

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 33 (1987)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** HOMOLOGIE DE DEGRÉ TROIS D'ALGÈBRES DE LIE SIMPLES DÉPLOYÉES ÉTENDUES À UNE ALGÈBRE COMMUTATIVE  
**Autor:** Cathelineau, J. L.  
**Kapitel:** 2. Préliminaires et énoncé des résultats  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-87889>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Pour  $SU(2, \mathbf{C})$ , il existe un homomorphisme  $H_3(SU(2, \mathbf{C})) \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ , construit à l'aide d'une classe de Cheeger-Simons, reliée au volume sur  $S^3$  ([Ch S], [Ch]), dont on sait qu'il ne dépend que des points algébriques de  $SU(2, \mathbf{C})$  et a, par suite, une image dénombrable; mais on ignore le rang de cette image; de plus, la question a été posée de savoir si l'application  $H_3(SU(2, \bar{\mathbf{Q}})) \rightarrow H_3(SU(2, \mathbf{C}))$  est surjective, où  $\bar{\mathbf{Q}}$  est la clôture algébrique de  $\mathbf{Q}$  dans  $\mathbf{C}$ .

Les résultats sont reliés à l'aspect « infinitésimal » de ces questions. On prend  $A = \mathbf{R}$ ,  $k = \mathbf{Q}$  et  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, \mathbf{Q})$ , l'algèbre des matrices antisymétriques à coefficients rationnels qui est isomorphe à  $\mathfrak{su}(2, \mathbf{Q}[\sqrt{-1}])$ . Alors  $\mathfrak{g}_A = \mathfrak{so}(3, \mathbf{R}) (\simeq \mathfrak{su}(2, \mathbf{C}))$ .

Comme cas très particuliers des propositions 1 et 2 ci-dessus, on obtient :

i) *Il existe des isomorphismes de  $\mathbf{Q}$ -espaces vectoriels*

$$H_{3, \mathbf{Q}}(\mathfrak{su}(2, \bar{\mathbf{Q}})) \xrightarrow{\sim} H_{3, \mathbf{Q}}(\mathfrak{su}(2, \mathbf{C})) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$$

où  $\bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$  est l'ensemble des nombres algébriques réels.

ii) *Le groupe d'homologie  $H_{2, \mathbf{Q}}(\mathfrak{so}(3, \mathbf{R}), \mathbf{R}^3)$  est nul.*

#### APPLICATIONS À L'HOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE LACETS

Pour  $\mathfrak{g}$  une algèbre simple complexe, soit  $\tilde{\mathfrak{g}}$  l'algèbre de lacets ([Ka])

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathbf{C}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbf{C}} \mathfrak{g},$$

considérée comme  $\mathbf{C}$ -algèbre; on a comme conséquence facile des théorèmes 1 et 2

$$H_3(\tilde{\mathfrak{g}}) \simeq \mathbf{C},$$

$$H_2(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}) = 0,$$

et ceci est indépendant du type de  $\mathfrak{g}$ .

J'ai bénéficié, pour cet article, des remarques et suggestions de J. Carmona, P. Cartier et Ch. Kassel.

## 2. PRÉLIMINAIRES ET ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

On renvoie à l'article [L Q] de J. L. Loday et D. Quillen, pour la notion d'homologie cyclique d'une algèbre (voir aussi l'article de synthèse [Ca]).

On s'intéresse ici à une notion analogue, où le groupe cyclique est remplacé par le groupe diédral. Cette notion d'homologie diédrale est due à J. L. Loday ([L]), dont nous utiliserons les notations.

Pour ne pas compliquer, nous supposons toujours que  $A$  est commutative, sur  $k$  de caractéristique nulle.

On note  $A^n$  la puissance tensorielle  $n$ -ième de  $A$  sur  $k$  et on pose

$$C_n = A^{n+1} / \mathcal{D}_{n+1},$$

où  $\mathcal{D}_{n+1}$  est le  $k$ -sous-espace de  $A^{n+1}$  engendré par les  $(a_0, \dots, a_n)$  où l'une des composantes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  est égale à 1 ( $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  est écrit pour  $a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n$ ).

