

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 33 (1987)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** FORMULES POUR LES TRISÉCANTES DES SURFACES ALGÉBRIQUES  
**Autor:** Barz, Patrick  
**Kapitel:** II) Trisécantes dans  $P^4$ : la théorie  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-87886>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Tout  $k$ -uplet curviligne dans  $\Sigma_0$ , de support un point de la courbe double  $\Gamma$  de  $S'$ , est limite (pour  $k \geq 3$ ) de  $k$ -uplets double dans  $\Sigma_0$ .

ii) Tout  $k$ -uplet curviligne dans  $\Sigma_0$  est limite de  $k$ -uplets curvilignes dans des fibres  $\Sigma_\lambda$  de  $\Sigma/\mathbf{C}$  avec  $\lambda \neq 0$ .

iii)  $\text{Hilb}^3 \Sigma_0$  est réduit au voisinage d'un triplet curviligne  $t$  de support un point-triple  $\{M\}$ , lorsque  $t \notin S' = (\Sigma_0)_{\text{red}} = \Sigma_0 \cap H$ .

$\text{Hilb}^2 \Sigma_0$  est réduit au voisinage d'un doublet  $d$  de support un point-pince  $\{P\}$ , lorsque  $d \notin S'$ .

$\text{Hilb}^2 \Sigma_0$  est réduit au voisinage d'un doublet  $d$  de support un point de  $\Gamma$ , lorsque  $d \notin S'$ .

*Preuves des propositions 3 et 4.* Il s'agit essentiellement, par des calculs en coordonnées, de se ramener à l'étude de modèles locaux pour  $\Sigma_0$ , d'abord au voisinage de la courbe double  $\Gamma$ , puis d'un point triple  $M$  et enfin d'un point pince. Or cette étude pour les modèles locaux a été faite dans [24]. Voir l'Annexe 3 pour tous les détails de calcul.

## II) TRISÉCANTES DANS $\mathbf{P}^4$ : LA THÉORIE

Soit  $S$  une surface de  $\mathbf{P}^4$  à singularités ordinaires. Notons  $n$  son degré,  $d$  le degré de la courbe double apparente et  $t$  le nombre de points-triples apparents, dans une projection générique sur un  $\mathbf{P}^3$ .

On regarde le diagramme, où les flèches sont les injections canoniques et les dimensions sont entre parenthèses :

$$(9) \quad Al^3 \mathbf{P}^4 \quad \xrightarrow{i} \quad \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4 \quad (12)$$

↑

$$\text{Hilb}_c^3 S \quad (6).$$

Le but de ce § II est de montrer la

**PROPOSITION 5.** Soit  $S$  une surface de  $\mathbf{P}^4$ , d'invariants  $(n, d, t)$ . Pour tout cycle  $Z$  dans  $A^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$ , la formule trisécante donnant le degré du 0-cycle  $Z.i^*[\text{Hilb}_c^3 S]$  est de la forme

$$T(S) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma)$$

où  $a_1, a_2, a_3, \alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des constantes ne dépendant que de  $Z$ .

### 1°) COMPOSANTES DE $\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0$

a) Notons  $S'$  la projection de  $S$  sur un  $\mathbf{P}^3$  générique de  $\mathbf{P}^4$ .  $S'$  admet une courbe double  $\Gamma$  avec  $t$  points-triples  $M_1 \dots M_t$  et  $v$  points-pince. En I.3.b on a construit un schéma relatif  $\Sigma/\mathbf{C}$  avec  $\Sigma_1 = S$  et  $(\Sigma_0)_{\text{red}} = S'$ . De plus (proposition 3), on a

$$(*) \quad \Sigma_0 = S' \cup \Gamma^{(1)} \cup M_1^{(2)} \cup \dots \cup M_t^{(2)}$$

où  $V^{(i)}$  désigne le  $i$ -ème voisinage infinitésimal de  $V$  dans  $\mathbf{P}^4$ ; on a  $\Sigma_0 \cap \mathbf{P}^3 = S'$ .

