + b_k, u-\gamma_0 x^{k-1} + c_1 x^{k-1} + \dots + c_k) \end{aligned}$$

voisin de

$$I_0 = (x^k, y-A(x), z-\beta_0 x^{k-1}, u-\gamma_0 x^{k-1}).$$

Comment s'exprime $\mathrm{Hilb}^k_c\, Q$ dans cette carte? D'après [8], on doit exprimer l'inclusion $I \supset J$, où J est l'idéal de Q, ce qui revient à:

$$\begin{cases} xz \in I \Leftrightarrow (b_1-\beta_0)x^k + b_2 x^{k-1} + \dots + b_k x \in I \\ xu \in I \Leftrightarrow (c_1-\gamma_0)x^k + c_2 x^{k-1} + \dots + c_k x \in I \\ yz \in I \Leftrightarrow a'_k z \in I \Leftrightarrow a'_k(b_1-\beta_0)x^{k-1} + a'_k b_2 x^{k-2} + \dots + a'_k b_k \in I \\ yu \in I \Leftrightarrow a'_k u \in I \Leftrightarrow a'_k(c_1-\gamma_0)x^{k-1} + a'_k c_2 x^{k-2} + \dots + a'_k c_k \in I. \end{cases}$$

Ceci donne les relations

$$\begin{cases} b_2 = (b_1-\beta_0)a_1 \\ b_3 = (b_1-\beta_0)a_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_k = (b_1-\beta_0)a_{k-1} \\ 0 = (b_1-\beta_0)a_k \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 = (c_1-\gamma_0)a_1 \\ c_3 = (c_1-\gamma_0)a_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_k = (c_1-\gamma_0)a_{k-1} \\ 0 = (c_1-\gamma_0)a_k \end{cases}$$

ainsi que

$$\begin{cases} a'_k(b_1-\beta_0) = a'_k b_2 = \dots = a'_k b_k = 0 \\ a'(c_1-\gamma_0) = a'_k c_2 = \dots = a'_k c_k = 0 \end{cases}.$$

En remplaçant $b_2, b_3, \dots b_k$ et $c_2, c_3, \dots c_k$ par leurs valeurs (ce qui correspond à considérer un graphe), il ne reste que l'idéal

$$(a_k(b_1-\beta_0), a'_k(b_1-\beta_0), a_k(c_1-\gamma_0), a'_k(c_1-\gamma_0)).$$

Cet idéal de $\mathbf{C}[a_k, a'_k, c_1, b_1]$ est réduit, que β_0 et γ_0 soient nuls ou non. Donc $\mathrm{Hilb}^k_c\, Q$ est réduit.

2°) $\mathrm{Hilb}_c^k\,\Theta_0$ et $\mathrm{Hilb}_c^k\,\Pi_0$

Ce paragraphe est utile pour la proposition 2 (voir I.2.c.)

Nous définissons deux schémas relatifs $\Theta/\mathbf{C}$ et $\Pi/\mathbf{C}$ comme sous-schémas relatifs de $\mathbf{C}^3 \times \mathbf{C}$ (rapporté aux coordonnées (x, y, z, t)) par les idéaux

$$I(\Theta) = (xyz-t) \quad \text{et} \quad I(\Pi) = (y^2-x^2z-t)\,.$$

Les schémas $\Theta/\mathbf{C}^*$ et $\Pi/\mathbf{C}^*$ sont lisses tandis que les fibres Θ_0 et Π_0 sont respectivement la réunion des trois plans de coordonnées de $\mathbf{C}^3$ ainsi que la surface appelée « parapluie de Whitney ».

LEMME 10. a) $\mathrm{Hilb}_{\neq}^k\,\Theta_0$ *est dense dans* $\mathrm{Hilb}_c^k\,\Theta_0$. *En particulier* $\mathrm{Hilb}_c^k\,\Theta_0$ *est génériquement réduit.*

b) *Tout k-uplet curviligne contenu dans* Θ_0 *est limite de k-uplets curvilignes contenus dans* Θ_t *avec* $t \neq 0$.

Preuve. Soit ξ_0 un k-uplet curviligne dans Θ_0. On se ramène comme toujours au cas où $\mathrm{Supp}\,\xi_0$ est un point.

Regardons le cas où $\mathrm{Supp}\,\xi_0 = \{0\}$. Comme ξ_0 est par hypothèse situé sur une courbe non-singulière Γ, quitte à faire une permutation entre x, y et z, une paramétration en 0 de Γ est

$$y = \alpha(x) \qquad z = \beta(x)$$

où α et β sont dans l'idéal maximal de $\mathbf{C}\,[[x]]$. L'idéal I_0 de ξ_0 dans $\mathbf{C}\,[[x, y, z]]$ est donc $(x^k, y-\alpha(x), z-\beta(x))$. On peut encore l'écrire

$$I_0 = (x^k, y-A(x), z-B(x))$$

où A et B sont des polynômes des degrés $\leqslant k-1$, en éliminant les multiples de x^k. Notons a (resp. b) la valuation en 0 de A (resp. B). On a bien sûr $a \leqslant k-1$ et $b \leqslant k-1$.

Comme on doit avoir l'inclusion $I_0 \supset I(\Theta_0) = (xyz)$, puisque $\xi_0 \subset \Theta_0$, cela entraîne $xA(x)B(x) \in I_0$, soit $1+a+b \geqslant k$ (ce qui est toujours vérifié si $k = 3$). Soit b_1 l'entier positif tel que $1+a+b_1 = k$.

Montrons a). Soit $A(x) = x^a A_1(x)$, $B(x) = x^{b_1} B_1(x)$ où A_1 et B_1 sont deux polynômes. Pour $s \neq 0$ dans $\mathbf{C}$, notons I_s l'idéal de $C\,[x, y, z]$ donné par:

$$I_s = \left(x(x^a-(2s)^a)\,(x^{b_1}-s^{b_1}),\ y-(x^a-(2s)^a)\,A_1(x),\ z-(x^{b_1}-s^{b_1})B_1(x)\right).$$

C'est l'idéal de la réunion de k points simples situés chacun sur au moins l'un des trois plans de coordonnées de $\mathbf{C}^3$.

De plus, $I_s \to I_0$ dans $\mathrm{Hilb}^k\,\mathbf{C}^3$ si $s \to 0$ dans $\mathbf{C}$. D'où l'assertion a), car les cas où $\mathrm{Supp}\,\xi_0$ est situé sur l'un des axes de coordonnées ou même à l'intérieur d'un des plans de coordonnées sont beaucoup plus simples; on ne les traitera pas.

Montrons b). Il est facile de voir qu'un point simple quelconque de Θ_0 est limite d'un point simple de Θ_t avec $t \neq 0$. Ceci prouve l'inclusion

$$\mathrm{Hilb}_{\neq}^k\,\Theta_0 \subset \mathrm{Hilb}_{\neq}^k\,\Theta/\mathbf{C}^*\,,$$

la barre désignant l'adhérence dans $\mathrm{Hilb}_c^k\,\mathbf{C}^3$. A fortiori, on a $\overline{\mathrm{Hilb}_{\neq}^k\,\Theta_0}$

$\subset \overline{\mathrm{Hilb}^k_{\neq}\, \Theta/\mathbf{C}^*}$. Mais d'après a), on a $\mathrm{Hilb}^k_c\, \Theta_0$ contenu dans $\overline{\mathrm{Hilb}^k_{\neq}\, \Theta_0}$; il en résulte donc l'inclusion

$$\mathrm{Hilb}^k_c\, \Theta_0 \subset \overline{\mathrm{Hilb}^k_{\neq}\, \Theta/\mathbf{C}^*}$$

ce qu'on cherchait à prouver. Le lemme 10 est donc démontré.

