

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 33 (1987)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES Propriétés algébriques et arithmétiques
Autor: Cerlienco, L. / Mignotte, M. / Piras, F.
Kapitel: II. Quelques exemples
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-87887>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

et $j'' \geq j$. Raisonnons par récurrence sur j' . Ce résultat est clair pour $j' = 1$. Supposons $j' > 1$ et l'assertion vraie jusqu'à l'ordre $j' - 1$. La relation

$$\begin{aligned} (E - \omega I) \left(\binom{n+j''-1}{j-1} \omega^n \right) &= \left(\binom{n+j''}{j-1} - \binom{n+j''-1}{j-1} \right) \omega^{n+1} \\ &= \binom{n+j''-1}{j-2} \omega^{n+1} = \omega \binom{n+j''-1}{j-2} \omega^n \end{aligned}$$

permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui prouve le résultat annoncé.

Si on pose en (5)

$$(6) \quad G(X) = X^m - a_{m-1}X^{m-1} - \dots - a_0, \quad m = \sum_{i=1}^k \tau_i,$$

on a donc démontré que la suite (ξ_n) vérifie la condition

$$(7) \quad \xi_{n+m} = a_{m-1} \xi_{n+m-1} + \dots + a_0 \xi_n \quad \text{pour } n > n_0,$$

c'est donc — par définition — une *suite récurrente linéaire* (en abrégé : s.r.l.); le polynôme $X^{n_0}G(X)$ sera appelé *échelle de récurrence*¹⁾ ou *polynôme caractéristique* et l'entier $(n_0 + m)$ *ordre* de la s.r.l. (ξ_n) (il s'agit d'un abus de langage car ces objets ne sont pas uniques; voir plus avant).

Supposons enfin que la relation (7) ait lieu. On vérifie alors aisément que l'expression

$$\left(\sum_{n \geq 0} \xi_n X^n \right) (a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \dots + a_{m-1} X - 1)$$

est un polynôme en X de degré au plus $n_0 + m$. La série $\Xi(X) = \sum_{n \geq 0} \xi_n X^n$ est alors une fraction rationnelle de la forme (1), ce qui achève la preuve de l'équivalence logique des trois objets considérés.

II. QUELQUES EXEMPLES

Ce paragraphe contient un certain nombre d'exemples variés qui illustrent les résultats généraux que nous venons de présenter. De plus de nombreux exemples figurent dans tout bon livre sur le calcul aux différences finies ou sur la combinatoire (entre autres [21], [26], [29], [30], [46]).

1) L'exemple le plus populaire de s.r.l. et aussi le plus ancien (il date de 1202) est la suite (F_n) de Fibonacci définie par les conditions

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{pour } n \geq 0$$

¹⁾ C'est la terminologie de E. Lucas [33].

de sorte que ses valeurs successives sont

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

Dans ce cas la formule (3) s'écrit

$$F_n = \frac{\omega_1^n - \omega_2^n}{\omega_1 - \omega_2} \quad \text{où} \quad \omega_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

en effet pour $n = 0$ et 1 le membre de droite vaut 0 et 1 et comme $\omega_i^2 = \omega_i + 1, i = 1, 2$, le membre de droite vérifie la même relation de récurrence que F_n .

2) Si $\xi = (\xi_n)_{n \geq 0}$ est une s.r.l. alors toute section de ξ , c'est-à-dire toute suite $\eta = (\xi_{an+b})_{n \geq 0}$, où a et b sont deux entiers ≥ 0 fixés, est une s.r.l.;

de plus si $G(X) = \prod_{i=1}^k (X - \omega_i)^{r_i}$ est le polynôme caractéristique de ξ alors le

polynôme $\prod_{i=1}^k (X - \omega_i^a)^{r_i}$ est un polynôme caractéristique de la suite η .

[En caractéristique zéro, ceci résulte du fait que $n \mapsto \xi_{an+b}$ est un polynôme exponentiel; en particulier, lorsque les ω_i sont rationnels on a pour tout n

$$\prod_{i=1}^k (E - \omega_i^a I) (\xi_{an+b}) = 0,$$

ξ_{an+b} étant exprimé comme combinaison des ω_j^{an} . Il en résulte que cette formule est vraie pour des ω_i appartenant à un anneau unitaire quelconque. C'est le « principe de prolongement des identités algébriques », voir [11], chap. V, § 2, scholie au théorème 3.]