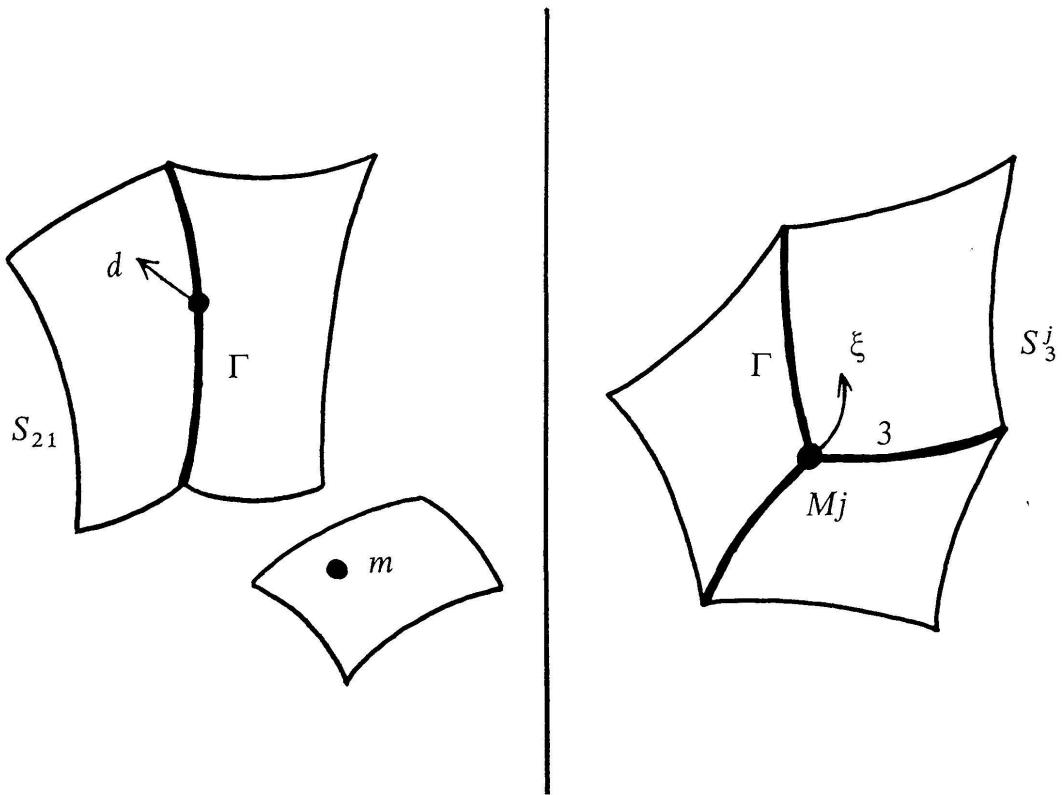
*Nous allons détailler les différentes composantes du schéma  $(\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0)_{\text{red}}$ .*

*Notation 1.* Notons  $S_{21}$  la sous-variété (localement fermée) de  $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$  formée des triplets  $t = d \cup m$  où

$d$  est un doublet de  $\mathbf{P}^4$  de support un point de  $\Gamma$ ,

$m$  est un point de  $S' - \Gamma$ .

Soit  $\overline{S_{21}}$  l'adhérence de  $S_{21}$  dans  $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$ .



Notons  $S_3^j$  pour  $j = 1, 2 \dots t$  la sous-variété de  $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$  des triplets curvilignes  $\xi$  de  $\mathbf{P}^4$ , de support  $\{M_j\}$ . Soit  $S_3$  leur réunion (disjointe).

*Remarque 5.* Bien sûr,  $\overline{S_{21}}$  et  $S_3$  sont contenus dans  $(\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0)_{\text{red}}$  d'après la structure nilpotente même de  $\Sigma_0$  (\*).

b) On a la

PROPOSITION 6.