Montrons maintenant le

LEMME 11. a) $\mathrm{Hilb}^k_{\neq}\, \Pi_0$ *est dense dans* $\mathrm{Hilb}^k_c\, \Pi_0$. *En particulier* $\mathrm{Hilb}^k_c\, \Pi_0$ *est génériquement réduit.*

b) *Tout k-uplet curviligne dans* Π_0 *est limite de k-uplets curvilignes dans* Π_t *avec* $t \neq 0$.

Preuve.

Montrons a). L'assertion est claire pour $k = 1$ et facile pour $k = 2$. Soit donc $k \geqslant 3$ et montrons par récurrence sur k que $\mathrm{Hilb}^k_{\neq}\, \Pi_0$ est dense dans $\mathrm{Hilb}^k_c\, \Pi_0$.

Soit ξ_0 un k-uplet curviligne situé dans Π_0; on se ramène comme d'habitude à $\mathrm{Supp}\, \xi_0$ formé d'un seul point. Comme dans le lemme 10, seul le cas $\mathrm{Supp}\, \xi_0 = \{0\}$ est délicat et on s'y place donc.

i) Puisque ξ_0 est situé sur une courbe non-singulière Γ, *supposons-la dans un premier temps transverse au plan Oxy.* L'idéal I_0 de ξ_0 est alors

$$I_0 = \big(z^k, y-A(z), x-B(z)\big)$$

où A et B sont des polynômes de degré $\leqslant k-1$, nuls en 0, comme on l'a vu de manière analogue dans le lemme 10. Puisque $I_0 \supset I(\Pi_0)$ vu que $\xi_0 \subset \Pi_0$, et comme $I(\Pi_0) = (y^2-x^2z)$, on a nécessairement $A^2(z) - B^2(z).z \in I_0$. Ceci entraîne

$$A^2(z) - B^2(z).z \text{ multiple de } z^k$$

et par suite $\mathrm{val}(A) \geqslant 2$ car $k \geqslant 3$. On écrit donc

$$I_0 = \big(z^k, y-z^2A_1(z), x-zB_1(z)\big)$$

où A_1 et B_1 sont deux polynômes vérifiant:

$$(*) \qquad z^4A_1^2(z) - z^2B_1^2(z).z \quad \text{multiple de } z^k.$$

Posons pour $s \neq 0$:

$$I_s = \big(z^{k-2}(z-s)^2\,,\ y-z(z-s)A_1(z)\,,\ x-(z-s)B_1(z)\big).$$

On a bien sûr $I_s \supset I(\Pi_0)$ car vu $(*)$, le polynôme

$$z^2(z-s)^2A_1^2(z) - (z-s)^2B_1^2(z).z \quad \text{est multiple de } z^{k-2}(z-s)^2.$$

L'idéal I_s correspond à un k-uplet dans Π_0 formé d'un doublet sur l'axe des z et d'un $(k-2)$-uplet disjoint, de support le point de coordonnées $(-sB_1(0), 0, 0)$. De plus, $I_s \to I_0$ lorsque $s \to 0$.

Mais chacun de ce doublet et de ce $(k-2)$-uplet est lui-même limite respectivement de 2 et $k-2$ points simples dans Π_0, par l'hypothèse de récurrence. Ainsi ξ_0 est limite de k points simples comme on le voulait.

ii) Si maintenant ξ_0 est situé sur une courbe non-singulière Γ *tangente au plan Oxy*, cette courbe est nécessairement tangente à l'axe des x (sinon comme ξ_0 est dans $\Gamma \cap \Pi_0$, on aurait $k = \mathrm{long}\, \xi_0 \leqslant 2$). On peut donc prendre comme idéal de ξ_0:

$$I_0 = \left(x^k, y-x^2A_1(x)\,,\ z-x^2B_1(x)\right)$$

où A_1 et B_1 sont des polynômes. Comme $I_0 \supset I(\Pi_0) = (y^2-x^2z)$, on a donc

$$(**) \qquad x^4A_1^2 - x^4B_1 \quad \text{multiple de } x^k\,.$$

Posons pour $s \neq 0$:

$$I_s = \left(x^{k-2}(x-s)^2\,,\ y-x(x-s)A_1(x)\,,\ z-(x-s)^2B_1(x)\right).$$

On a $I_s \supset I(\Pi_0)$ car vu $(**)$, le polynôme $x^2(x-s)^2(A_1^2-B_1)$ est multiple de $x^{k-2}(x-s)^2$. On conclut comme en i).

Montrons b). Preuve analogue au b) du lemme 10.

3°) Modèles locaux pour Σ_0

Il s'agit de prouver les propositions 3 et 4 énoncées en I.3 et qui donnent la structure nilpotente du schéma Σ_0. On en reprend donc les notations.

Soit $S \subset \mathbf{P}^4$ une surface à singularités ordinaires.

a) Commençons par étudier le schéma Σ_0 au voisinage d'un point triple M de S'. Au point M correspondent trois points a, b, c de S se projetant en $M \in S'$ sur H, par ω. Soit (x, y, z, u) un système de coordonnées inhomogènes de $\mathbf{P}^4$ pour lequel H est l'hyperplan $u = 0$ et ω le point à l'infini sur l'axe des u. On peut prendre $M = (0, 0, 0, 0)$ et $a = (0, 0, 0, u_1)$, $b = (0, 0, 0, u_2)$, $c = (0, 0, 0, u_3)$ avec *les* u_i *distincts.*

On peut également choisir les coordonnées de telle sorte que les trois plans tangents à S' en M (correspondants à a, b, c) soient donnés par les équations

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ u = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0 \\ u = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, des équations locales de S en a, b et c sont:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(y, z) \\ u = \psi_1(y, z) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \varphi_2(x, z) \\ u = \psi_2(x, z) \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \varphi_3(x, y) \\ u = \psi_3(x, y) \end{cases}$$

avec $\varphi_i, \psi_i \in \mathbf{C}\left[[S, T]\right]$, val $\varphi_i \geqslant 2$ et $\psi_i(0) = u_i$. Comme dans [23], p. 173, l'idéal du schéma Σ est alors

$$(x-\varphi_1\,, u-\lambda\psi_1) \cap (y-\varphi_2\,, u-\lambda\psi_2) \cap (z-\varphi_3\,, u-\lambda\psi_3)\,.$$

Effectuons le changement de coordonnées (au voisinage de 0);

$$X = x - \varphi_1\,, \quad Y = y - \varphi_2\,, \quad Z = z - \varphi_3\,, \quad U = u\,.$$

On arrive à l'idéal

$$J = (X, U-\lambda\theta_1) \cap (Y, U-\lambda\theta_2) \cap (Z, U-\lambda\theta_3)$$

où $\theta_i \in \mathbf{C}\left[[X, Y, Z, U]\right]$. L'idéal J est bien sûr aussi le *produit* de ces trois idéaux, car X, Y, Z et U sont des coordonnées.

