3. Cas où g n'est pas de type A_n(n \geq 2)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1987)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

dans tous les autres cas:

$$H_{2,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A) \simeq H_2^-(A).$$

(Ici les isomorphismes sont des isomorphismes de A-modules.)

Le cas particulier suivant semble intéressant (voir introduction): si $\mathfrak{l}$ est une $\mathbf{R}$-algèbre de Lie réelle simple, non de type $A_n(n \geqslant 2)$

$$H_{3,\mathbf{Q}}(\mathfrak{l}) \simeq \bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}\,.$$
$$H_{2,\mathbf{Q}}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) = 0,$$

où l'homologie est prise au sens des algèbres rationnelles;

Par contre, si $\mathfrak{l}$ est de type $A_n(n \geqslant 2)$, on a

$$H_{3,\mathbf{Q}}(\mathfrak{l}) \simeq (\bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}) \oplus (\Omega^2_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}/d\,\Omega^1_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}})$$
$$H_{2,\mathbf{Q}}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) \simeq \Omega^2_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}};$$

et on sait que $\Omega^2_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}/d\,\Omega^1_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel, de dimension la puissance du continu, et que $\Omega^2_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, de dimension la puissance du continu.

Comme me l'a fait remarquer Ch. Kassel, le cas du type $A_n(n \geqslant 2)$ est implicitement contenu dans [LQ] et [G]. Sans revenir en détail sur ce cas, on fera quelques remarques au § 4.

3. Cas où $\mathfrak{g}$ n'est pas de type $A_n(n \geqslant 2)$

Calcul de certains espaces de coinvariants

Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ une k-algèbre déployée, d'algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ et de système de racines Δ. $(h_\alpha, e_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ est une famille de générateurs de Chevalley telle que

$$\forall \alpha \in \Delta, [h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha, \quad [h_\alpha, e_{-\alpha}] = -2e_\alpha, \quad [e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha;$$
$$R = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \text{ est une base de } \Delta.$$

Tous les produits tensoriels et extérieurs sont pris sur k; $(\ )_\mathfrak{g}$ désigne l'espace des coinvariants d'un $\mathfrak{g}$-module.

Dans ce paragraphe, A est une k-algèbre commutative quelconque.

Le lemme suivant est bien connu.

Lemme 1. *Soit $\mathfrak{g}$ simple déployée sur k. La forme de Killing*

$$<\ ,\ >: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$$

induit un isomorphisme de k-espaces vectoriels:

$$(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} k .$$

En effet:

$$(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \simeq (\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \simeq (\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}$$

car $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}^*$ comme $\mathfrak{g}$-module. De plus $\mathfrak{g}$ simple entraîne

$$\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \simeq k .$$

En utilisant des formules connues pour la forme de Killing ([Bo2]), on en déduit les relations suivantes dans $(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$:

$$\begin{aligned}
&[e_\alpha\otimes e_\beta] = 0, \quad \text{si} \quad \alpha+\beta\neq 0\\
&[e_\alpha\otimes h_\beta] = [h_\beta\otimes e_\alpha] = 0\\
&[h_\alpha\otimes h_\beta] = \alpha(h_\beta)\,[e_{-\alpha}\otimes e_\alpha] = \beta(h_\alpha)\,[e_\beta\otimes e_{-\beta}]\\
&(\alpha, \alpha)\,[h_\alpha\otimes h_\alpha] = (\beta, \beta)\,[h_\beta\otimes h_\beta]\,,
\end{aligned} \tag{1}$$

où [ ] est la classe dans $(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$ et (,) la forme sur $\mathfrak{h}^*$ associée à $<\ ,\ >$.

En utilisant l'identification ([L-Q])

$$(\mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A) \simeq \big((\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}) \otimes (A\otimes A)\big) \otimes_{\mathfrak{S}_2} (sgn)$$

où (sgn) désigne k, muni de l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_2$ donné par la signature, on obtient:

LEMME 2. *L'espace des coinvariants* $(\mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}}$ *s'identifie canoniquement à* $A \wedge A$, *par l'application*

$$a \wedge b \mapsto (\alpha, \alpha)\,[ah_\alpha \wedge bh_\alpha]$$

($\alpha\in\Delta$, *arbitraire).*

ah_α est mis pour $a \otimes h_\alpha$; $\mathfrak{g}$ est considérée comme sous-algèbre de $\mathfrak{g}_A$ et opère dans $\mathfrak{g}_A$ par l'action adjointe.