- i)  $(\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0)_{\text{red}}$  est réunion de  $(\text{Hilb}_c^3 S')_{\text{red}}$ , de  $S_{21}$  et des  $S_3^j (j = 1, 2 \dots t)$ .
- ii)  $\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0$  est génériquement réduit le long de ces composantes.

*Preuve.* i) Soit  $t$  un triplet curviligne contenu dans  $\Sigma_0$ . Si  $t$  est contenu dans l'hyperplan  $\mathbf{P}^3$ , comme  $\Sigma_0 \cap \mathbf{P}^3 = S'$ , on a  $t \in (\text{Hilb}_c^3 S')_{\text{red}}$ . Si  $t \notin \mathbf{P}^3$ , le support de  $t$  ne peut être formé de trois points simples, puisque  $(\Sigma_0)_{\text{red}} = S'$  et  $S' \subset \mathbf{P}^3$ . Donc  $\text{Supp } t$  rencontre  $\Gamma$ , car en dehors de  $\Gamma$ , les faisceaux structuraux de  $S'$  et  $\Sigma_0$  sont égaux.

*Premier cas.*  $\text{Supp } t = \{a, b\}$  avec  $a \in \Gamma$  et  $t$  double en  $a$ . Si  $b \notin \Gamma$ , par définition, on a  $t \in S_{21}$ . Si  $b \in \Gamma$ , on le « bouge » en  $b' \in S' - \Gamma$  et donc  $t$  appartient à  $\overline{S_{21}}$ .

*Deuxième cas.*  $\text{Supp } t = \{a\}$  où  $a \in \Gamma$ . Si  $a$  est l'un des points-triples  $M_j$ , on a  $t \in S_3$ . Si  $a$  n'est pas l'un des points  $M_j$ , c'est soit un point-pince soit un point générique de  $\Gamma$ . Dans les deux cas,  $t$  est limite de triplets de support formé de deux points: en effet cela résulte de la proposition 4.

ii) La composante  $\text{Hilb}_c^3 S'$  est génériquement réduite d'après les lemmes 10 et 11 de l'Annexe 2 puisque  $S' \subset \mathbf{P}^3$  n'a que des singularités ordinaires. Par ailleurs  $S_3^j$  est génériquement réduite d'après la proposition 4 iii): un triplet générique de  $S_3^j$  n'est pas dans  $H$ . Enfin, montrons que  $S_{21}$  (donc  $\overline{S_{21}}$ ) est génériquement réduit. Soit  $d \cup m$  un triplet générique de  $S_{21}$ ; ainsi le support de  $d$  n'est pas un point triple et  $d \notin H$ . Alors  $\text{Hilb}^2 \Sigma_0$  est réduit au voisinage de  $d$  par la proposition 4 iii); d'où  $S_{21}$  réduit au voisinage de  $d \cup m$ .

2<sup>o</sup>) CONTRIBUTION DE CES COMPOSANTES DANS  $T(S)$

Soit  $Z \in A^3(\text{Al}^3 \mathbf{P}^4)$  un cycle fixé. Nous allons montrer trois lemmes, avec les notations précédentes.

LEMME 3. *Le degré du 0-cycle  $Z.i^* [\text{Hilb}_c^3 S']$  est de la forme*

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3}$$

où  $a_1, a_2$  et  $a_3$  ne dépendent que de  $Z$ .