Pour $\lambda = 0$, l'idéal de la fibre est

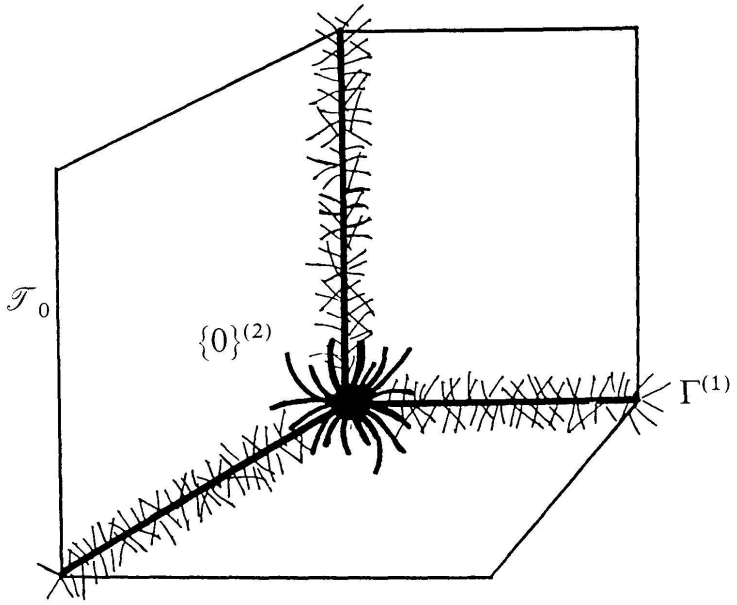
$$(X, U) \cap (Y, U) \cap (Z, U)\,.$$

Cet idéal est celui du schéma $\mathscr{T}_0$ étudié en [24] (p. 125). On a un isomorphisme de germes :

$$(\Sigma_0, P) \simeq (\mathscr{T}_0, 0).$$

Or on a vu (*loc. cit.* p. 126) l'égalité de schémas :

$$\mathscr{T}_0 = (\mathscr{T}_0)_{\mathrm{red}} \cup \Gamma^{(1)} \cup \{0\}^{(2)}.$$



Les traits courts représentent des doublets et les traits longs des triplets, cela *dans* $\mathbf{C}^4$.

Ceci prouve déjà la proposition 3 au voisinage d'un point triple. De même, les assertions 4 i) et 4 iii) de la proposition 4 sont prouvées puisqu'on les a vues pour $\mathscr{T}_0$ (*loc. cit.* prop. 5 et 7).

Enfin, prouvons l'assertion 4 ii), toujours au voisinage d'un point triple. On se ramène comme en *loc. cit.* p. 130, à considérer le triplet curviligne ξ_0 d'idéal

$$I_0 = \big(U^3, X + U\alpha(U), Y + U\beta(U), Z + U\gamma(U)\big)$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}\,[[U]]$. On le déforme alors en l'idéal

$$I_\lambda = \big((U-\lambda\theta_1)(U-\lambda\theta_2)(U-\lambda\theta_3), X+(U-\lambda\theta_1)\alpha(U),$$
$$Y+(U-\lambda\theta_2)\beta(U), Z+(U-\lambda\theta_3)\gamma(U)\big)$$

qui contient l'idéal J ; pour $\lambda \neq 0$, cet idéal correspond à la réunion de trois points simples (car les $\theta_i(0)$ sont distincts), chacun sur une des branches de Σ_λ. De plus $I_\lambda \to I_0$ si $\lambda \to 0$ (la déformation étant plate). L'assertion ii) de la proposition 4 est ainsi prouvée.

b) Cette fois-ci, P est un point-pince de S', provenant par la projection sur l'hyperplan H, du point $a \in S$. Nous allons étudier Σ_0 au voisinage de P.

Soit (x, y, z, u) des coordonnées inhomogènes de $\mathbf{P}^4$ pour lesquelles $P = (0, 0, 0, 0)$, $a = (0, 0, 0, 1)$, le point ω par lequel on projette étant le point à l'infini sur l'axe des u.

D'après Mather ([31], prop. 2), on peut choisir la projection π de S sur l'hyperplan H de sorte que π soit *localement stable*. Le fait que π soit localement stable

en a montre ([31] p. 179) que pour certains systèmes de coordonnées locales (s, t) de S en a et (X, Y, Z) de H en P, le morphisme π est donné par

$$(*) \qquad \pi : (s, t) \mapsto (s, st, t^2) .$$

Considérons alors le nouveau système de coordonnées (X, Y, Z, u) dans un voisinage de l'axe des u de $\mathbf{P}^4$ et soit

$$\big(X(s, t), Y(s, t), Z(s, t), u(s, t)\big)$$

les coordonnées d'un point de S. Par définition de la projection π sur H, par $(*)$, on a

$$X(s, t) = s , \quad Y(s, t) = st , \quad Z(s, t) = t^2 .$$

Ecrivons par ailleurs $u(s, t) = 1 + \varphi(s, t)$ avec φ dans l'idéal maximal de $\mathbf{C}\,[[s, t]]$. Comme S est non singulière en a, on a nécessairement $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(0) \neq 0$.

Ainsi une représentation paramétrique locale de S en a est-elle:

$$X = X , \quad Y = Xt , \quad Z = t^2 , \quad u = 1 + \varphi(X, t) .$$

Si l'on écrit

$$\varphi(X, t) = t\alpha(X, t) + \beta(X, t)$$

où α et β (dans l'idéal maximal de $\mathbf{C}\,[[X, t]]$) ne contiennent que des puissances *paires* de t, il vient aussi la représentation paramétrique de S au voisinage de a:

$$X = X , \quad Y = Xt , \quad Z = t^2 , \quad u = 1 + t\alpha'(X, Z) + \beta'(X, Z)$$

où $\alpha', \beta' \in \mathbf{C}\,[[X, Z]]$. Enfin, si l'on écrit

$$\alpha'(X, Z) = \alpha_0(Z) + X\alpha''(X, Z)$$

avec $\alpha_0(0) \neq 0$ car $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(0) \neq 0$, on a également la représentation paramétrique:

$$X = X , \quad Y = Xt , \quad Z = t^2 , \quad u = 1 + t\alpha_0(Z) + Y\alpha''(X, Z) + \beta'(X, Z) .$$

De I.3.a, il ressort que $\Sigma/\mathbf{C}^*$ est le schéma donné dans $\mathbf{C}^4 \times \mathbf{C}^*$ (de coordonnées (X, Y, Z, u, λ) avec $\lambda \neq 0$) par la représentation paramétrique, au voisinage de l'axe des u:

$$Y = Xt , \quad Z = t^2 , \quad u = \lambda\big(1 + t\alpha_0(Z) + Y\alpha''(X, Z) + \beta'(X, Z)\big)$$

et $X = X, \lambda = \lambda$.

Effectuons le nouveau changement de coordonnées

$$U = \frac{1}{\alpha_0(Z)}\big(u - \lambda - \lambda Y\alpha''(X, Z) - \lambda\beta'(X, Z)\big) \qquad (\text{on a } \alpha_0(0) \neq 0)$$

et $X = X$, $Y = Y$, $Z = Z$, $\lambda = \lambda$ dans $\mathbf{C}\,[[X, Y, Z, u, \lambda]]$.

Dans ce dernier système, on a $U = \lambda t$ d'où la représentation paramétrique de $\Sigma/\mathbf{C}^*$:

$$X = X , \quad Y = \frac{XU}{\lambda} , \quad Z = \frac{U^2}{\lambda^2} , \quad U = U , \quad \lambda = \lambda .$$

Il est alors aisé de voir que l'adhérence dans $\mathbf{C}^4 \times \mathbf{C}$ a pour idéal:

$$J = (Y^2 - X^2Z, XU - \lambda Y, U^2 - \lambda^2 Z, YU - \lambda XZ).$$

Ces équations sont en effet nécessaires; réciproquement, nous voyons qu'un point (X_0, Y_0, Z_0, U_0) de la fibre en 0 (donc vérifiant $Y_0^2 - X_0Z_0 = 0$ et $U_0 = 0$) est limite de points dans des fibres au-dessus de $\lambda \neq 0$. On remarque pour cela que

si $X_0 \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{\lambda \to 0} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ \lambda Y_0/X_0 \end{pmatrix}$$

si $X_0 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{\lambda \to 0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_0 \\ \lambda r_0 \end{pmatrix}$$

où r_0 est une racine de Z_0.