3) Soient $\xi = (\xi_n)$ et $\eta = (\eta_n)$ deux s.r.l. de polynômes caractéristiques respectifs G et H . Alors leur somme $\xi + \eta = (\xi_n + \eta_n)$ est une s.r.l. admettant GH comme polynôme caractéristique.

[Preuve: $(GH)(E)(\xi + \eta) = H(E)[G(E)\xi] + G(E)[H(E)\eta] = 0$].

Par exemple, la suite $(\xi_n + \alpha)_{n \geq 0}$, α fixe, est une s.r.l. admettant $(X-1)G(X)$ comme échelle. On peut noter aussi que $(\theta_n) = (\xi_{n+1} - a\xi_n)$ a la même échelle $G(X)$ que (ξ_n) si $G(a) \neq 0$ mais l'échelle $G(X)/(X-a)$ dans le cas contraire. Plus généralement, si $G(X) = P(X)Q(X)$ et si $\xi = (\xi_n)$ est une s.r.l. d'échelle G , la suite $P(E) \cdot \xi$ est une s.r.l. qui admet Q comme échelle.

4) Soit a un entier ≥ 2 et $\xi^{(0)}, \dots, \xi^{(a-1)}$ des s.r.l.; alors la suite $\xi = (\xi_n)$ définie par $\xi_n = \xi_q^{(r)}$ où $n = aq + r, 0 \leq r < a$, est une s.r.l.; de plus,

si G_i est le polynôme caractéristique de $\xi^{(i)}$, $0 \leq i < a$, alors ξ admet le polynôme $G(X) \equiv G_0(X^a) \dots G_{a-1}(X^a)$ comme polynôme caractéristique. [D'après l'exemple précédent, il suffit de considérer le cas où une seule à la fois des $\xi^{(i)}$ n'est pas nulle; le résultat est alors évident.]

5) Soient $\xi = (\xi_n)$ et $\eta = (\eta_n)$ deux s.r.l. et $G = \prod_{i=1}^k (X - \omega_i)^{r_i}$ et

$H = \prod_{j=1}^h (X - \sigma_j)^{s_j}$ leurs polynômes caractéristiques; alors le produit de

Hadamard $\theta = (\xi_n \eta_n)_{n \geq 0}$ de ξ et η est une s.r.l. dont le polynôme caractéristique est $\prod_{i,j} (X - \omega_i \sigma_j)^{r_i + s_j - 1}$. [En caractéristique zéro, $n \mapsto \xi_n \eta_n$ est un

polynôme exponentiel donc θ est une s.r.l.; le cas général s'en déduit par le principe énoncé plus haut.] Par contre, si on considère le produit

$\xi * \eta = \zeta$ où $\zeta_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \xi_i \eta_{n-i}$, on trouve que ζ est une s.r.l. dont le polynôme caractéristique est $\prod_{i,j} (X - (\omega_i + \sigma_j))^{r_i + s_j - 1}$ [voir plus loin A IV 1].

6) Avec les notations de l'exemple précédent, le produit de Cauchy

$\theta_n = \sum_{i=0}^n \xi_i \eta_{n-i}$ de ξ et η est aussi une s.r.l. dont le polynôme caractéristique est GH [C'est le développement du produit de deux fractions

rationnelles]. Ainsi, si $\eta_n = 1$ pour tout n , on voit que $n \mapsto \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$ est une s.r.l. admettant $(X-1) \cdot G(X)$ comme échelle de récurrence.

7) Si $A(X)$ est un polynôme sur \mathcal{K} , non nul et de degré h et si $\xi = (A(n))_{n \geq 0}$, alors ξ est une s.r.l. admettant $(X-1)^{h+1}$ comme polynôme caractéristique.

8) Soit A comme dans l'exemple précédent et soit ξ une s.r.l. de polynôme caractéristique G ; toute suite η solution de l'équation $A(E)\eta = \xi$ est une s.r.l. admettant $A(X) \cdot G(X)$ comme polynôme caractéristique. [Preuve: $(AG)(E)\eta = G(E)[A(E)\eta] = G(E)\xi = 0$].

9) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée à coefficients dans \mathcal{K} ; posons $A^n = (a_{ij}(n))$, alors, pour tout couple (i, j) fixé, la suite $n \mapsto \xi_n = a_{ij}(n)$ est une s.r.l. admettant le polynôme minimal G de A comme polynôme caractéristique. [En développant la relation $G(A) \cdot A^n = 0$ on obtient $G(E)\xi = 0$]. (A ce sujet, voir aussi [14].)

