

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 33 (1987)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** THE COMPLEX CROSS RATIO ON THE HEISENBERG GROUP  
**Autor:** Korányi, A. / Reimann, H. M.

**Bibliographie**

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-87898>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.08.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

PROPOSITION 3. (a) For fixed distinct  $g_1, g_2, g_3$ , the range of the function  $g \mapsto (g_1, g_2, g_3, g)$  is a set  $H_\theta$  with some  $\theta = \theta(g_1, g_2, g_3)$ .

(b) Two triples of distinct points  $\{g_1, g_2, g_3\}$  and  $\{g'_1, g'_2, g'_3\}$  can be transformed into each other by an element of  $G$  if and only if  $\theta(g_1, g_2, g_3) = \theta(g'_1, g'_2, g'_3)$ .

*Proof.* Given  $g_1, g_2, g_3$ , we can as before transform  $g_1$  and  $g_2$  to  $e$  and  $\infty$ . The stabilizer of  $e$  and  $\infty$  is  $MA$ ; we can use an element of  $M$  to transform  $g_3$  to the form  $[t, pe_1]$  with  $p > 0$ , and then an element of  $A$  to transform it to  $g^\theta = [\sin \theta, (\cos \theta)^{1/2} e_1]$  with some  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ . It is clear that two different elements of this form cannot be mapped onto each other by  $MA$ .

Writing  $g = [t, z]$  we have

$$(e, \infty, g^\theta, g) = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{|z|^2 - it}.$$

The range of this, as  $g$  varies, is clearly  $H_\theta$ . From this the Proposition follows immediately.

## REFERENCES

- [1] KORÁNYI, A. The Poisson integral for generalized half-planes and bounded symmetric domains. *Ann. of Math.* 82 (1965), 332-350.
- [2] —— Geometric aspects of analysis on the Heisenberg group. In *Topics in Modern Harmonic Analysis*. Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma 1983, 209-258.
- [3] KORÁNYI, A. and H. M. REIMANN. Quasiconformal mappings on the Heisenberg group. *Invent. Math.* 80 (1985), 309-338.
- [4] MOSTOW, G. D. *Strong rigidity of locally symmetric spaces*. Ann. Math. Studies, Princeton University Press, Princeton 1973.
- [5] PANSU, P. Métriques de Carnot-Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un. To appear.

*(Reçu le 2 mars 1987)*

A. Korányi

Mathematics Dept.  
H. H. Lehman College  
Bronx, NY 10468  
U.S.A.

H. M. Reimann

Mathematisches Institut  
Universität Bern  
Sidlerstrasse 5  
3012 Bern, Switzerland