Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 33 (1987)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: HOMOLOGIE DE DEGRÉ TROIS D'ALGÈBRES DE LIE SIMPLES DÉPLOYÉES ÉTENDUES À UNE ALGÈBRE COMMUTATIVE

Autor: Cathelineau, J. L.

Kapitel: 4. Remarques sur le cas de sl(r, A), r 3

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-87889

Il est alors immédiat que

$$\tilde{L}_3 \circ \tilde{\lambda}_3 = <h_\alpha, h_\alpha> \mathrm{Id},$$

et par suite $\tilde{L}_3$ est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.

En ce qui concerne le calcul du $H_{2,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A)$ on procède de manière analogue, en remplaçant le complexe $(A^*/_{1-X, 1+Y}, b)$, par le complexe $(A^*/_{1+Y}, b)$, dont l'homologie est $H_*^-(A)$.

Enfin on ramène facilement le cas général au cas déployé; en effet supposons que (L, k) soit une extension galoisienne, de degré fini, telle que $\mathfrak{g} \otimes_k L$ soit déployée sur L. On applique ce que l'on vient de démontrer à la situation:

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k L, \quad A' = A \otimes_k L, \quad \mathfrak{g}'_{A'} = \mathfrak{g}' \otimes_k A' = \mathfrak{g}_A \otimes_k L.$$

Pour achever la preuve, il suffit de remarquer que l'on a des isomorphismes

$$H_{*,k}(\mathfrak{g}_A) \xrightarrow{\sim} [H_{*,L}(\mathfrak{g}_A \otimes_k L)]^{G_{L/k}}$$
$$H_{*,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A) \xrightarrow{\sim} [H_{*,L}(\mathfrak{g}_A \otimes_k L, \mathfrak{g}_A \otimes_k L)]^{G_{L/k}}$$

où $G_{L/k}$ est le groupe de Galois de (L, k): ce groupe est fini et on est en caractéristique nulle.

4. Remarques sur le cas de $\mathfrak{sl}(r, A)$, $r \geqslant 3$

Soit $\mathfrak{sl}(r, A) \simeq A \otimes \mathfrak{sl}(n, k)$, l'algèbre de Lie des $r \times r$ matrices de trace nulle. Explicitons l'isomorphisme

$$\tilde{\mathscr{L}}_3 : H_{3,k}(\mathfrak{sl}(r, A)) \to HC_2(A),$$

induit (pour $r \geqslant 3$), par l'application de [LQ]:

$$\mathscr{L}(a_0 X_0 \wedge a_1 X_1 \wedge \ldots \wedge a_n X_n)$$
$$= (-1)^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma \operatorname{Trace}(X_0 X_{\sigma(-1)} \ldots X_{\sigma(n)}) (a_0, a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)});$$

(L'application L considérée dans le paragraphe précédent ne convient pas ici). On peut écrire

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_3(a_0 X_0 \wedge a_1 X_1 \wedge a_2 X_2) \\
&\quad = \operatorname{Trace}(X_0 X_1 X_2)(a_0, a_1, a_2) - \operatorname{Trace}(X_0 X_2 X_1)(a_0, a_2, a_1) \\
&\quad = \frac{1}{2} \psi(X_0, X_1, X_2)((a_0, a_1, a_2) - (a_0, a_2, a_1)) \\
&\quad + \frac{1}{2} \phi(X_0, X_1, X_2)((a_0, a_1, a_2) + (a_0, a_2, a_1))
\end{aligned}$$

où

$$\phi(X_0, X_1, X_2) = \text{Trace}\,(X_0[X_1, X_2])$$

et

$$\psi(X_0, X_1, X_2) = \text{Trace}\,(X_0X_1X_2 + X_0X_2X_1)$$

sont des 3-formes invariantes sur $\mathfrak{sl}(r, k)$, respectivement antisymétrique et symétrique.

