Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 33 (1987)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES Propriétés algébriques et arithmétiques

Autor: Cerlienco, L. / Mignotte, M. / Piras, F.

Kapitel: III. MÉTHODES TRANSCENDANTES

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-87887

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 23.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

alors f est une fonction rationnelle. (Le corps $\mathbf{C}_p$ est le complété de la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$).

Le théorème de Borel correspond au cas où S est vide. Le principe de la démonstration du théorème ci-dessous est le suivant. On considère, pour k assez grand, le déterminant du Hankel H_N d'ordre N de la suite (ξ_{n+k}) et on majore $|H_N|_v$ pour toutes les places v du corps $\mathbf{Q}$:

— Si v est ultramétrique et n'appartient pas à S, alors trivialement

$$|H_N|_v \leqslant 1 .$$

— Si $v \in S$ on utilise les inégalités de Cauchy dans $\mathbf{C}_p$.

— Si v est la valeur absolue ordinaire, on utilise les inégalités de Cauchy dans $\mathbf{C}$.

Pour k et N assez grands, on aboutit à l'estimation

$$\prod_v |H_N|_v < 1 ,$$

qui implique $H_N = 0$. D'où la conclusion.

Une démonstration détaillée figure en [2], ainsi que celle du théorème de Polya-Bertrandias, qui généralise le théorème précédent.

III. Méthodes transcendantes

1. *Minoration de* $|\xi_n|$

Grâce au théorème de Roth-Ridout, K. Mahler [35] avait obtenu une minoration non effective de $|\xi_n|$ pour une s.r.l. binaire. Les méthodes transcendantes conduisent à des résultats effectifs.

Soit (ξ_n) une s.r.l. donnée par

$$\xi_n = P_1(n)\,\omega_1^n + \ldots + P_k(n)\,\omega_k^n \quad \text{pour} \quad n \geqslant 0 , \quad \omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathbf{C} \text{ distincts} .$$

On peut supposer $|\omega_1| \geqslant |\omega_2| \geqslant \ldots \geqslant |\omega_k|$. Lorsque $|\omega_1| > |\omega_2|$ on a trivialement

$$|\xi_n| \sim |P_1(n)|\,|\omega_1|^n$$

donc $|\xi_n| \geqslant \dfrac{1}{2} P_1(n)\,|\omega_1|^n$ pour $n \geqslant n_0$ (effectif).

Minorer $|\xi_n|$ n'est plus aussi facile lorsque ω_1 et ω_2 sont de même module. Considérons en effet le cas le plus simple où (ξ_n) est réelle et donnée par $\xi_n = \omega_1^n + \omega_2^n$.

Si ω_1 et ω_2 sont réels alors $\omega_2 = -\omega_1$, et on a $\xi_n = 2\,\omega_1^n$ si n est pair et $\xi_n = 0$ sinon. Par contre si ω_1 n'est pas réel, $\omega_2 = \bar{\omega}_1$ et on peut écrire $\omega_1 = \rho\, e^{i\theta}$, $\omega_2 = \rho\, e^{-i\theta}$ avec ρ réel > 0; alors

$$\xi_n = 2\,\rho^n \cos(n\,\theta)\,, \qquad \text{avec} \qquad 0 < \theta < \pi\,.$$

Pour minorer ξ_n dans ce cas il faut minorer la quantité

$$\operatorname*{Min}_{k \in \mathbf{Z}} \left| n\theta - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \right|.$$

Le cas $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ correspond à une suite dégénérée, nous l'excluons. Ainsi, dans le cas non dégénéré, on aboutit à un problème d'approximation diophantienne.

Si f est une fonction de $\mathbf{N}$ dans lui-même qui croît arbitrairement vite, on peut trouver θ tel que, pour une infinité de valeurs de n, il existe k entier avec $\left| n\theta - \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi \right| < 1/f(n)$. Pour obtenir une minoration non triviale de $|\,\xi_n\,|$ il est donc nécessaire de faire des hypothèses sur l'approximation du quotient θ/π par des rationnels.

Depuis les travaux de Gel'fond, on sait que de telles hypothèses sont vérifiées lorsque $\cos\theta$ est un nombre algébrique, donc en particulier lorsque ω_1 et ω_2 sont algébriques. Nous nous limiterons donc à l'étude des s.r.l. à valeurs algébriques.

Définissons s par

$$|\,\omega_1\,| = \ldots = |\,\omega_s\,| > |\,\omega_{s+1}\,|\,,$$

et posons $r_j = 1 + \deg(P_j)$ pour $j = 1, \ldots, k$.