On introduit de plus comme dans [L]  $s, X, B, b$  définis par :

$$s(a_0, \dots, a_n) = (1, a_0, \dots, a_n)$$

$$X(a_0, \dots, a_n) = (-1)^n (a_n, a_0, \dots, a_{n-1})$$

$$B = sL \quad \text{où} \quad L = 1 + X + \dots + X^{n-1}$$

$$b(a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_0, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n) + (-1)^n (a_n a_0, \dots, a_{n-1});$$

On considère de plus l'involution de  $C_n$ , donnée par

$$Y: C_n \rightarrow C_n$$

$$(a_0, \dots, a_n) \mapsto (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (a_0, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1);$$

$C_n^+ \oplus C_n^-$  est la décomposition de  $C_n$  par rapport à  $Y$ .

L'homologie diédrale de  $A$  est définie comme l'homologie du complexe

$$(C_* /_{1-X, 1+Y}, b)$$

ou, ce qui est la même chose, l'homologie du complexe

$$(A^{*+1} /_{1-X, 1+Y}, b);$$

On note cette homologie  $HD_*(A)$ . (Elle est notée  ${}_{-1}HD_*(A)$  dans [L]).

En procédant comme dans [L], on montre que  $HD_*(A)$  s'identifie à l'homologie du bicomplexe  $\mathbf{B}^-$  suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C_2^- & \xleftarrow{B} & C_1^+ & \xleftarrow{B} & C_0^- \\
 {}^b \downarrow & & {}^b \downarrow & & \\
 C_1^- & \xleftarrow{B} & C_0^+ & & \\
 {}^b \downarrow & & & & \\
 C_0^- & & & & 
 \end{array}$$

Soit  $(\Omega_{A/k}^*, d)$  le complexe de de Rham. L'involution de  $\Omega_{A/k}^*$  donnée par

$$\tilde{Y}(a_0 da_1 \dots da_n) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_0 da_n da_{n-1} \dots da_1,$$

a pour restriction à  $\Omega_{A/k}^n$ , l'identité si  $n$  est pair, moins l'identité si  $n$  est impair; on en déduit que l'application

$$\begin{aligned} \mu: C_* &\rightarrow \Omega_{A/k}^* \\ (a_0, \dots, a_n) &\mapsto \frac{1}{n!} a_0 da_1 \dots da_n, \end{aligned}$$

induit un morphisme de bicomplexes de  $\mathbf{B}^-$  dans le bicomplexe

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \Omega_{A/k}^3 & \xleftarrow{d} & \Omega_{A/k}^2 & \xleftarrow{d} & \Omega_{A/k}^1 & \xleftarrow{d} & \Omega_{A/k}^0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & & & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\ \Omega_{A/k}^1 & \xleftarrow{d} & \Omega_{A/k}^0 & & & & & & & & \\ & & \downarrow & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & \end{array}$$

Dans le cas où l'homologie de Hochschild de  $A$  est donnée par les formes différentielles (voir la remarque ci-dessous), on en déduit, tout comme dans [L Q], des isomorphismes

$$\begin{aligned} HD_0(A) &= 0 \\ HD_1 &\simeq \Omega_{A/k}^1/dA \\ HD_2(A) &\simeq H_{DR}^0(A) \\ \dots & \\ \dots & \\ HD_{2n}(A) &\simeq H_{DR}^{2n-2}(A) \oplus H_{DR}^{2n-6}(A) \oplus \dots \\ HD_{2n+1}(A) &\simeq \Omega_{A/k}^{2n+1}/d \Omega_{A/k}^{2n} \oplus H_{DR}^{2n-3}(A) \oplus H_{DR}^{2n-7}(A) \oplus \dots \end{aligned}$$

Nous utiliserons les remarques suivantes :

i) D'après [H.K.R.], ces isomorphismes sont valables si  $A$  est une  $k$ -algèbre lisse.