LEMME 4. Le degré du 0-cycle  $Z.i^*[S_3]$  est de la forme  $\alpha t$  où  $\alpha$  ne dépend que de  $Z$ . ( $S_3$  désigne la réunion disjointe des  $S_3^j$  pour  $j=1, 2 \dots t.$ )

LEMME 5. Le degré du 0-cycle  $Z.i^*[\overline{S_{21}}]$  est de la forme  $d(\beta n + \gamma)$  où  $\beta$  et  $\gamma$  ne dépendent que de  $Z$ .

a) Prouvons le lemme 3. Regardons le diagramme commutatif où les flèches sont les injections canoniques et les dimensions entre parenthèses :

$$\begin{array}{ccccc}
 (9) & Al^3 \mathbf{P}^4 & \xrightarrow{i} & \mathrm{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4 & (12) \\
 & j \uparrow & & \uparrow u & \\
 (7) & Al^3 \mathbf{P}^3 & \xrightarrow{\hat{i}} & \mathrm{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^3 & (9) \\
 & & & \uparrow & \\
 & & & \mathrm{Hilb}_c^3 S' & (6).
 \end{array}$$

Nous voyons par examen des dimensions que  $Al^3 \mathbf{P}^4$  et  $\mathrm{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^3$  ne se coupent pas proprement dans  $\mathrm{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$ .

Nous aurons besoin du théorème de l'intersection résiduelle [7] [17] sous forme de la formule de Fulton-MacPherson [6], qu'on énoncera ainsi :

THÉORÈME (Fulton-MacPherson). Soit  $Y$  une sous-variété non-singulière de la variété non-singulière  $X$ . Soit  $A$  une sous-variété de  $X$  et  $I = A \cap Y$ . Considérons le diagramme commutatif où les flèches sont les injections canoniques :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & X \\
 j \uparrow & & \uparrow u \\
 I & \xrightarrow{\hat{i}} & Y .
 \end{array}$$

Si  $I$  est localement intersection complète dans  $A$  et si

$$\dim I = \dim A + \dim Y - \dim X + r,$$

alors pour tout cycle  $\alpha$  dans  $Y$ , le cycle  $i^*u_*\alpha$  dans  $A$  est égal à  $j_*(C_r \cdot i^*\alpha)$  où  $C_r$  est fixé dans  $A^r(I)$ .

L'Annexe 7 montre que  $Al^3 \mathbf{P}^4$  et  $Hilb_c^3 \mathbf{P}^3$  se coupent schématiquement en  $Al^3 \mathbf{P}^3$ . Appliquons alors la formule de Fulton-MacPherson à  $\alpha = [Hilb_c^3 S']$  dans  $A^r(Hilb_c^3 \mathbf{P}^3)$ . Comme ici  $r = 1$ , on obtient

$$i^*u_*\alpha = i^* [Hilb_c^3 S'] = j_* C$$

où  $C = C_1 \cdot i^* [Hilb_c^3 S']$  avec  $C_1$  fixé dans  $A^1(Al^3 \mathbf{P}^3)$ . Par suite, par la formule des projections, on a dans  $A^r(Al^3 \mathbf{P}^4)$ :

$$Z \cdot i^* [Hilb_c^3 S'] = Z \cdot j_* C = j_*(j^* Z \cdot C_1 \cdot i^* [Hilb_c^3 S']).$$

Mais  $K = j^* Z \cdot C_1$  appartient à  $A^4(Al^3 \mathbf{P}^3)$  et donc par la proposition 2:

$$\deg Z \cdot i^* [Hilb_c^3 S'] = \deg K \cdot i^* [Hilb_c^3 S']$$

est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3}$$

où  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  sont des constantes. Le lemme 3 est donc prouvé.

b) Prouvons le lemme 4. Pour cela nous avons besoin d'un lemme auxiliaire:

**LEMME 6.** *Désignons par  $I^j$  l'intersection ensembliste de  $S_3^j$  (défini dans ce paragraphe en 1.a) et de  $Al^3 \mathbf{P}^4$  dans  $Hilb_c^3 \mathbf{P}^4$ .*

*Alors génériquement,  $S_3^j$  et  $Al^3 \mathbf{P}^4$  se coupent transversalement; par suite  $i^* [S_3^j] = [I^j]$ .*

Remarquer que  $I^j$  est isomorphe à  $\mathbf{P}^3$  par le choix de l'axe du triplet passant par  $M_j$ .