Notons dans $(\mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}}$ les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
[ah_\alpha\wedge bh_\alpha] &= 2\,[ae_\alpha\wedge be_{-\alpha}]\\
&= 2\,[ae_{-\alpha}\wedge be_\alpha]
\end{aligned} \tag{2}$$

LEMME 3. *Soit* $\mathfrak{g}$ *simple déployée sur* k, *de type* $A_1, B, C, D_l (l\geqslant 4)$, E, F_4 *ou* G_2, *la forme antisymétrique*

$$\phi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$$
$$(u, v, w) \mapsto <[u, v], w>$$

induit un isomorphisme de k-espaces vectoriels:

$$(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} k\,.$$

Il suffit de montrer que $\dim_k((\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}) = 1$. Pour cela, nous utiliserons un résultat de Kostant-Parthasaraty-Rao-Varadarajan ([P.R.V.]).

Soit ω la plus grande racine de Δ qui est le poids dominant de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$, notée π_ω. On a

$$\begin{aligned}\dim_k((\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}) &= \dim_k((\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}) \\ &= (\pi_\omega, \pi_\omega\otimes\pi_\omega)\end{aligned}$$

où $(\pi_\omega, \pi_\omega\otimes\pi_\omega)$ est la multiplicité de π_ω dans $\pi_\omega \otimes \pi_\omega$. Par la formule de multiplicité du théorème 2.1 de [P.R.V.], on peut écrire

$$(\pi_\omega, \pi_\omega\otimes\pi_\omega) = \dim_k V\,,$$

où

$$V = \{v \in \mathfrak{h}\,;\, (\mathrm{ad}\, e_{\alpha_i})^{\omega(h_{\alpha_i})+1}(v) = 0, \quad \text{pour} \quad i = 1, ..., l\}\,;$$

en effet avec les notations de [P.R.V.], on a

$$(\pi_\omega, \pi_\omega\otimes\pi_\omega) = m^+(\omega\,; 0, \omega) = m^-(\omega\,; 0, \omega)\,.$$

On fait alors l'observation cruciale suivante:

si (Δ, R) est un système de racines de type A_1, B, C, $D_l(l \geqslant 4)$, E, F_4 ou G_2, la plus grande racine ω est orthogonale à toutes les racines de la base R sauf exactement une qu'on supposera être α_l; cela se vérifie facilement en utilisant, par exemple, les planches du chapitre VI de [Bo 2].

Par suite

$$V \subset \{v \in \mathfrak{h}\,;\, \alpha_i(v) = 0, \quad \text{pour} \quad i = 1, ..., l-1\}\,;$$

en fait V n'est pas réduit à $\{0\}$, car ϕ est non triviale et donc

$$\dim_k V = 1 \qquad (\text{engendré par } h_{\alpha_l})$$

d'où le lemme.

On déduit aussitôt de ce lemme, à l'aide de ϕ les relations suivantes dans $(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$:

(3) $\quad \forall\alpha, \beta \in \Delta\,, \quad (\alpha, \alpha)\,[h_\alpha\otimes e_\alpha\otimes e_{-\alpha}] = (\beta, \beta)\,[h_\beta\otimes e_\beta\otimes e_{-\beta}] \neq 0\,;$

de plus le symbole $[h_\alpha \otimes e_\alpha \otimes e_{-\alpha}]$ est antisymétrique; on en tire:

LEMME 4. *(Avec les hypothèses du lemme 3).* $(\mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}}$ *s'identifie canoniquement à la puissance symétrique (sur k)* $S^3 A$, *par l'application*

$$a \,.\, b \,.\, c \mapsto (\alpha, \alpha)\, [a h_\alpha \wedge b e_\alpha \wedge c e_{-\alpha}]\,.$$

De façon analogue, $(\mathfrak{g}_A \otimes (\mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A))_{\mathfrak{g}}$ *s'identifie à* $A \otimes S^2 A$ *par*

$$a \otimes b \,.\, c \mapsto (\alpha, \alpha)\, [a h_\alpha \otimes (b e_\alpha \wedge c e_{-\alpha})]\,.$$

Il suffit d'utiliser les isomorphismes ([LQ])

$$(\mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}} \simeq ((\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \otimes (A \otimes A \otimes A)) \otimes_{\mathfrak{S}_3} (sgn)$$
$$(\mathfrak{g}_A \otimes (\mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A))_{\mathfrak{g}} \simeq ((\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \otimes (A \otimes A \otimes A)) \otimes_{\mathfrak{S}_2} (sgn)\,.$$

