

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 33 (1987)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES Propriétés algébriques et arithmétiques  
**Autor:** Cerlienco, L. / Mignotte, M. / Piras, F.  
**Kapitel:** Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-87887>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES ET ARITHMÉTIQUES

par L. CERLIENCO <sup>1)</sup>, M. MIGNOTTE <sup>2)</sup> et F. PIRAS <sup>1)</sup>

### INTRODUCTION

Les suites récurrentes linéaires sont nées en 1202 avec l'exemple donné par Fibonacci [25] de la suite 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ... . De ce fait une littérature très abondante leur a été consacrée et il est pratiquement impossible de réaliser une bibliographie à peu près complète sur ce sujet. Leur grand âge a encore pour conséquence fâcheuse que les suites récurrentes linéaires sont considérées comme des choses vieillotes, voire peu intéressantes. Cet article a pour but de montrer que l'étude de ces suites est encore active et pose certains problèmes fascinants — par exemple celui de savoir si une suite récurrente linéaire donnée possède ou non un zéro (plus précisément de construire un algorithme répondant à la question — ou de prouver qu'un tel algorithme général n'existe pas).

Ce travail est partagé en deux parties, l'étude des propriétés algébriques puis celle des propriétés arithmétiques. Chacune de ces parties comporte une collection d'exemples qui montrent les nombreux liens qui existent entre les suites récurrentes linéaires et des domaines mathématiques très variés. Nous ne voulons pas recopier ici la liste de toutes les questions qui sont abordées dans la suite; il nous semble plus intéressant de citer quelques exemples importants mais qui ne sont pas traités ici. Auparavant nous tenons à souligner que les choix que nous avons dus faire sont en grande partie subjectifs et reflètent à l'évidence les intérêts des auteurs.

Voici donc une liste (sans doute incomplète) de sujets importants où interviennent encore les suites récurrentes linéaires.

---

A.M.S. Subject Classification: 10 A 35.

Mots-Clés: Suites récurrentes linéaires.

<sup>1)</sup> Travail partiellement financé par les « Fondi ministeriali per la Ricerca 40% e 60% ».

<sup>2)</sup> Travail réalisé durant un séjour à Cagliari comme « Professore a contratto ».

En informatique, les suites récurrentes linéaires interviennent dans divers domaines théoriques ou pratiques. Elles apparaissent d'abord comme un objet fondamental en théorie des langages ; elles interviennent directement dans l'étude des morphismes itérés sur un monoïde (DOL-systems... voir [5]) et la théorie des séries rationnelles en variables non commutatives — sujet fondé essentiellement par M. P. Schützenberger — en est une généralisation naturelle et féconde (voir [7]). L'étude de la période d'une suite récurrente linéaire à valeurs dans un corps fini est à peine effleurée ici, alors qu'il s'agit d'un problème essentiel pour l'utilisation des suites récurrentes linéaires dans le domaine des communications (voir [27] ou [34]), elles correspondent au fonctionnement des registres à décalage (shift-registers).

Parmi les nombreuses propriétés arithmétiques des suites récurrentes linéaires, plusieurs ne sont pas traitées ici. Par exemple, les propriétés remarquables de divisibilité des suites de Lucas et de Lehmer ; nous renvoyons le lecteur à l'article de Stewart [57], qui contient de nombreuses références, ainsi qu'à [28]. Une autre question, difficile, est celle de l'inversion du produit de Hadamard (i.e. étant données trois suites d'entiers  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$  telles que les suites  $(b_n)$  et  $(c_n)$  soient récurrentes linéaires et que  $a_n b_n = c_n$  pour tout  $n$ , la suite  $(a_n)$  est-elle aussi récurrente linéaire ?); Cantor a montré que c'est vrai lorsque la série formelle associée à  $(b_n)$  possède une seule singularité, puis G. Pathiaux [50] a étendu ce résultat au cas où cette série possède au plus deux singularités, nous ne connaissons pas de preuve satisfaisante du cas général.

Autre exemple bien connu, les réduites du développement en fraction continue des irrationnels quadratiques ont des numérateurs et des dénominateurs qui sont les termes de suites récurrentes linéaires, ainsi les dénominateurs de la suite des réduites du développement du nombre d'or  $(1 + \sqrt{5})/2$  sont les nombres de Fibonacci ; cet exemple n'apparaît ici que sous la rubrique de l'équation de Pell-Fermat. Comme il est expliqué en [37], on peut aussi utiliser les suites récurrentes linéaires pour construire des algorithmes en théorie algébrique des nombres, c'est un peu la version arithmétique des algorithmes d'analyse numérique où les suites récurrentes linéaires sont utilisées pour obtenir des informations sur les racines d'un polynôme (voir la partie A.IV du présent article) ; pour un exposé très précis des algorithmes algébriques sur les polynômes voir le livre de Knuth<sup>1)</sup>. Voici cependant un exemple extrait de [40] : étant donné un polynôme  $P$  sur un corps  $\mathbf{F}_q$  fini, savoir si  $P$  se décompose en facteurs linéaires dans

<sup>1)</sup> The Art of Programming, Addison Wesley.

$F_q$  — la méthode banale consistant à calculer les valeurs de  $P(x)$  pour  $x$  parcourant  $F_q$  nécessite en moyenne près de  $q$  évaluations, en calculant l'ordre de la matrice compagnon de  $P$  on peut répondre à la question en  $O(\log q)$  opérations.

Quelques ouvrages contiennent une présentation générale des suites récurrentes linéaires, d'abord le livre de E. Lucas [33], ainsi que Bachman [3], Henrici [30] chap. 7 et [29], Montel [47], Pisot [52]. Signalons aussi le livre de Dickson [22] sur l'histoire de la théorie des nombres, le chapitre XVII est consacré aux suites récurrentes linéaires.

## A. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

### I. SÉRIES RATIONNELLES SUR UN CORPS $\mathcal{K}$

Soit une série formelle

$$\Xi(X) = \sum_{n \geq 0} \xi_n X^n$$

à coefficients dans un corps (commutatif)  $\mathcal{K}$ ; nous allons étudier différents critères de rationalité d'une telle série.

1. Supposons  $\Xi$  rationnelle, c'est-à-dire qu'il existe deux polynômes  $A$  et  $B$ , à coefficients dans  $\mathcal{K}$ , tels que

$$(1) \quad \Xi(X) = \frac{A(X)}{B(X)}, \quad B(0) \neq 0.$$

Soient alors  $\omega'_1, \dots, \omega'_k$  les racines du polynôme  $B$  dans une extension algébrique convenable  $\mathcal{L}$  du corps  $\mathcal{K}$  et soit  $\tau_i$  la multiplicité de  $\omega'_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ).

La décomposition en éléments simples de la fraction  $A/B$  est de la forme

$$(2) \quad \frac{A(X)}{B(X)} = Q(X) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\tau_i} \frac{\alpha_{ij}}{(X - \omega'_i)^j},$$

où  $Q(X)$  est un polynôme à coefficients dans  $\mathcal{K}$  (c'est le quotient de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ ) et où les  $\alpha_{ij}$  appartiennent au corps  $\mathcal{L}$ .

L'identité formelle, vraie pour tout entier positif  $j$ ,

$$(X - \omega)^{-j} = (-1)^j \omega^{-j} \sum_{n \geq 0} \binom{n+j-1}{j-1} (X \omega^{-1})^n \quad (\text{où } \binom{n}{0} = 1)$$