10) Inversement toute s.r.l. ξ est obtenue à partir des puissances successives d'une matrice. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} \end{pmatrix}$$

la matrice-compagnon du polynôme caractéristique $G(X) = X^m - a_{m-1} - \dots - a_0$; alors si on pose

$$U_n = \begin{pmatrix} \xi_n \\ \vdots \\ \xi_{n+m-1} \end{pmatrix}$$

on a la relation

$$U_{n+1} = A U_n \quad \text{pour } n \geq 0,$$

donc $U_n = A^n U_0$. Il en résulte que, pour n fixé, on peut calculer U_n — donc en particulier ξ_n — en $O(\log n)$ opérations. [C'est un truc bien connu: on écrit n en binaire, $n = \sum e_i 2^i$, et $A^n = \prod_{e_i \neq 0} A^{2^i} \dots$].

11) Soit $T = (t_{ij})_{i,j \geq 0}$, où $t_{ij} = \binom{i}{j}$, la matrice de Pascal infinie; alors, pour chaque j fixé, la j -ième colonne de T est la $(j+1)$ -ième s.r.l. fondamentale (voir plus avant) d'échelle $(X-1)^{j+1}$.

12) L'exemple précédent est un cas particulier de celui-ci. Soit $H = (h_{ij})$ où

$$h_{ij} = h_{ij}(X_0, \dots, X_k) = \begin{cases} \sum_{i_0 + \dots + i_k = n-k} X_0^{i_0} \dots X_k^{i_k} & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est le polynôme homogène élémentaire de degré $n - k$ en les variables X_0, \dots, X_k . Alors vaut pour H un résultat analogue au précédent avec cette

fois le polynôme $G_{k+1} = \prod_{i=0}^k (X - X_i)$ comme échelle de récurrence. En particulier:

a) si $X_i = 1$ pour tout i , $H = T$.

b) si $X_i = n$, n entier fixé, alors $H = T^n$.

c) si $X_i = q^i$ alors H est le triangle des coefficients q -nomiaux (ou coefficients de Gauss)

$$h_{ij} = \binom{i}{j}_q = \begin{cases} \frac{(i)_q!}{(j)_q!(i-j)_q!} & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{si } i < j, \end{cases}$$

où $(0)_q! = 1$, $(i)_q! = \prod_{s=1}^i (s)_q$ et $(s)_q = 1 + q + \dots + q^{s-1}$.

d) si $X_i = i$ alors H est la matrice des nombres de Stirling de seconde espèce $h_{ij} = S(i, j)$ pour $i \geq j$, $h_{ij} = 0$ pour $i < j$, définis par la formule

$$X^i = \sum_{j=0}^i S(i, j) X(X-1) \dots (X-j+1)$$

(voir [15]).

13) Soit $\xi = (\xi_n)$ une s.r.l. d'échelle $G(X) = X^m - a_{m-1}X^{m-1} - \dots - a_0$; on peut regarder son terme ξ_n en tant que polynôme en les variables a_0, \dots, a_{m-1} . Alors la suite donnée par

$$\eta_n = \frac{\partial^h \xi_n}{\partial a_0^{h_0} \dots \partial a_{m-1}^{h_{m-1}}}$$

est une s.r.l. d'échelle G^{h+1} .

III. ESPACES DE s.r.l. SUR \mathcal{K}

Dans I nous avons étudié une suite particulière $\xi = (\xi_n)$ à valeurs dans \mathcal{K} et donné différentes conditions équivalentes pour que ξ soit une s.r.l. Ici, nous étudions des espaces de suites et nous utilisons la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs dans \mathcal{K} .

1. Nous considérons l'ensemble $\mathcal{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathcal{K} et l'ensemble $\mathcal{K}[[X]]$ des séries formelles sur \mathcal{K} , tous deux avec leur structure de \mathcal{K} -espace vectoriel. Nous identifierons implicitement $\mathcal{K}[X]$ à l'espace $\mathcal{K}^{(\mathbb{N})}$ des suites à valeurs dans \mathcal{K} ultimement nulles et $\mathcal{K}[[X]]$ à l'espace $\mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ des suites quelconques à valeurs dans \mathcal{K} (rappelons que $\mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ est le dual linéaire de $\mathcal{K}^{(\mathbb{N})}$).

2. Etant donné une s.r.l. ξ , l'ensemble de toutes les échelles de récurrence qu'elle vérifie est un idéal de l'anneau $\mathcal{K}[X]$ il admet donc un générateur unitaire unique que l'on appelle le *polynôme minimal* de ξ . On appellera *rang* de ξ le degré du polynôme précédent. Evidemment, une suite d'ordre m