La première minoration effective a été obtenue — pour les s.r.l. binaires — par A. Schinzel [55]. Un théorème plus général a été ensuite publié en [38], où on montre que sous les hypothèses $s \leqslant 3$ et $r_1 = \ldots = r_s = 1$, il existe des constantes effectives c et n_0 telles que, pour $n \geqslant n_0$,

$$|\,\xi_n\,| \geqslant |\,\omega_1\,|^n\, n^{-c}\,, \qquad \text{pourvu que} \qquad \sum_{j=1}^{s} P_j\,.\,\omega_j^n \neq 0\,.$$

La démonstration est une application directe des estimations de A. Baker sur les formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques [4].

Depuis ces résultats ont été étendus en [45], où le résultat suivant est démontré.

THÉORÈME. *Supposons* $s \leqslant 3$ *et qu'au moins un des nombres* ω_i/ω_j, $1 \leqslant i < j \leqslant s$ *ne soit pas une racine de l'unité. Alors il existe des constantes effectivement calculables* $C_1 > 0$ *et* $C_2 > 0$ *qui ne dépendent que de* (ξ_n) *telles que l'on ait*

$$|\xi_n| \geqslant |\omega_1|^n \exp(-C_1(\operatorname{Log} n)^2),$$

pour $n \geqslant C_2$.

La preuve repose aussi sur les minorations de Baker. Pour $s \leqslant 3$, on peut donc déterminer effectivement toutes les solutions de l'équation $\xi_n = \alpha$ pour α fixé.

Si on se limite à l'équation $\xi_n = 0$, on montre dans le même article que les indices n peuvent être déterminés effectivement sous les hypothèses: $s = 4$, $|\omega_1| > 1$ et aucun des ω_i/ω_j, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, n'est une racine de l'unité.

Dans le cas général, la question suivante est ouverte.

PROBLÈME. Etant donné une s.r.l. entière (ξ_n), existe-t-il un algorithme permettant de trouver tous les indices n tels que $\xi_n = 0$?

Nous énonçons la conjecture suivante.

CONJECTURE. Il existe un entier positif k tel que, si $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(k)}$ sont k suites récurrentes linéaires entières quelconques, la propriété

$$\exists(n_1, n_2, \ldots, n_k), \qquad \xi^{(1)}_{n_1} + \ldots + \xi^{(k)}_{n_k} = 0$$

soit indécidable.

Sous certaines hypothèses (voir [45] th. 3), on peut aussi minorer $|\xi_m - \xi_n|$ de manière effective et donc alors — en principe — déterminer les répétitions de la suite (voir [44] pour un exemple).

2. *L'équation* $\xi_m = \eta_n$

En utilisant encore une estimation sur les formes linéaires de logarithmes, on peut montrer (cf. [41]) le résultat suivant.

THÉORÈME. *Soient* (ξ_m) *et* (η_n) *deux suites récurrentes linéaires à valeurs algébriques données par*

$$\xi_m = P_1(m)\,\omega_1^m + \ldots + P_h(m)\,\omega_h^m, \qquad P_1 \neq 0,$$

et

$$\eta_n = Q_1(n)\,\rho_1^n + \ldots + Q_k(n)\,\rho_k^n, \qquad Q_1 \neq 0.$$

On suppose

$$|\omega_1| > |\omega_2| \geqslant \dots, \quad |\rho_1| > |\rho_2| \geqslant \dots, \quad |\omega_1| > 1, \quad |\rho_1| > 1.$$

Alors,

(i) *il existe un entier* N_1, *effectivement calculable, tel que pour* $m+n \geqslant N_1$ *la relation* $\xi_m = \eta_n$ *implique*

$$(*) \qquad P_1(m)\,\omega_1^m = Q_1(n)\,\rho_1^n\,;$$

(ii) *il existe un entier* N_2, *effectivement calculable, tel que si l'équation* (*) *admet une solution vérifiant* $m+n \geqslant N_1$, *alors* ω_1 *et* ρ_1 *sont multiplicativement dépendants;*

(iii) *soit* Z *l'ensemble des couples* (m, n) *tels que* $\xi_m = \eta_n$, *alors:*

(a) *si* P_1 *et* Q_1 *sont de même degré,* Z *est égal à l'union d'un ensemble fini et d'une union finie de progressions arithmétiques,*

(b) *si les degrés de* P_1 *et* Q_1 *sont distincts et si* Z *est infini, cet ensemble n'est pas du type précédent et on a même*

$$\lim \operatorname{Log}(m_{k+1}/m_k) > 0\,, \quad \textit{si} \quad (m_k, n_k)$$

désigne la suite des points de Z, *ordonnée par valeurs croissantes de* m.