*Preuve du lemme 6.* C'est un simple calcul en coordonnées, comme on en fera beaucoup dans l'Annexe: soit  $\xi_0$  un triplet aligné de support  $\{M_j\}$ , d'axe transverse à  $\mathbf{P}^3$  (l'hyperplan qui contient  $S'$ ). Dans un système inhomogène de coordonnées  $(x, y, z, u)$  centré en  $M_j$ ,  $S'$  a pour équations

$$xyz + \dots = 0, \quad u = 0$$

et Axe  $\xi_0$  est engendré par un vecteur de coordonnées  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ . Puisque  $\xi_0$  est supposé générique dans  $I^j$ , on se ramène à  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$  et l'idéal de  $\xi_0$  est alors

$$I_0 = (x^3, y-x, z-x, u-x).$$

Une carte de  $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$  en  $\xi_0$  est donnée par

$$(a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3)$$

correspondant à l'idéal voisin :

$$\begin{aligned} I = & (x^3 + ax^2 + bx + c, y - x + a_1x^2 + b_1x + c_1, z - x + a_2x^2 + b_2x + c_2, \\ & u - x + a_3x^2 + b_3x + c_3). \end{aligned}$$

Dans cette carte,  $Al^3 \mathbf{P}^4$  s'exprime par  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  et  $S_3^j$  par

- d'une part  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  car la courbe sur laquelle est le triplet curviligne doit passer par 0,
- d'autre part  $a = b = c = 0$  car le support doit être  $\{0\}$ . Cela termine la démonstration du lemme 6.

Nous aurons besoin de rappeler la proposition suivante (montrée en [25]). C'est une conséquence facile du théorème de Leray-Hirsch, car

$$\text{Axe}: Al^k \mathbf{P}^N \rightarrow G(1, N)$$

est une fibration de fibre type  $\mathbf{P}^k$ .

**PROPOSITION 7.** Soit  $i$  un entier et  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \dots \mathcal{H}_i$  des hyperplans de  $\mathbf{P}^N$  en position générale. Pour  $k \geq i$ , soit  $H_i$  la sous-variété de  $Al^k \mathbf{P}^N$  formée des  $k$ -uplets alignés  $\xi$  avec  $\xi \cap \mathcal{H}_p \neq \emptyset$  pour  $1 \leq p \leq i$ . Alors on a l'égalité dans  $A_{\mathbf{Q}}^{\bullet}(Al^k \mathbf{P}^N)$  des sous-espaces vectoriels

$$A_{\mathbf{Q}}^i(Al^k \mathbf{P}^N) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{j=0}^i \text{Axe}^* A_{\mathbf{Q}}^{i-j}(G) \cdot [H_j].$$

(On note  $A_{\mathbf{Q}}^{\bullet} = A^{\bullet} \otimes_{\mathbf{Z}}$  et  $G = G(1, N)$ ).

Dans le cas qui nous occupe ( $k=3$ ), on a donc en fixant  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$  trois hyperplans de  $\mathbf{P}^4$  en position générale, l'égalité :

$$\begin{aligned} & A_{\mathbf{Q}}^3(Al^3 \mathbf{P}^4) \\ &= \text{Axe}^* A_{\mathbf{Q}}^3(G) \oplus \text{Axe}^* A_{\mathbf{Q}}^2(G) \cdot [H_1] \oplus \text{Axe}^* A_{\mathbf{Q}}^1(G) \cdot [H_2] \oplus \mathbf{Q} [H_3]. \end{aligned}$$

Or il est bien connu par la décomposition de Schubert (voir par exemple [21]) que  $A^{\bullet}(G(1, 4))$  est donné par :