Ce qui précède montre l'isomorphisme, au-dessus de $\mathbf{C}$, entre les schémas relatifs $\Sigma/\mathbf{C}$ et $\mathscr{P}/\mathbf{C}$, le schéma $\mathscr{P}$ ayant été introduit en [24], p. 131. La proposition 3 et les assertions i) et ii) de la proposition 4 sont donc prouvées au voisinage d'un point-pince, puisqu'on a démontré l'analogue pour les schémas $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}_0$ (*loc. cit.* prop. 9 et 10).

Il reste à montrer l'assertion iii) de la proposition 4. Soit donc d_0 un doublet transverse à $H = \{u = 0\}$, contenu dans $\mathscr{P}_0$. Son idéal est

$$I_0 = (u^2, x - \alpha u, y - \beta u, z - \gamma u),$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$. Une carte de $\mathrm{Hilb}^2\, \mathbf{C}^4$ en d_0 est alors donnée par

$$(a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3)$$

correspondant à l'idéal voisin:

$$I = (u^2 + au + b, x - \alpha u + a_1 u + b_1, y - \beta u + a_2 u + b_2, z - \gamma u + a_3 u + b_3).$$

Dire que le doublet est contenu dans $\mathscr{P}_0$ revient à affirmer l'inclusion $I \supset J$. Or $u^2 \in I$ équivaut à $a = b = 0$. On en déduit $b_1 = b_2 = 0$. Réciproquement, si $a = b = b_1 = b_2 = 0$, on a $J \subset I$. Il se trouve qu'on a alors obtenu des équations du *sous-schéma* $\mathrm{Hilb}^2\, \mathscr{P}_0$ dans $\mathrm{Hilb}^2\, \mathbf{C}^4$. (Voir [24], p. 124 et 131). Ainsi $\mathrm{Hilb}^2\, \mathscr{P}_0$ est lisse, donc réduit.

c) Etudions maintenant Σ_0 au voisinage de la courbe double Γ de S'. On se convainc facilement que $\Sigma/\mathbf{C}$ est isomorphe au produit $\mathbf{C} \times (\mathscr{X}/\mathbf{C})$ où $\mathscr{X}$ est le schéma relatif introduit en [24], p. 121 et qui servait de modèle local pour l'étude des multisécantes aux courbes. Les assertions analogues se transportent donc mutatis mutandis, le facteur $\mathbf{C}$ supplémentaire ne jouant que peu de rôle. (Voir *loc. cit.* propositions 2, 3 et 4.)

D'après a), b) et c) qui précèdent, nous avons donc démontré complètement les propositions 3 et 4 énoncées en I.3.b.

4°) Les lemmes 7 et 8

a) Prouvons le lemme 7 énoncé en II.2.c.

Soit ξ_0 un triplet $d_0 \cup m_0$ où d_0 est un doublet de support un point de la courbe double Γ et m_0 un point de S' situé sur $\mathrm{Axe}\, d_0$. Si $\mathrm{Supp}\, d_0 = \{0\}$, soit

(x, y, z, u) un système de coordonnées inhomogènes centré en 0; on peut choisir l'axe des z tangent à Γ en 0 et $m_0 = (1, 1, 0, 0)$ dans ce système. De sorte que l'idéal de d_0 dans $\mathbf{C}[x, y, z, u]$ est $(x^2, y-x, z, u)$. Une carte de $\mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^4$ en $\xi_0 = d_0 \cup m_0$ est alors donnée par d'une part les coefficients de l'idéal voisin

$$(x^2+ax+b,\ y-x+a_1x+b_1,\ z+a_2x+b_2,\ u+a_3x+b_3)$$

pour un doublet d voisin de d_0 et d'autre part par

$$(1+\alpha,\ 1+\beta,\ \gamma,\ \delta)$$

pour un point simple m voisin de m_0.

Dans cette carte, $Al^3\, \mathbf{P}^4$ s'exprime très simplement: on doit avoir $m \in \mathrm{Axe}\, d$, soit

$$\beta - \alpha + a_1(1+\alpha) + b_1 = \gamma + a_2(1+\alpha) + b_2 = \delta + a_3(1+\alpha) + b_3 = 0\,.$$

Par ailleurs, pour exprimer S_{21}, on doit avoir:

— la condition que Axe d rencontre Γ. Un calcul élémentaire (par exemple [29], p. 252, prop. 20.b) montre que l'application linéaire *tangente* à cette condition s'obtient en demandant à Axe d de rencontrer la *tangente* en 0 à Γ, soit (puisqu'ici c'est l'axe des z): $b_1 = b_2 = b_3 = 0$;

— de plus, d doit être un point-double, soit la condition d'annulation du discriminant $a^2 - 4b = 0$;

— enfin, le point m doit être sur S'; écrivons $\varphi(x-1, y-1, z) = 0$ (avec $\partial_0\varphi \neq 0$) une équation locale de S' en $m_0 = (1, 1, 0)$ dans $\mathbf{P}^3$ et soit donc

$$\varphi(x-1, y-1, z) = u = 0$$

les équations de S' dans $\mathbf{P}^4$. Dire que le point m est sur S' s'exprime ainsi par $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \delta = 0$.

On vérifie rapidement que les équations linéaires tangentes à ces 9 équations sont indépendantes et ceci prouve le lemme 7.

b) Prouvons maintenant le lemme 8 énoncé en IV.1.c.

Soit m un point générique de V' tel que la droite $\overline{Nm}$ ne soit pas tangente à V' en m et que le plan T_mV' soit transverse à P et Q, où P et Q désignent les deux plans tangents aux deux composantes de V' en N. Après choix d'un hyperplan à l'infini de $\mathbf{P}^5$, soit (x, y, z, u, v) un système inhomogène centré en N tel que l'hyperplan $\mathbf{P}^4$ contenant V' soit donné par $\{v=0\}$ et les points

$$\begin{cases} m & \text{donné par } (0, 1, 0, 1, 0) \\ T_mV' \cap P & \text{donné par } (1, 0, 0, 0, 0) \\ T_mV' \cap Q & \text{donné par } (0, 0, 1, 0, 0)\,. \end{cases}$$

Un système d'équations de T_mV' est alors

$$x + y + z - 1 = y - u = v = 0\,.$$

Considérons le triplet t d'axe $\overline{Nm}$, double en N, simple en m et montrons que l'intersection $Al^3\, \mathbf{P}^5 \cap U$ est transverse en t. Le choix de t étant générique dans U, le lemme sera démontré.

Or au voisinage de N, le triplet t est formé par le doublet d, d'idéal $(u^2, x, z, y-u, v)$. Une carte de $\mathrm{Hilb}^2\, \mathbf{P}^5$ en d est donc donnée par les coefficients de l'idéal voisin:

$$(*) \qquad (u^2+au+a', x+bu+b', z+cu+c', y-u+du+d', v+eu+e').$$

D'autre part, des équations locales de V' en $m = (0, 1, 0, 1, 0)$ sont

$$\begin{cases} u = y + \varphi(x, y-1) \\ z = 1 - y - x + \psi(x, y-1) \\ v = 0 \end{cases}$$

où φ et ψ sont dans $\mathbf{C}[[X, Y]]$, de valuations $\geqslant 2$. Un point voisin de m sera repéré par

$$(**) \qquad (\alpha, 1+\beta, \gamma, 1+\delta, \varepsilon).$$

On obtient ainsi, avec $(*)$ et $(**)$, une carte de $\mathrm{Hilb}^3\,\mathbf{P}^5$ en t. Dans cette carte, $Al^3\,\mathbf{P}^5$ s'exprime par

$$\begin{cases} \alpha + b(1+\delta) + b' = 0 \\ \gamma + c(1+\delta) + c' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta - \delta + d(1+\delta) + d' = 0 \\ \varepsilon + e(1+\delta) + e' = 0 \end{cases}$$

car le troisième point doit être sur l'axe du doublet. Par ailleurs U est donné, par définition même, par les équations

$$a = a' = b' = c' = d' = e' = 0$$

qui concernent le point-double (il doit être de support $\{N\}$) et par

$$\delta = \beta + \varphi(\alpha, \beta), \quad \gamma = -\alpha - \beta + \psi(\alpha, \beta), \quad \varepsilon = 0$$

qui concernent le point simple (il doit être sur V').