LEMME 5. *Soit* $\mathfrak{g}$ *déployée sur* k. *Dans* $(\otimes^4 \mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$ *on a les relations*

$$\forall \alpha \in \Delta,\ [e_\alpha \otimes e_{-\alpha} \otimes e_\alpha \otimes e_{-\alpha}] = [e_{-\alpha} \otimes e_\alpha \otimes e_{-\alpha} \otimes e_\alpha]\,.$$

Pour cela, on remarque d'abord que, par un argument de formule de Taylor, le groupe des automorphismes élémentaires de $\mathfrak{g}$ opère trivialement dans $(\otimes^n \mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$.

Soit alors l'automorphisme élémentaire ([Bo 2], VIII, § 2...)

$$\Theta_\alpha = \exp(\operatorname{ad} e_\alpha) \exp(\operatorname{ad} e_{-\alpha}) \exp(\operatorname{ad} e_\alpha)\,;$$

il vérifie ([Bo 2])

$$\Theta_\alpha(e_\alpha) = e_{-\alpha}\,, \qquad \Theta_\alpha(e_{-\alpha}) = e_\alpha\,,$$

d'où le lemme.

PREUVE DES RÉSULTATS. (Pour $\mathfrak{g}$ non de type A_n, $n \geq 2$)

Soit $(\wedge^* \mathfrak{g}_A, d)$ et $(\mathfrak{g}_A \otimes \wedge^* \mathfrak{g}_A), d)$, les complexes habituels d'homologie

$$H_{*,k}(\mathfrak{g}_A) \quad \text{et} \quad H_{*,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A)\,.$$

Le résultat suivant de [L-Q], permet de se ramener aux coinvariants:

LEMME 6 ([L-Q]). *Si* $\mathfrak{g}$ *est déployée, les homomorphismes de complexes*

$$(\wedge^* \mathfrak{g}_A, d) \to ((\wedge^* \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}}, d)$$
$$(\mathfrak{g}_A \otimes \wedge^* \mathfrak{g}_A, d) \to ((\mathfrak{g}_A \otimes \wedge^* \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}}, d)\,,$$

sont des quasi-isomorphismes.

On prouve d'abord les théorèmes 1 et 2 dans le cas où $\mathfrak{g}$ est déployée sur k non du type $A_n (n \geqslant 2)$.

Les résultats qui précèdent permettent de construire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
A^4/_{1-X,1+Y} & \xrightarrow{b} & A^3/_{1-X,1+Y} & \xrightarrow{b} & A^2/_{1-X,1+Y} \\
{\scriptstyle\lambda_4}\downarrow & & {\scriptstyle\lambda_3}\downarrow & & {\scriptstyle\lambda_2}\downarrow \\
(\wedge^4 \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{d} & (\wedge^3 \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{d} & (\wedge^2 \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}}
\end{array}$$

où les λ_i, $i = 2, 3, 4$, sont définis par

$$\lambda_2(a_0, a_1) = [a_0 h_\alpha \wedge a_1 h_\alpha]$$
$$\lambda_3(a_0, a_1, a_2) = [a_0 h_\alpha \wedge a_1 e_\alpha \wedge a_2 e_{-\alpha}]$$
$$\lambda_4(a_0, a_1, a_2, a_3) = [a_0 e_\alpha \wedge a_1 e_{-\alpha} \wedge a_2 e_\alpha \wedge a_3 e_{-\alpha}],$$

$\alpha \in \Delta$ étant une racine fixée. Notons que

$$A^3/_{1-X,1+Y} \simeq S^3 A \qquad \text{et} \qquad A^2/_{1-X,1+Y} \simeq \wedge^2 A,$$

et par suite, λ_2 et λ_3 sont bijectives, grâce aux lemmes 4 et 6.