- $A^3(G) = \mathbf{Z}(0, 4) \oplus \mathbf{Z}(1, 3)$  où

- $\left\{ \begin{array}{l} (0, 4) = \text{droites passant par un point fixe } 0 \text{ de } \mathbf{P}^4, \\ (1, 3) = \text{droites contenues dans un hyperplan } H' \text{ de } \mathbf{P}^4 \text{ et coupant} \\ \quad \text{une droite } \Delta' \text{ de } H'. \end{array} \right.$
- $A^2(G) = \mathbf{Z}(1, 4) \oplus \mathbf{Z}(2, 3)$  où
- $\left\{ \begin{array}{l} (1, 4) = \text{droites coupant une droite } \Delta'' \text{ de } \mathbf{P}^4, \\ (2, 3) = \text{droites contenues dans un hyperplan } H'' \text{ de } \mathbf{P}^4. \end{array} \right.$
- $A^1(G) = \mathbf{Z}(2, 4)$  où
- $(2, 4) = \text{droites coupant un plan fixe } \pi \text{ de } \mathbf{P}^4.$

Pour montrer l'assertion du lemme 4, il suffit de la montrer pour  $Z$  décrivant une base de  $A^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$ . Mais on a (lemme 6)  $Z \cdot i^* [S_3^j] = Z \cdot [I^j]$ . Or dans la base énumérée ci-dessus de  $A_Q^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$ , seul le premier cycle Axe\*(0, 4) a une intersection non vide avec  $I^j$ . En effet,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Axe}^*(1, 3) \cdot [I^j] = 0 & \text{car } M_j \notin H' \\ \text{Axe}^*(1, 4) \cdot [H_1] \cdot [I^j] = 0 & \text{car } M_j \notin \mathcal{H}_1 \\ \text{Axe}^*(2, 3) \cdot [H_1] \cdot [I^j] = 0 & \text{car } M_j \notin \mathcal{H}_1 \\ \text{Axe}^*(2, 4) \cdot [H_2] \cdot [I^j] = 0 & \text{car } M_j \notin \mathcal{H}_1 \\ [H_3] \cdot [I^j] = 0 & \text{car } M_j \notin \mathcal{H}_1. \end{array} \right.$$

Notons alors  $\alpha$  le degré d'intersection  $\text{Axe}^*(0, 4) \cdot [I^j]$ . (On peut se convaincre que c'est 1 par un calcul en coordonnées, mais c'est inutile pour la suite). Cela correspond à l'unique triplet aligné  $\xi_0$  dans  $\mathbf{P}^4$  de support  $\{M_j\}$  et d'axe  $\overline{OM_j}$ . On a donc  $\deg \text{Axe}^*(0, 4) \cdot i^* [S_3^j] = \alpha$  d'où  $\deg \text{Axe}^*(0, 4) \cdot i^* [S_3] = \alpha t$  puisque  $[S_3] = \sum_{j=1}^t [S_3^j]$ .

L'assertion du lemme 4 est prouvée pour  $Z$  décrivant une base de  $A^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$ , donc le lemme 4 est démontré.

c) Prouvons le lemme 5. Nous aurons besoin comme en b), d'un lemme auxiliaire :

LEMME 7. *Désignons par  $I$  l'intersection ensembliste de  $\overline{S_{21}}$  (défini dans ce paragraphe en 1.a)) et de  $Al^3 \mathbf{P}^4$  dans  $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$ . Alors généralement,  $\overline{S_{21}}$  et  $Al^3 \mathbf{P}^4$  se coupent transversalement ; par suite  $i^* [S_{21}] = [I]$  dans  $A^*(Al^3 \mathbf{P}^4)$ .*

La preuve du lemme 7 est un calcul en coordonnées comme le lemme 6 : voir l'Annexe 4.