On peut noter que la preuve de (ii) est élémentaire et que le cas (b) peut se produire: exemple, $\xi_m = 2^m$ et $\eta_n = n\,2^n$. De plus, on sait décider si deux nombres algébriques sont multiplicativement indépendants ou non, donc — sous les hypothèses du théorème — on sait décider si Z est fini ou non. En supposant en outre que les $|\omega_i|$ d'une part, et les $|\rho_j|$ d'autre part, sont distincts on peut même déterminer effectivement Z.

Le cas de l'équation $\xi_m = \xi_n$, pour une s.r.l. binaire, a été traité grâce à une méthode analogue par J. C. Parmani et T. N. Shorey [49].

3. *Sur le plus grand diviseur premier de* ξ_n

Cette question fait l'objet du long article de C. L. Stewart [58], le lecteur désirant plus de détails pourra consulter ce travail. Bien entendu, nous supposons que (ξ_n) est une s.r.l. à valeurs entières. Dans l'écriture

$$\xi_n = P_1(n)\,\omega_1^n + \dots + P_k(n)\,\omega_k^n\,,$$

nous supposons de plus qu'aucun des quotients ω_i/ω_j, $i \neq j$, n'est une racine de l'unité. Enfin le plus grand diviseur d'un entier a sera noté $P(a)$ (avec la convention $P(0) = P(\pm 1) = 1$).

En 1921, Polya a montré que $\limsup P(\xi_n) = \infty$. Grâce à une généralisation p-adique du théorème de Thue-Siegel-Roth-Schmidt (généralisation due à Schlickewei), récemment R. van der Poorten et Schlickewei ont montré [53] qu'en fait $P(\xi_n)$ tend vers l'infini, une preuve indépendante mais voisine a été donné par Evertse [24]. A ce jour, ces preuves sont ineffectives.

Grâce à la théorie des formes linéaires de logarithmes, Stewart a démontré le résultat suivant (cf. [57]).

THÉORÈME. *Si on a* $|\omega_1| > |\omega_2| \geqslant \dots |\omega_k|$ *alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une constante effective* $N = N(\varepsilon, \omega_1, \dots, \omega_k, P_1, \dots, P_k)$ *telle que, pour* $n \geqslant N$, *on ait*

$$P(\xi_n) > (1-\varepsilon) \operatorname{Log} n$$

lorsque $\xi_n \neq P_1(n)\, \omega_1^n$.

Des résultats plus forts ont été démontrés pour les s.r.l. binaires, en particulier par C. L. Stewart et T. Shorey; voir [58] pour plus d'information.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABE, E. *Hopf algebras.* Cambridge Univ. Press, 1980.

[2] AMICE, Y. *Les nombres p-adiques.* Paris, P.U.F., 1975.

[3] BACHMANN, P. *Niedere Zahlentheorie.* Zweiter teil, Leipzig, Teubner, 1910.

[4] BAKER, A. A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms, II. *Acta Arithm. 24* (1973), 33-36.

[5] BERSTEL, J. *Transductions and context-free languages.* Stuttgart, Teubner, 1979.

[6] BERSTEL, J. et M. MIGNOTTE. Deux propriétés décidables des suites récurrentes linéaires. *Bull. Soc. Math. France 104* (1976), 175-184.

[7] BERSTEL, J. et REUTENAUER. *Les séries rationnelles et leurs langages.* Paris, Masson, 1984.

[8] BEUKERS, F. The multiplicity of binary recurrences. *Compositio Math. 40* (1980), 251-267.

[9] BEUKERS, F. and R. TIJDEMAN. On the multiplicity of binary complex recurrences. *Compositio Math. 51* (1984), 193-213.

[10] BOREVITCH, S. I. et I. R. SCHAFAREVITCH. *Théorie des nombres.* Paris, Gauthier-Villars, 1967.

[11] BOURBAKI, N. *Eléments de mathématiques. Algèbre, chap. 5.* Paris, Herman, 1959.

[12] CERLIENCO, L. e F. PIRAS. Risultante, m.c.m. e M.C.D. di due polinomi col metodo delle s.r.l. *Rend. Sem. Fac. Sci., Univ. Cagliari 50* (1980), 711-717.