Les relations linéaires tangentes à ces 13 équations sont indépendantes, ce qui termine la démonstration du lemme 8.

5°) Identification

Les deux lemmes ci-après servent à trouver des relations entre les coefficients de polynômes que sont les nombres d'intersection cherchés; voir III.1.b, III.2.b, IV.2.a, etc.

Lemme 12. *Soit P un polynôme à 4 variables. On suppose pour toute surface à singularités ordinaires de $\mathbf{P}^4$ d'invariants (n, d, t, δ) que $P(n, d, t, \delta) = 0$. Alors P est identiquement nul.*

Preuve. Soit S la surface de $\mathbf{P}^4$ réunion d'un nombre fini de surfaces S_i d'invariants $(n_i, d_i, t_i, \delta_i)$. Les invariants de S sont alors, comme on le vérifie facilement:

$$\begin{cases} n = \sum_i n_i \\ d = \sum_i d_i + \sum_{i<j} n_i n_j \\ t = \sum_i t_i + \sum_{i \neq j} d_i n_j + \sum_{i<j<k} n_i n_j n_k \\ \delta = \sum_i \delta_i + \sum_{i<j} n_i n_j. \end{cases}$$

Regardons maintenant le cas particulier de la surface S réunion dans $\mathbf{P}^4$ de

— p plans,

— q surfaces quadriques
— r surfaces cubiques } (dans certains hyperplans de $\mathbf{P}^4$)
— s surfaces $S(2, 2)$, dont les invariants sont $(4, 2, 0, 0)$.

D'après ce qui précède, les invariants de S sont donc:

$$n = p + 2q + 3r + 4s,$$

$$\begin{cases} d = 2s + \binom{p}{2} + 4\binom{q}{2} + 9\binom{r}{2} + 16\binom{s}{2} + 2pq + 3pr + 4ps \\ \quad + 6qr + 8qs + 12rs, \\ t = \binom{p}{3} + 8\binom{q}{3} + 27\binom{r}{3} + 64\binom{s}{3} + \binom{p}{2}(2q+3r+4s) + 4\binom{q}{2}(p+3r+4s) \\ \quad + 9\binom{r}{2}(p+2q+4s) + 16\binom{s}{2}(p+2q+3r) + 6pqr + 8pqs + 12prs + 24qrs, \\ \delta = \binom{p}{2} + 4\binom{q}{2} + 9\binom{r}{2} + 16\binom{s}{2} + 2pq + 3pr + 4ps + 6qr + 8qs + 12rs. \end{cases}$$

Soit $\varphi: \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ l'application qui à (p, q, r, s) associe (n, d, t, δ) définis par les quatre formules qui précèdent. Par hypothèse, pour toute surface S de $\mathbf{P}^4$ d'invariants (n, d, t, δ), on a $P(n, d, t, \delta)$ égal à 0. En particulier, pour la surface précédente; ce qui signifie que le polynôme $P_0\varphi$ s'annule sur $\mathbf{N}^4$. On a donc $P_0\varphi = 0$. Mais comme on le vérifie aisément, la différentielle $\partial_0\varphi$ est inversible; par suite P est nul dans un ouvert non vide de $\mathbf{C}^4$, donc identiquement nul.

LEMME 13. *Soit S une surface de $\mathbf{P}^4$ d'invariants (n, d, t, δ). Soit $\tilde{S} = S \cup P$ la réunion de S et d'un plan transverse. Alors les invariants de $\tilde{S}$ sont $\tilde{n} = n + 1$, $\tilde{d} = d + n$, $\tilde{t} = t + d$, $\tilde{\delta} = \delta + n$.*

Preuve. On regarde dans ce qui précède les invariants d'une réunion $S_1 \cup S_2$ où $S_1 = S$ et $S_2 = P$.

Remarque. Les lemmes 12 et 13 sont encore valables si on remplace les invariants (n, d, t, δ) par (n, d, t, h) où h est le nombre de points-doubles apparents (sur un $\mathbf{P}^2$) de la courbe double apparente Γ (sur un $\mathbf{P}^3$) de la surface. En effet, h est donné par

$$2h = d(d-n+2) - \delta - 3t$$

(voir [28], § V) et pour $\tilde{S} = S \cup P$, on a alors $\tilde{h} = h + d(n-2)$.

6°) INVARIANTS DES SURFACES

Nous donnons ici les invariants des surfaces servant de cas particuliers pour établir les formules.

Pour une surface S lisse de $\mathbf{P}^N$, nous avons les invariants c_2, K^2 et HK où

c_2 est la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique,

K est le diviseur canonique,

H est le diviseur hyperplan.

Par rapport à ces invariants d, t et δ sont donnés par les formules classiques (si n = degré S):

$$\begin{cases} 2d = n(n-4) - HK \\ 2\delta = n(n-10) + c_2 - K^2 - 5HK \\ 6t = n(n^2-12n+44) + 4K^2 - 2c_2 - 3HK(n-8). \end{cases}$$

Ceci peut se voir par exemple en appliquant les formules du lieu double [22] et triple [17].

On peut également donner les formules en utilisant les invariants classiques $(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \nu_2)$:

$$2d = n(n-1) - \mu_1, \quad 2\delta = n(n-1) - \mu_1 - \nu_2$$
$$6t = n(n-1)(n-2) - 3n\mu_1 + 2(2\mu_1 + 2\mu_2 + \nu_2)$$

et bien sûr $n = \mu_0$, $\nu = \nu_2$ (voir [34]).

Ceci permet de dresser les tableaux suivants; un symbole tel que $S(i_1, ..., i_k)$ désigne l'intersection complète de k hypersurfaces de degrés $i_1, ..., i_k$ dans $\mathbf{P}^{k+2}$ (voir [34]). Les surfaces considérées dans $\mathbf{P}^4$ ont $\delta = 0$ car lisses.

surface	n	d	t	surface	n	d	t	δ
$S(2, 2) \subset \mathbf{P}^4$	4	2	0	$S(2, 2, 2) \subset \mathbf{P}^5$	8	16	8	4
$S(2, 3) \subset \mathbf{P}^4$	6	6	0	$S(2, 2, 3) \subset \mathbf{P}^5$	12	42	48	12
$S(3, 3) \subset \mathbf{P}^4$	9	18	6	$S(2, 2, 2, 2) \subset \mathbf{P}^6$	16	88	208	40
$S(2, 4) \subset \mathbf{P}^4$	8	12	0	$S(2, 2, 2, 2, 2) \subset \mathbf{P}^7$	32	416	2880	256
$S(3, 4) \subset \mathbf{P}^4$	12	36	24	$S(2, 2, 2, 2, 3) \subset \mathbf{P}^7$	48	984	11376	648
Veronese $\subset \mathbf{P}^4$	4	3	1	del Pezzo $S_5 \subset \mathbf{P}^5$	5	5	1	1

7°) Quasitransversalité

Le lemme suivant sert, en utilisant la théorie de Fulton-MacPherson, à construire un cycle fixé dans $Al^3\,\mathbf{P}^N$, de codimension $(2n+1+3N) - (2N+1+3n) = N - n$. Voir III.2.a, IV.1.b, V.1.