D'après ce lemme, pour prouver le lemme 5, il suffit de montrer que pour tout cycle  $Z$  dans  $A^3((Al^3 \mathbf{P}^4))$ , le degré du 0-cycle  $Z \cdot [I]$  est de la forme  $d(\beta n + \gamma)$  où  $\beta$  et  $\gamma$  ne dépendent que de  $Z$ . Il suffit donc de le vérifier pour  $Z$  décrivant une base de  $A_{\mathbf{Q}}^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$ . Or une telle base a été explicitée en b), comme conséquence de la proposition 7. On utilise donc les mêmes notations qu'en b).

Il s'agit de voir que les degrés des 0-cycles

- i)  $\text{Axe}^*(0, 4) \cdot [I]$
- ii)  $\text{Axe}^*(1, 3) \cdot [I]$
- iii)  $\text{Axe}^*(1, 4) \cdot [H_1] \cdot [I]$
- iv)  $\text{Axe}^*(2, 3) \cdot [H_1] \cdot [I]$
- v)  $\text{Axe}^*(2, 4) \cdot [H_2] \cdot [I]$
- vi)  $[H_3] \cdot [I]$

vérifient l'assertion du lemme 5.

Montrons-le rapidement cas par cas, toujours avec les notations de b). L'hyperplan de  $\mathbf{P}^4$  contenant la projection  $S'$  est noté  $\mathbf{P}^3$ .

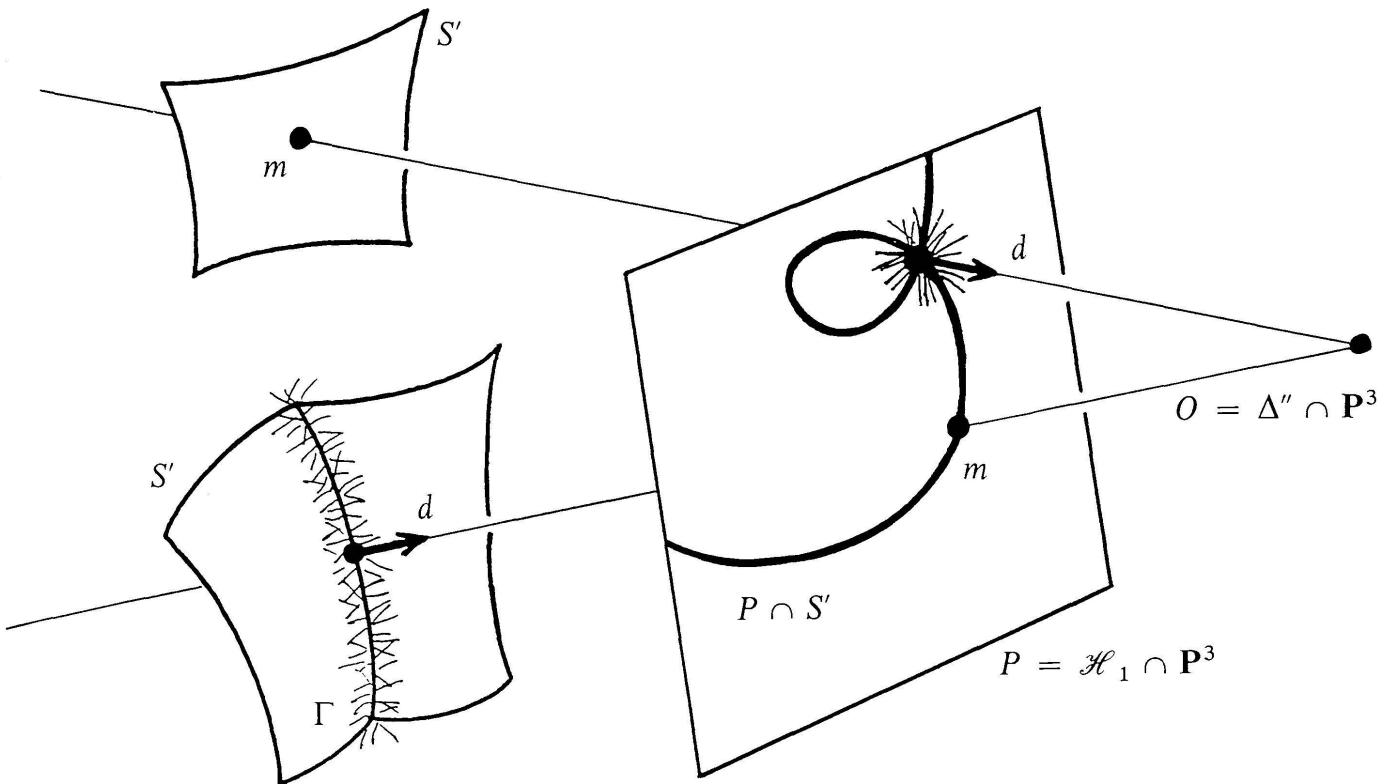
- i) Les axes des triplets éléments de  $I$  sont dans  $\mathbf{P}^3$ , donc ne peuvent rencontrer un point fixe  $O$  de  $\mathbf{P}^4$ . Le premier des degrés cherchés est donc  $O$ .
- ii) Les axes des triplets de  $I$  sont dans le plan  $H' \cap \mathbf{P}^3$  de  $\mathbf{P}^3$  et passent par le point fixe  $\Delta' \cap \mathbf{P}^3$  de ce plan. Donc il y a  $d$  possibilités pour le choix d'un point-double et il reste  $n - 2$  autres possibilités pour le point simple. Dans ce cas le degré cherché est  $d(n - 2)$ .

