2. Préliminaires et énoncé des résultats

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1987)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Pour $SU(2, \mathbf{C})$, il existe un homomorphisme $H_3(SU(2, \mathbf{C})) \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, construit à l'aide d'une classe de Cheeger-Simons, reliée au volume sur S^3 ([Ch S], [Ch]), dont on sait qu'il ne dépend que des points algébriques de $SU(2, \mathbf{C})$ et a, par suite, une image dénombrable; mais on ignore le rang de cette image; de plus, la question a été posée de savoir si l'application $H_3(SU(2, \bar{\mathbf{Q}})) \to H_3(SU(2, \mathbf{C}))$ est surjective, où $\bar{\mathbf{Q}}$ est la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$.

Les résultats sont reliés à l'aspect « infinitésimal » de ces questions. On prend $A = \mathbf{R}$, $k = \mathbf{Q}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, \mathbf{Q})$, l'algèbre des matrices antisymétriques à coefficients rationnels qui est isomorphe à $\mathfrak{su}(2, \mathbf{Q}[\sqrt{-1}])$. Alors $\mathfrak{g}_A = \mathfrak{so}(3, \mathbf{R})$ ($\simeq \mathfrak{su}(2, \mathbf{C})$).

Comme cas très particuliers des propositions 1 et 2 ci-dessus, on obtient:

i) *Il existe des isomorphismes de* $\mathbf{Q}$*-espaces vectoriels*

$$H_{3,\mathbf{Q}}(\mathfrak{su}(2, \bar{\mathbf{Q}})) \tilde{\to} H_{3,\mathbf{Q}}(\mathfrak{su}(2, \mathbf{C})) \tilde{\to} \bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$$

où $\bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$ *est l'ensemble des nombres algébriques réels.*

ii) *Le groupe d'homologie* $H_{2,\mathbf{Q}}(\mathfrak{so}(3, \mathbf{R}), \mathbf{R}^3)$ *est nul.*

APPLICATIONS À L'HOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE LACETS

Pour $\mathfrak{g}$ une algèbre simple complexe, soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de lacets ([Ka])

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathbf{C}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbf{C}} \mathfrak{g},$$

considérée comme $\mathbf{C}$-algèbre; on a comme conséquence facile des théorèmes 1 et 2

$$H_3(\tilde{\mathfrak{g}}) \simeq \mathbf{C},$$
$$H_2(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}) = 0,$$

et ceci est indépendant du type de $\mathfrak{g}$.

J'ai bénéficié, pour cet article, des remarques et suggestions de J. Carmona, P. Cartier et Ch. Kassel.

2. PRÉLIMINAIRES ET ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

On renvoie à l'article [L Q] de J. L. Loday et D. Quillen, pour la notion d'homologie cyclique d'une algèbre (voir aussi l'article de synthèse [Ca]).

On s'intéresse ici à une notion analogue, où le groupe cyclique est remplacé par le groupe diédrale. Cette notion d'homologie diédrale est due à J. L. Loday ([L]), dont nous utiliserons les notations.

Pour ne pas compliquer, nous supposons toujours que A est commutative, sur k de caractéristique nulle.

On note A^n la puissance tensorielle n-ième de A sur k et on pose

$$C_n = A^{n+1}/\mathscr{D}_{n+1},$$

où $\mathscr{D}_{n+1}$ est le k-sous-espace de A^{n+1} engendré par les $(a_0, \ldots, a_n)$ où l'une des composantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est égale à 1 $\big((a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est écrit pour $a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n\big)$.

On introduit de plus comme dans [L] s, X, B, b définis par:

$$s(a_0, \ldots, a_n) = (1, a_0, \ldots, a_n)$$

$$X(a_0, \ldots, a_n) = (-1)^n (a_n, a_0, \ldots, a_{n-1})$$

$$B = sL \quad \text{où} \quad L = 1 + X + \ldots + X^{n-1}$$

$$b(a_0, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_0, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_n) + (-1)^n (a_n a_0, \ldots, a_{n-1});$$

On considère de plus l'involution de C_n, donnée par

$$Y: C_n \to C_n$$

$$(a_0, \ldots, a_n) \mapsto (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (a_0, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1);$$

$C_n^+ \oplus C_n^-$ est la décomposition de C_n par rapport à Y.

L'homologie diédrale de A est définie comme l'homologie du complexe

$$(C_*/_{1-X,\,1+Y}, b)$$

ou, ce qui est la même chose, l'homologie du complexe

$$(A^{*+1}/_{1-X,\,1+Y}, b);$$

On note cette homologie $HD_*(A)$. (Elle est notée ${}_{-1}HD_*(A)$ dans [L]).

En procédant comme dans [L], on montre que $HD_*(A)$ s'identifie à l'homologie du bicomplexe $\mathbf{B}^-$ suivant:

$$\begin{tikzcd}
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C_2^- \arrow[d, "b"'] & & C_1^+ \arrow[ll, "B"'] \arrow[d, "b"'] & & C_0^- \arrow[ll, "B"'] \\
C_1^- \arrow[d, "b"'] & & C_0^+ \arrow[ll, "B"'] & & \\
C_0^- & & & &
\end{tikzcd}$$