Lemme 14. *Soit* $\mathbf{P}^n$ *un sous-espace linéaire de* $\mathbf{P}^N$. *Alors dans* $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^N$, *l'intersection de* $Al^3\,\mathbf{P}^N$ *et* $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^n$ *est* schématiquement $Al^3\,\mathbf{P}^n$. *On a le diagramme commutatif où les dimensions sont entre parenthèses:*

$$\begin{array}{ccccc} (2N+1) & Al^3\,\mathbf{P}^N & \hookrightarrow & \mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^N & (3N) \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ (2n+1) & Al^3\,\mathbf{P}^n & \hookrightarrow & \mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^n & (3n) \end{array}.$$

Preuve. On va voir que $Al^3\,\mathbf{P}^N$ et $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^n$ se coupent *quasitransversalement* dans $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^N$. Soit pour cela $(x, x_2, x_3, \dots x_N)$ un système de coordonnées inhomogènes pour lequel $\mathbf{P}^n$ est donné par $x_N = x_{N-1} = \dots = x_{N-n+1} = 0$ et soit ξ_0 un k-uplet aligné dans $\mathbf{P}^n$. On peut supposer que Axe ξ_0 est l'axe des x; l'idéal I_0 de ξ_0 est donc

$$I_0 = (p(x), x_2, x_3 \dots x_N)$$

où p est un polynôme de degré 3. Une carte de $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^N$ en ξ_0 est donc donnée par les coefficients de l'idéal

$$I = (p(x)+ax^2+bx+c,\ x_2+a_2x^2+b_2x+c_2, \dots, x_N+a_Nx^2+b_Nx+c_N)\,.$$

Dans cette carte, $Al^3\,\mathbf{P}^N$ s'exprime par

$$a_2 = a_3 = \dots a_N = 0$$

et $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^N$ par $a_i = b_i = c_i = 0$ avec $N - n + 1 \leqslant i \leqslant N$. D'où l'assertion de quasitransversalité.

Remarque. Le résultat est évidemment analogue pour $Al^k\,\mathbf{P}^N$ si $k > 3$.

8°) Calcul de multiplicités

a) Soit S une surface de $\mathbf{P}^4$ avec un point-double impropre O et soit m_0 un point simple quelconque de S. Supposons que la droite $\overline{Om_0}$ coupe une droite générique fixée Δ (on prendra $\Delta \cap T_{m_0}S = \emptyset$). Si l'on regarde le triplet aligné $d_0 \cup m_0$ d'axe $\overline{Om_0}$ où d_0 est le doublet de support $\{O\}$, ce triplet est évidemment contenu dans S. *Quelle est sa multiplicité dans le nombre* $T(S)$ *des tangentes à* S *recoupant* S *et la droite* Δ? (Voir III.1).

Soit pour ce calcul, un système de coordonnées inhomogènes (x, y, z, t) centré en O, avec $m_0 = (1, 1, 1, 1)$, les plans tangents aux deux branches de S en O étant donnés par $x = y = 0$ et $z = t = 0$. L'idéal de d_0 dans $\mathbf{C}\,[[x, y, z, t]]$ est alors

$$(x^2,\ y-x,\ z-x,\ t-x)\,.$$

Un doublet d voisin de d_0 est repéré par l'idéal

$$(x^2+ax+b,\ y-x+a_1x+b_1,\ z-x+a_2x+b_2,\ t-x+a_3x+b_3)\,.$$

De même, un point m voisin de m_0 est repéré par $(1+u_0, 1+u_1, 1+u_2, 1+u_3)$. On obtient ainsi une carte de $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^4$ en le triplet $d_0 \cup m_0$.

Dans cette carte, $Al^3\,\mathbf{P}^4$ s'exprime évidemment par

$$u_1 - u_0 + a_1(1+u_0) + b_1 = 0 \tag{1}$$

$$u_2 - u_0 + a_2(1+u_0) + b_2 = 0 \tag{2}$$

$$u_3 - u_0 + a_3(1+u_0) + b_3 = 0\,, \tag{3}$$

car le point simple m doit être sur Axe d. De plus, la sous-variété $\mathscr{D}$ de $Al^3\,\mathbf{P}^4$ s'exprime par

$$a^2 - 4b = 0 \tag{4}$$

puisque d doit avoir pour support un seul point.

Par ailleurs, la condition pour l'axe de rencontrer Δ signifie que m reste dans

le plan fixe P engendré par O et Δ. On peut par exemple prendre $z = x$ et $t = y$ pour équations de ce plan. D'où les conditions supplémentaires:

(5) $$u_0 = u_2$$

et

(6) $$u_1 = u_3 .$$

Enfin, exprimons $\mathrm{Hilb}^3 S$ dans cette carte.

Pour ce qui est du doublet d: on doit avoir l'inclusion d'idéaux $I(d) \supset I(S)$. Soit

$$x + \ldots = y + \ldots = 0$$

et $$z + \ldots = t + \ldots = 0$$

les équations des deux branches de S en 0, les ... signifiant des termes d'ordre au moins 2. L'idéal $I(S)$ est dans $\mathbf{C}[[x, y, z, t]]$:

$$(xz + \ldots, xt + \ldots, yz + \ldots, yt + \ldots)$$

les ... signifiant des termes d'ordre au moins 3.

Regardons par exemple la condition $xz + \ldots \in I(d)$. On doit avoir alors puisque $z + (a_2 - 1)x + b_2 \in I(d)$, la relation

$$b_2 x + (a_2 - 1)x^2 + \ldots = f(x)(b + ax + x^2)$$

où $f \in \mathbf{C}[[x]]$. Si $f = \sum_i f_i x^i$, on obtient en identifiant:

$$\begin{cases} 0 = f_0 b \\ b_2 = f_1 b + f_0 a \\ a_2 - 1 = f_2 b + f_1 a + f_0 . \end{cases}$$

Désignons l'idéal maximal de $\mathbf{C}[[a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3]]$ par m et écrivons $f = g + m^k$ pour $f - g \in m^k$. La troisième relation obtenue montre: $1 + f_0 \in m$ et donc, par la première:

(7) $$b = 0 .$$

La deuxième donne ainsi:

(8) $$b_2 = -a + m^2 .$$

Même raisonnement avec $xt + \ldots$; on obtient $b = 0$ et

(9) $$b_3 = -a + m^3 .$$

Regardons la condition $yz + \ldots \in I(d)$. On a

$$yz \equiv ((a_1 - 1)x + b_1)((a_2 - 1)x + b_2) \quad \text{modulo } I(d) .$$

D'où la relation

$$((a_1 - 1)x + b_1)((a_2 - 1)x + b_2) + \text{termes d'ordre} \geqslant 3 = g(x)(b + ax + x^2) .$$

En identifiant:

$$\begin{cases} b_1 b_2 = g_0 b \\ b_1(a_2-1) + b_2(a_2-1) = g_1 b + g_0 a \\ (a_1-1)(a_2-1) = g_2 b + g_1 a + g_0 . \end{cases}$$

de la troisième relation vient $g_0 = 1 + m$, d'où vu que $b = 0$ et $b_2 = -a + m^2$, par la deuxième relation: $-b_1 - b_2 = a + m^2$, soit

$$b_1 = m^2 . \tag{10}$$

Idem avec $yt + \ldots$

Pour ce qui est du point simple m: soit $z = 1 + \varphi(x-1, y-1)$ et $t = 1 + \psi(x-1, y-1)$ des équations locales de S au voisinage de $m_0 = (1, 1, 1, 1)$. La condition que le point m est sur S est alors simplement

$$u_2 = \varphi(u_0, u_1) \tag{11}$$

et

$$u_3 = \psi(u_0, u_1) . \tag{12}$$

Les 12 équations précédentes forment alors un idéal dont il est facile de voir que la longueur est 2. En effet, comme $b = 0$ et $a^2 - 4b = 0$, on obtient $a^2 = 0$. Par ailleurs les 11 autres équations ont des relations linéaires tangentes indépendantes. (En effet, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - 1 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} - 1 \end{vmatrix}$$

est non nul en m_0 car les deux plans $T_{m_0}S$ et P sont transverses).

