

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 33 (1987)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ON THE GALOIS GROUPS OF THE EXPONENTIAL TAYLOR  
POLYNOMIALS  
**Autor:** Coleman, Robert F.  
**Kapitel:** IV. CALCULATION OF THE DISCRIMINANT  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-87891>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## IV. CALCULATION OF THE DISCRIMINANT

Let  $f_n(x) = \frac{1}{n!} (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$ . Then

$$\begin{aligned} D_n &= \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j) = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j) \\ &= (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^n (n! f'_n(\alpha_i)) = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^n n! f_{n-1}(\alpha_i) \\ &= (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^n (-\alpha_i^n) \quad (\text{since } f_{n-1}(x) = f_n(x) - \frac{x^n}{n!}) \\ &= (-1)^{\binom{n}{2} + n} \left( \prod_{i=1}^n \alpha_i \right)^n = (-1)^{\binom{n}{2} + n} ((-1)^n n! f_n(0))^n \\ &= (-1)^{\binom{n}{2}} (n!)^n. \end{aligned}$$

## V. END OF PROOF

Tschebyshev's Theorem (2 above) implies that for each  $n > 1$  there is a prime number  $p$  such that

$$\text{ord}_p(n!) = 1.$$

Hence  $D_n$  is not a square if  $n$  is odd. If  $n \equiv 2(4)$  then  $D_n < 0$  so it is not a square in this case either. Finally if 4 divides  $n$  then we see that  $D_n$  is a square. This completes the proof for  $n \geq 8$ . The remaining cases can be handled individually using the above results and facts about  $S_n$  for small  $n$ . (See [S-2].)

## VI. FINAL REMARKS

1. Hilbert [H] proved that there exist extensions of  $\mathbf{Q}$  with Galois group  $S_n$ . The splitting fields of the exponential polynomials provide explicit examples of such extensions. Moreover, they provide examples of such extensions ramified only at the primes dividing the order of the Galois group, a property not predictable by Hilbert's methods. (In fact, as can easily be checked using the results of II above, they are ramified at all primes dividing the order of the Galois group.) Schur also found  $A_n$  extensions of  $\mathbf{Q}$  for  $n$  odd unramified outside  $n!$  (see [S-2] and [S-3]). This raises the question, given a simple group  $G$ , does there exist a  $G$  extension of  $\mathbf{Q}$  unramified outside the order of  $G$ ?