Soit $(\Omega^*_{A/k}, d)$ le complexe de de Rham. L'involution de $\Omega^*_{A/k}$ donnée par

$$\tilde{Y}(a_0 da_1 \dots da_n) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_0 da_n da_{n-1} \dots da_1 ,$$

a pour restriction à $\Omega^n_{A/k}$, l'identité si n est pair, moins l'identité si n est impair; on en déduit que l'application

$$\begin{aligned} \mu: \quad & C_* \to \Omega^*_{A/k} \\ & (a_0, \dots, a_n) \mapsto \frac{1}{n!} a_0 da_1 \dots da_n , \end{aligned}$$

induit un morphisme de bicomplexes de $\mathbf{B}^-$ dans le bicomplexe

$$\begin{array}{ccccccccc}
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Omega^3_{A/k} & \xleftarrow{d} & \Omega^2_{A/k} & \xleftarrow{d} & \Omega^1_{A/k} & \xleftarrow{d} & \Omega^0_{A/k} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
\Omega^1_{A/k} & \xleftarrow{d} & \Omega^0_{A/k} & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & &
\end{array}$$

Dans le cas où l'homologie de Hochschild de A est donnée par les formes différentielles (voir la remarque ci-dessous), on en déduit, tout comme dans [L Q], des isomorphismes

$$HD_0(A) = 0$$
$$HD_1 \simeq \Omega^1_{A/k}/dA$$
$$HD_2(A) \simeq H^0_{DR}(A)$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$HD_{2n}(A) \simeq H^{2n-2}_{DR}(A) \oplus H^{2n-6}_{DR}(A) \oplus \dots$$
$$HD_{2n+1}(A) \simeq \Omega^{2n+1}_{A/k}/d\,\Omega^{2n}_{A/k} \oplus H^{2n-3}_{DR}(A) \oplus H^{2n-7}_{DR}(A) \oplus \dots$$

Nous utiliserons les remarques suivantes:

i) D'après [H.K.R.], ces isomorphismes sont valables si A est une k-algèbre lisse.

Ils sont aussi vrais si A est un corps, extension de k; il faut vérifier que sous cette hypothèse, on a pour l'homologie de Hochschild

$$H_*(A) \simeq \Omega^*_{A/k}\,;$$

le fait est noté dans [H.K.R.] (5.3), si A est une extension finiment engendrée de k; un argument de limites inductives permet de lever la restriction.

ii) L'isomorphisme

$$HD_2(A) \xrightarrow{\sim} H^0_{DR}(A)\,,$$

est induit par l'application

$$A^3 \to A$$
$$(a_0, a_1, a_2) \mapsto a_0 a_1 a_2\,.$$

iii) La partie négative de l'homologie de Hochschild $H_*(A)$, pour l'involution Y, est notée $H^-_*(A)$. Si A est lisse ou un corps extension de k, on a

$$H^-_{2n}(A) = 0$$
$$H^-_{2n+1}(A) \simeq \Omega^{2n+1}_{A/k}\,.$$

On peut maintenant énoncer:

THÉORÈME 1. *Soit A une k-algèbre commutative, avec unité et $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie simple. Si $\mathfrak{g}$ est de type $A_n (n \geqslant 2)$:*

$$H_{3,k}(\mathfrak{g}_A) \simeq HC_2(A)\,;$$

dans tous les autres cas:

$$H_{3,k}(\mathfrak{g}_A) \simeq HD_2(A)\,.$$

(HC_* est l'homologie cyclique et les isomorphismes sont des isomorphismes de k-espaces vectoriels).

THÉORÈME 2. *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 1, si $\mathfrak{g}$ est de type $A_n (n \geqslant 2)$:*

$$H_{2,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A) \simeq H_2(A)\,;$$

dans tous les autres cas:

$$H_{2,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A) \simeq H_2^-(A).$$

(Ici les isomorphismes sont des isomorphismes de A-modules.)

Le cas particulier suivant semble intéressant (voir introduction): si $\mathfrak{l}$ est une **R**-algèbre de Lie réelle simple, non de type $A_n (n \geqslant 2)$

$$H_{3,\mathbf{Q}}(\mathfrak{l}) \simeq \bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}\,.$$
$$H_{2,\mathbf{Q}}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) = 0,$$

où l'homologie est prise au sens des algèbres rationnelles;

Par contre, si $\mathfrak{l}$ est de type $A_n (n \geqslant 2)$, on a

$$H_{3,\mathbf{Q}}(\mathfrak{l}) \simeq (\bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}) \oplus (\Omega^2_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}/d\,\Omega^1_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}})$$
$$H_{2,\mathbf{Q}}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) \simeq \Omega^2_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}};$$

et on sait que $\Omega^2_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}/d\,\Omega^1_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}$ est un **Q**-espace vectoriel, de dimension la puissance du continu, et que $\Omega^2_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}$ est un **R**-espace vectoriel, de dimension la puissance du continu.

Comme me l'a fait remarquer Ch. Kassel, le cas du type $A_n (n \geqslant 2)$ est implicitement contenu dans [LQ] et [G]. Sans revenir en détail sur ce cas, on fera quelques remarques au § 4.

3. Cas où $\mathfrak{g}$ n'est pas de type $A_n (n \geqslant 2)$

Calcul de certains espaces de coinvariants

Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ une k-algèbre déployée, d'algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ et de système de racines Δ. $(h_\alpha, e_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ est une famille de générateurs de Chevalley telle que

$$\forall \alpha \in \Delta, [h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha, \quad [h_\alpha, e_{-\alpha}] = -2e_\alpha, \quad [e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha;$$
$$R = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \quad \text{est une base de } \Delta.$$

Tous les produits tensoriels et extérieurs sont pris sur k; $(\ )_{\mathfrak{g}}$ désigne l'espace des coinvariants d'un $\mathfrak{g}$-module.

Dans ce paragraphe, A est une k-algèbre commutative quelconque.

Le lemme suivant est bien connu.

Lemme 1. *Soit $\mathfrak{g}$ simple déployée sur k. La forme de Killing*

$$<\,,\,>: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$$