Lorsque A est lisse ou un corps extension de k, on sait que

$$HC_2(A) \simeq H^0_{DR}(A) \oplus (\Omega^2_{A/k}/d\,\Omega^1_{A/k})\,;$$

L'isomorphisme ci-dessus s'explicite alors par l'application

$$a_0X_0 \wedge a_1X_1 \wedge a_2X_2 \mapsto \psi(X_0, X_1, X_2)a_0a_1a_2 + \phi(X_0, X_1, X_2)a_0da_1da_2\,.$$

Esquissons une preuve; on note d'abord l'analogue des lemmes 3 et 4. Soit H, E_+, E_-, H', les matrices de $\mathfrak{sl}(r, k)$ de la forme

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où M est donné respectivement par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

alors on a:

$(\otimes^3 \mathfrak{sl}(r, k))_{\mathfrak{sl}(r, k)}$ est de dimension 2, engendré par

$$[H \otimes E_+ \otimes E_-] \quad \text{et} \quad [H \otimes H \otimes H']\,;$$

de plus l'application

$$S^3A \oplus \wedge^3 A \to (\wedge^3 \mathfrak{sl}(r, A))_{\mathfrak{sl}(r, k)}$$

donnée par

$$a\,.\,b\,.\,c \mapsto [aH \wedge bE_+ \wedge c\,E_-]$$
$$a \wedge b \wedge c \mapsto [aH \wedge bH \wedge c\,H']$$

est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.

Une méthode pour prouver cela consiste à utiliser l'argument géométrique suivant sur les systèmes de racines:

Pour un système de racines Δ de base R de type $A_n (n \geqslant 2)$, la plus grande racine est orthogonale à toutes les racines de la base sauf exactement 2.

Enfin on obtient un inverse de $\tilde{\mathscr{L}}_3$ à partir du morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccc} A^4/_{1-X} & \xrightarrow{b} & A^3/_{1-X} & \xrightarrow{b} & A^2/_{1-X} \\ {\scriptstyle \mu_4} \downarrow & & {\scriptstyle \mu_3} \downarrow & & {\scriptstyle \mu_2} \downarrow \\ \wedge^4(\mathfrak{sl}(r, A))_{\mathfrak{sl}(r,k)} & \xrightarrow{d} & \wedge^3(\mathfrak{sl}(r, A))_{\mathfrak{sl}(r,k)} & \xrightarrow{d} & \wedge^2(\mathfrak{sl}(r, A))_{\mathfrak{sl}(r,k)} \end{array}$$

$$\mu_2((a_0, a_1)) = \frac{1}{2}[a_0 H \wedge a_1 H],$$

$$\mu_3((a_0, a_1, a_2)) = \frac{1}{2}[a_0 H \wedge a_1 E_+ \wedge a_2 E_-] + \frac{1}{2}[a_0 H \wedge a_1 H \wedge a_2 H'],$$

$$\begin{aligned} \mu_4((a_0, a_1, a_2, a_3)) &= \frac{1}{4}[a_0 E_+ \wedge a_1 E_- \wedge a_2 E_+ \wedge a_3 E_-] \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{\sigma \in G} \varepsilon_\sigma [a_{\sigma(0)} H \wedge a_{\sigma(1)} H \wedge a_{\sigma(2)} E'_+ \wedge a_{\sigma(3)} E'_-] \end{aligned}$$

où G est le groupe cyclique engendré par le cycle (0, 1, 2, 3), et où E'_+ et E'_- proviennent des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a une approche analogue pour $H_{2,k}(\mathfrak{sl}(r, A), \mathfrak{sl}(r, A))$ $(r \geqslant 3)$.

En écrivant les lignes qui précèdent, l'auteur était motivé par l'homologie des groupes algébriques simples (éventuellement réels). Que connaît-on d'analogue au théorème 1 et 2 dans ce contexte ?

La situation pour $SL(r, A)$ est assez bien comprise grâce à la K-théorie algébrique et à l'article récent [G].

Dans le cas des groupes algébriques réels simples, il y a des résultats dans [D], [D-S], [P-S] ; en particulier l'analogue de théorème 2 est connu pour $SO(n, \mathbf{R})$, comme conséquence du théorème de Sydler [S].