La multiplicité cherchée est donc 2.

b) Soit S une surface de $\mathbf{P}^4$. *On regarde maintenant le nombre* $T(S)$ *des tangentes d'inflexion coupant un plan fixe* π. C'est par définition (III.2) le degré du 0-cycle

$$T(S) = \deg [\mathscr{T}] . \mathrm{Axe}^* \sigma_1 . [\mathrm{Hilb}_c^3 S]$$

dans $\mathrm{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$ où σ_1 est le cycle des droites coupant un plan fixe.

Si S admet un point-double impropre O avec deux branches S_1 et S_2, supposons que π recoupe ${}_3T_0S_2$ en P. Alors la droite $\overline{OP}$ coupe S en O suivant un triplet θ_0 de la forme $\overset{3}{\rightarrow}$. Nous voulons calculer la contribution de ce triplet dans $T(S)$. *Mais seulement sa contribution parasite, car il n'est pas exclu que la droite $\overline{OP}$ puisse être une vraie tangente d'inflexion de la branche S_2, auquel cas θ_0 compterait légitimement comme intersection entre* $\mathrm{Hilb}_c^3 S_2$ *et* $\mathscr{T}$. Evidemment, ce ne sera pas le cas génériquement; mais c'est cependant le cas dans le calcul effectué en III pour la surface $\tilde{S} = S \cup P$.

Pour éclairer cette situation, regardons plutôt les tangentes d'inflexion d'une courbe C dans $\mathbf{P}$. Leur nombre est défini comme le nombre d'intersection

$$T(C) = \deg [\mathscr{T}] . [\mathrm{Hilb}_c^3 C]$$

dans $\mathrm{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^2$ où $\mathscr{T}$ est la sous-variété de $Al^3 \mathbf{P}^2$ des triplets de la forme $\overset{3}{\rightarrow}$. Ce nombre est comme on sait [28] $3n(n-2)$ où $n = \deg C$. Cependant, le cas où C est singulière est à interpréter. Examinons en effet un croisement normal O de C et soient C_1, C_2 les deux branches de C en ce point. La tangente à C_2 en O coupe C suivant le triplet θ_0 de la forme $\overset{3}{\rightarrow}$ et ce triplet devra être compté avec multiplicité 3. Si h est le nombre de points-doubles de C, on aura donc le nombre correct

$$3n(n-2) - 6h$$

de tangentes d'inflexion (car il y en a deux « fausses » par point-double).

Supposons maintenant que O soit un point d'inflexion de la branche C_2. Le triplet θ_0 devra être compté deux fois dans $T(C)$: une fois comme « vraie » tangente d'inflexion de C_2 avec multiplicité 1 et une fois comme dans ce qui précède (et avec multiplicité 3). Cela vient en effet de ce que le germe de $\mathrm{Hilb}_c^3 C$ en θ_0 est formé des deux composantes

$$\mathrm{Hilb}^3 C_2 \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{Hilb}^2 C_2^0 \times C_1^0}$$

où C_i^0 est $C_i - \{O\}$, la barre désignant l'adhérence dans $\mathrm{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^2$ (la dernière composante est formée des limites de triplets ayant deux points sur C_2 et un point sur C_1).

Exemple: Si C est la réunion de deux droites L_1 et L_2, on a évidemment $T(C) = 0$ (en déformant en une conique lisse) ce qu'on voit aussi en écrivant

$$0 = -3 -3 +3 +3,$$

car ce sont les contributions respectives de

$$\mathrm{Hilb}^3 L_1, \quad \mathrm{Hilb}^3 L_2, \quad \overline{\mathrm{Hilb}^2 L_1^0 \times L_2^0}, \quad \overline{\mathrm{Hilb}^2 L_2^0 \times L_1^0}$$

(on a en effet $T(\text{droite}) = -3$ puisqu'ici $n = 1$).

Donc dans le calcul de l'intervention parasite de θ_0 *(qu'on va effectuer maintenant) seule la composante* $\mathrm{Hilb}^2 C_2^0 \times C_1^0$ *doit intervenir dans son intersection avec* $\mathscr{T}$. *Bien sûr il n'y a qu'elle dans un cas générique, encore une fois.*

Pour effectuer le calcul de la multiplicité de θ_0 dans $\mathscr{T} \cap \overline{\mathrm{Hilb}^2 C_2^0 \times C_1^0}$ plaçons-nous dans des coordonnées locales (x, y) pour lesquelles

$$\begin{cases} C_2 \text{ a pour équation } & y = f(x), \quad f \in \mathbf{C}[[x]] \quad \mathrm{val} f \geqslant 2 \\ C_1 \text{ a pour équation } & y = g(y), \quad g \in \mathbf{C}[[y]] \quad \mathrm{val}\, g \geqslant 2. \end{cases}$$

L'idéal de θ_0 est (x^3, y) et une carte de $\mathrm{Hilb}^3 \mathbf{P}^2$ en θ_0 est donnée par les coefficients de l'idéal voisin

$$I(\theta) = (x^3 + 3ax^2 + 3bx + c,\ y + a'x^2 + b'x + c').$$

Dans cette carte, $Al^3 \mathbf{P}^2$ s'exprime évidemment par

(1) $$a' = 0$$

et sa sous-variété $\mathscr{T}$ par

(2) $$b = a^2,$$

(3) $$c = a^3.$$

(Dans toute la suite on fait donc $a' = 0$).

Si m est un point simple de C_1, de coordonnées $(g(v), v)$, il faut et il suffit pour que m soit dans θ que l'on ait

$$(*) \quad \begin{cases} g(v)^3 + 3ag(v)^2 + 3bg(v) + c = 0 \\ v + b'g(v) + c' = 0 \end{cases} .$$

Ces deux équations, vu (2) et (3) sont équivalentes à

$$(4) \qquad \begin{cases} (a+g(v))^3 = 0 \\ v + b'g(v) + c' = 0 \end{cases} .$$

Par le théorème des fonctions implicites, la dernière équation donne $v = V(b', c')$, la partie linéaire de V étant c'.

Exprimons maintenant que le doublet d, complémentaire du point simple m dans θ est situé sur C_2. On a, vu $(*)$:

$$x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = (x-g(v))\,(x^2+(3a+g(v))x+3b+3ag(v)+(g(v))^2)\,.$$

Posons

$$\begin{cases} 3A = 3a + g(v) = 3a + gV(b', c') \\ 3B = 3b + 3ag(v) + g(v)^2 = 3b + 3agV(b', c') + (gV(b', c'))^2\,. \end{cases}$$

L'idéal de d est alors

$$J = (x^2+3Ax+3B,\ y+b'x+c')$$

et dire que d est dans C_2 revient à demander l'inclusion $J \supset (y-f(x))$, soit demander:

$$(**) \qquad f(x) + b'x + c' \text{ multiple de } x^2 + 3Ax + 3B \text{ dans } \mathbf{C}\,[[x]]\,.$$

Si on écrit $f(x) = f_2x^2 + f_3x^3 + \ldots$, il est facile de voir, par identification dans $\mathbf{C}\,[[x]]$ qu'on obtient

$$\begin{cases} b' = 3f_2A + 3f_3B + M^2 & (5) \\ c' = f_2B + BM & (6) \end{cases}$$

où M est l'idéal maximal de $\mathbf{C}\,[[b', c', A, B]]$.

Ainsi l'idéal défini par les relations (1) à (6) est de multiplicité 3: les équations (1), (2), (3), (5), (6) définissent en effet une courbe non-singulière Γ dans les coordonnées (a, b, c, a', b', c') et l'équation (4) définit un triplet curviligne sur Γ.