Ils sont aussi vrais si  $A$  est un corps, extension de  $k$ ; il faut vérifier que sous cette hypothèse, on a pour l'homologie de Hochschild

$$H_*(A) \simeq \Omega_{A/k}^* ;$$

le fait est noté dans [H.K.R.] (5.3), si  $A$  est une extension finiment engendrée de  $k$ ; un argument de limites inductives permet de lever la restriction.

ii) L'isomorphisme

$$HD_2(A) \xrightarrow{\sim} H_{DR}^0(A) ,$$

est induit par l'application

$$\begin{aligned} A^3 &\rightarrow A \\ (a_0, a_1, a_2) &\mapsto a_0 a_1 a_2 . \end{aligned}$$

iii) La partie négative de l'homologie de Hochschild  $H_*(A)$ , pour l'involution  $Y$ , est notée  $H_*^-(A)$ . Si  $A$  est lisse ou un corps extension de  $k$ , on a

$$\begin{aligned} H_{2n}^-(A) &= 0 \\ H_{2n+1}^-(A) &\simeq \Omega_{A/k}^{2n+1} . \end{aligned}$$

On peut maintenant énoncer :

**THÉORÈME 1.** *Soit  $A$  une  $k$ -algèbre commutative, avec unité et  $\mathfrak{g}$  une  $k$ -algèbre de Lie simple. Si  $\mathfrak{g}$  est de type  $A_n (n \geq 2)$  :*

$$H_{3,k}(\mathfrak{g}_A) \simeq HC_2(A) ;$$

*dans tous les autres cas :*

$$H_{3,k}(\mathfrak{g}_A) \simeq HD_2(A) .$$

*( $HC_*$  est l'homologie cyclique et les isomorphismes sont des isomorphismes de  $k$ -espaces vectoriels).*

**THÉORÈME 2.** *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 1, si  $\mathfrak{g}$  est de type  $A_n (n \geq 2)$  :*

$$H_{2,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A) \simeq H_2(A) ;$$

dans tous les autres cas :

$$H_{2,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A) \simeq H_2^-(A).$$

(Ici les isomorphismes sont des isomorphismes de  $A$ -modules.)

Le cas particulier suivant semble intéressant (voir introduction) : si  $I$  est une  $\mathbf{R}$ -algèbre de Lie réelle simple, non de type  $A_n(n \geq 2)$

$$H_{3,\mathbf{Q}}(I) \simeq \bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}.$$

$$H_{2,\mathbf{Q}}(I, I) = 0,$$

où l'homologie est prise au sens des algèbres rationnelles ;

Par contre, si  $I$  est de type  $A_n(n \geq 2)$ , on a

$$H_{3,\mathbf{Q}}(I) \simeq (\bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}) \oplus (\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}^2 / d \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}^1)$$

$$H_{2,\mathbf{Q}}(I, I) \simeq \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}^2 ;$$

et on sait que  $\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}^2 / d \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}^1$  est un  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel, de dimension la puissance du continu, et que  $\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}^2$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel, de dimension la puissance du continu.

Comme me l'a fait remarquer Ch. Kassel, le cas du type  $A_n(n \geq 2)$  est implicitement contenu dans [LQ] et [G]. Sans revenir en détail sur ce cas, on fera quelques remarques au § 4.

### 3. CAS OÙ $\mathfrak{g}$ N'EST PAS DE TYPE $A_n(n \geq 2)$

#### CALCUL DE CERTAINS ESPACES DE COINVARIANTS

Soit  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  une  $k$ -algèbre déployée, d'algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  et de système de racines  $\Delta$ .  $(h_\alpha, e_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$  est une famille de générateurs de Chevalley telle que

$$\forall \alpha \in \Delta, [h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha, \quad [h_\alpha, e_{-\alpha}] = -2e_{-\alpha}, \quad [e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha ;$$

$$R = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \text{ est une base de } \Delta.$$

Tous les produits tensoriels et extérieurs sont pris sur  $k$ ;  $(\ )_{\mathfrak{g}}$  désigne l'espace des coinvariants d'un  $\mathfrak{g}$ -module.

Dans ce paragraphe,  $A$  est une  $k$ -algèbre commutative quelconque.

Le lemme suivant est bien connu.

LEMME 1. Soit  $\mathfrak{g}$  simple déployée sur  $k$ . La forme de Killing

$$\langle \ , \ \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow k$$