On en déduit une surjection

$$HD_2(A) \xrightarrow{\tilde{\lambda}_3} H_{3,k}(\mathfrak{g}_A).$$

D'autre part, on a pour toute k-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, un morphisme de complexes

$$L: (\wedge^* \mathfrak{g}_A, d) \to (A^*/_{1-X,1+Y}, b)$$

défini par

$$L(a_0 u_0 \wedge a_1 u_1 \wedge \ldots \wedge a_n u_n)$$
$$= (-1) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma \operatorname{Trace}(\operatorname{ad} u_0 \circ \operatorname{ad} u_{\sigma(1)} \circ \ldots \circ \operatorname{ad} u_{\sigma(n)})(a_0, a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}),$$

et par suite une application

$$\tilde{L}_3 : H_{3,k}(\mathfrak{g}_A) \to HD_2(A),$$

où $\tilde{L}_3$ est induite par

$$\begin{aligned}
L_3(a_0 u_0 \wedge a_1 u_1 \wedge a_2 u_2) &= \operatorname{Trace}(\operatorname{ad} u_0 \circ \operatorname{ad} u_1 \circ \operatorname{ad} u_2)(a_0, a_1, a_2) \\
&\quad - \operatorname{Trace}(\operatorname{ad} u_0 \circ \operatorname{ad} u_2 \circ \operatorname{ad} u_1)(a_0, a_2, a_1) \\
&= \operatorname{Trace}(\operatorname{ad} u_0 \circ \operatorname{ad}[u_1, u_2])(a_0, a_1, a_2) \\
&= \langle u_0, [u_1, u_2] \rangle (a_0, a_1, a_2).
\end{aligned}$$

Il est alors immédiat que

$$\tilde{L}_3 \circ \tilde{\lambda}_3 = \langle h_\alpha, h_\alpha \rangle \ \mathrm{Id} ,$$

et par suite $\tilde{L}_3$ est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.

En ce qui concerne le calcul du $H_{2,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A)$ on procède de manière analogue, en remplaçant le complexe $(A^*/_{1-X, 1+Y}, b)$, par le complexe $(A^*/_{1+Y}, b)$, dont l'homologie est $H_*^-(A)$.

Enfin on ramène facilement le cas général au cas déployé; en effet supposons que (L, k) soit une extension galoisienne, de degré fini, telle que $\mathfrak{g} \otimes_k L$ soit déployée sur L. On applique ce que l'on vient de démontrer à la situation:

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k L , \quad A' = A \otimes_k L , \quad \mathfrak{g}'_{A'} = \mathfrak{g}' \otimes_k A' = \mathfrak{g}_A \otimes_k L .$$

Pour achever la preuve, il suffit de remarquer que l'on a des isomorphismes

$$H_{*,k}(\mathfrak{g}_A) \xrightarrow{\sim} [H_{*,L}(\mathfrak{g}_A \otimes_k L)]^{G_{L/k}}$$
$$H_{*,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A) \xrightarrow{\sim} [H_{*,L}(\mathfrak{g}_A \otimes_k L, \mathfrak{g}_A \otimes_k L)]^{G_{L/k}}$$

où $G_{L/k}$ est le groupe de Galois de (L, k): ce groupe est fini et on est en caractéristique nulle.

4. Remarques sur le cas de $\mathfrak{sl}(r, A)$, $r \geqslant 3$

Soit $\mathfrak{sl}(r, A) \simeq A \otimes \mathfrak{sl}(n, k)$, l'algèbre de Lie des $r \times r$ matrices de trace nulle. Explicitons l'isomorphisme

$$\tilde{\mathscr{L}}_3 : H_{3,k}(\mathfrak{sl}(r, A)) \to HC_2(A) ,$$

induit (pour $r \geqslant 3$), par l'application de [LQ]:

$$\mathscr{L}(a_0 X_0 \wedge a_1 X_1 \wedge \ldots \wedge a_n X_n)$$
$$= (-1)^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma \ \mathrm{Trace}\,(X_0 X_{\sigma(-1)} \ldots X_{\sigma(n)})\,(a_0, a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) ;$$

(L'application L considérée dans le paragraphe précédent ne convient pas ici). On peut écrire

$$\mathscr{L}_3(a_0 X_0 \wedge a_1 X_1 \wedge a_2 X_2)$$
$$= \mathrm{Trace}\,(X_0 X_1 X_2)\,(a_0, a_1, a_2) - \mathrm{Trace}\,(X_0 X_2 X_1)\,(a_0, a_2, a_1)$$
$$= \frac{1}{2} \psi(X_0, X_1, X_2)\,((a_0, a_1, a_2) - (a_0, a_2, a_1))$$
$$+ \frac{1}{2} \phi(X_0, X_1, X_2)\,((a_0, a_1, a_2) + (a_0, a_2, a_1))$$