Le calcul analogue pour les points-doubles impropres d'une surface S de $\mathbf{P}^4$ est laissé au lecteur.

9°) Tangentes d'inflexion de $S(2, 3)$ et $S(2, 4)$

Soit $\mathscr{H}$ une hypersurface de degré 3 ou 4 dans $\mathbf{P}^4$ et soit $G = G(1, 4)$. Soit $[F] \in A^3(G)$ où F est l'ensemble des droites contenues dans une hyperquadrique Q de $\mathbf{P}^4$.

Soit $[X] \in A^2(G)$ où X est l'ensemble des droites coupant $\mathscr{H}$ suivant un triplet $\overset{3}{\rightarrow}$ si $\deg \mathscr{H} = 3$ ou bien suivant un quadruplet $\overset{3}{\rightarrow} \cdot$ si $\deg \mathscr{H} = 4$.

Les calculs qui suivent ont lieu dans $A^{\cdot}(G)$ avec les notations de [21]. Tout d'abord, on a

$$\begin{cases} [F].(1,3) = 4 & \text{(nombre de droites dans une quadrique de } \mathbf{P}^3 \text{ et coupant une droite fixe),} \\ [F].(0,4) = 0 & \text{(un point générique de } \mathbf{P}^4 \text{ n'est pas sur } Q). \end{cases}$$

Il en résulte $[F] = 4(1, 3)$ par dualité.

Cherchons $[F].[X].(2, 4)$ qui représentera donc le nombre m de droites tangentes d'inflexion à $S = \mathscr{H} \cap Q$ recoupant un plan fixe. On a

$$m = [F].[X].(2,4) = 4\,[X].(2,4).(1,3).$$

Or par la formule de Pieri, on a

$$(2,4).(1,3) = (1,2) + (0,3).$$

D'autre part, suivant que $\deg \mathscr{H} = 3$ ou 4, on a

$$\begin{cases} [X].(1,2) = 9 \text{ ou } 24 & \text{(tangentes d'inflexion d'une cubique ou quartique plane)} \\ [X].(0,3) = 6 \text{ ou } 24 & \text{(tangentes d'inflexion d'une surface cubique ou quartique de } \mathbf{P}^3 \text{ passant par un point fixe: [34], p. 199 et 203).} \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} m = 4.9 + 4.6 = 60 & \text{si } \deg \mathscr{H} = 3 \\ m = 4.24 + 4.24 = 192 & \text{si } \deg \mathscr{H} = 4 \end{cases}$.

Désignant le nombre de tangentes d'inflexion d'une surface de $\mathbf{P}^4$ coupant un plan fixe par T, on a donc $T(S(2,3)) = 60$ *et* $T(S(2,4)) = 192$. (Il faut vérifier que les multiplicités sont bien 1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARBARELLO, E. *et al. Geometry of algebraic curves (volume I).* Springer-Verlag (1985).

[2] CAYLEY, A. On skew surfaces, otherwise scrolls. *Collected Papers V*, 168-220.

[3] COLLEY, S. Enumerating stationnary multiple-points. *Adv. in Maths*, à paraître.

[4] ELENCWAJG, G. et P. LE BARZ. L'anneau de Chow de Hilb^3 $\mathbf{P}^2$. A paraître.

[5] FOGARTY, J. Algebraic families on an algebraic surface. *Amer. J. Math. 90* (1968), 511-521.

[6] FULTON, W. and R. MACPHERSON. Intersecting cycles on an algebraic variety. *Real and Complex singularities*, Oslo (1976), Sijthoof & Noordhoof, 179-197.

[7] FULTON, W. *Intersection theory.* Springer-Verlag (1984).

[8] GRANGER, M. *Géométrie des schémas de Hilbert ponctuels.* Mém. Soc. Math. France n° 8 (1983).

[9] GRIFFITHS, P. and J. HARRIS. *Algebraic Geometry.* Wiley & Sons, New York (1978).

[10] GROTHENDIECK, A. Les schémas de Hilbert. *Séminaire Bourbaki*, exposé 221 (1961), IHP Paris.

[11] —— EGA I. *Publ. Math. IHES 4* (1960), 1-228.

[12] GRUSON, L. et C. PESKINE. Courbes de l'espace projectif: variétés de sécantes. *Enumerative Geometry and classical algebraic Geometry*, Nice (1981), Prog. in Maths n° 24, Birkhäuser, 1-31.

[13] HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag (1977).
[14] —— Connectedness of the Hilbert Scheme. *Publ. Math. IHES 29* (1966), 261-304.
[15] IARROBINO, A. Reducibility of the families of 0-dimensional schemes on a variety. *Inv. Math. 15* (1972), 72-77.
[16] JAMES, C. On the multiple tangents and multisecants of scrolls in higher space. *Proc. London Math. Soc. (2) 27* (1927-28), 513-540.
[17] KLEIMAN, S. Multiple-point formulas I: iteration. *Acta Math. 147* (1981), 13-49.
[18] —— Multiple-point formulas II: the Hilbert scheme. To appear.
[19] —— Multiple-point formulas for maps. *Enumerative Geometry and classical algebraic Geometry*, Nice (1981), Prog. in Maths n° 24, Birkhäuser, 237-252.
[20] —— The enumerative theory of singularities. *Real and complex singularities*, Oslo (1976), Sijthoof & Noordhoof, 297-396.
[21] —— Rigorous foundation of Schubert's enumerative calculus. *Proc. of Symp. in Pure Maths. 28* (1976), AMS Providence.
[22] LAKSOV, D. Residual intersections and Todd's formula for the double locus of a morphism. *Acta Math. 140* (1978), 75-92.
[23] LE BARZ, P. Formules multisécantes pour les courbes gauches quelconques. *Enumerative Geometry and classical algebraic Geometry*, Nice (1981), Prog. in Maths n° 24, Birkhäuser, 165-197.
[24] —— Platitude et non-platitude de certains sous-schémas de $\mathrm{Hilb}^k\,\mathbf{P}^N$. *J. Reine und ang. Math. 348* (1984), 116-134.
[25] —— Quelques calculs dans les variétés d'alignements. *Adv. in Maths*, à paraître.
[26] —— Contribution des droites d'une surface à ses multisécantes. *Bull. Soc. Math. France 112* (1984), 303-324.
[27] —— On multisecant of scrolls. Preprint, Univ. de Nice.
[28] —— Quelques formules multisécantes pour les surfaces. A paraître.
[29] —— Courbes générales de $\mathbf{P}^3$. *Math. Scand. 44* (1979), 243-277.
[30] —— Formules pour les multisécantes des surfaces. *C. Rend. Acad. Sc. Paris 292* (1981), 797-800.
[31] MATHER, J. N. Stable map-germs and algebraic geometry. *Lecture Notes in Maths n° 197*, 176-193.
[32] RAN, Z. The class of a Hilbert Scheme inside an other. A paraître.
[33] RONGA, F. Desingularisation of the triple points and of the stationary points of a map. *Comp. Math. 53* (1984), 211-223.
[34] SEMPLE, J. G. and L. ROTH. *Introduction to algebraic geometry*. Clarendon Press (1949), Oxford.
[35] SEVERI, F. Riflessioni intorno ai problemi numerativi... *Rend. del R. Ist. Lomb. di Sc. e Lett. 54* (1921), 243-254.
[36] VON ZUR GATHEN, J. Sekantenräume von Kurven. Thèse, Université de Zürich (1980).
[37] ZEUTHEN, H. G. Sur les singularités ordinaires des courbes géométriques à double courbure. *C. Rend. Acad. Sc. Paris 67* (1868), 225-229.

(Reçu le 28 décembre 1984)

Patrick Le Barz

Laboratoire de Mathématiques
Université de Nice
Parc Valrose
F-06034 Nice Cedex