*On ne tient pas compte d'une multiplicité éventuelle, car cela ne change rien à l'énoncé du lemme.*

- iii) Soit  $O = \Delta'' \cap \mathbf{P}^3$  et  $P = \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{P}^3$  (où  $\mathcal{H}_1$  est l'hyperplan qui définit le cycle  $H_1$ ). Les axes des triplets de  $I$  doivent passer par  $O$  et les triplets avoir au moins un point sur  $P$ . Deux cas à distinguer :

- ou le point simple est sur  $P \cap S'$  et le point-double a son support sur  $\Gamma$ . Il y a donc  $nd$  choix possibles puisque  $\deg \Gamma = d$ ;
- ou le point-double a pour support l'un des  $d$  points de  $P \cap \Gamma$  et il reste  $n - 2$  autres possibilités pour le point simple. (En plus, dans ce cas la multiplicité est 2).

La somme est bien de toute façon de la forme  $d(\beta n + \gamma)$ .



Dans l'un comme l'autre cas de figure ci-dessus, les petits traits représentent les doublets *dans*  $\mathbf{P}^4$ , de support  $\Gamma$ .

iv) Soit  $P = H'' \cap \mathbf{P}^3$  et  $P_1 = \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{P}^3$ . Les triplets doivent donc être dans  $P$  et avoir au moins un point sur la droite  $\Delta = P \cap P_1$ . Il y a donc  $n$  possibilités pour le point simple, d'où  $dn$  possibilités pour le choix d'un tel triplet.

v) Les axes des triplets de  $I$  doivent couper la droite fixe  $\Delta = \pi \cap \mathbf{P}^3$  et les triplets doivent avoir deux points sur  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ . Soit  $P_i = \mathcal{H}_i \cap \mathbf{P}^3$ . Comme les triplets de  $I$  ne sont pas formés de trois points distincts, le support  $\{O\}$  du point-doublet doit être ou sur  $P_1$  ou sur  $P_2$ . Supposons qu'il soit sur  $P_1$ ; comme le degré de  $\Gamma$  est  $d$ , cela donne  $d$  possibilités de choix pour  $O$ . Mais alors la droite  $\Delta$  et le point  $O$  engendrent un plan  $P$ . La droite  $P \cap P_2$  coupe  $S'$  en  $n$  points dans  $P$  parmi lesquels est choisi le troisième point du triplet; donc il y a  $dn$  solutions et par symétrie entre  $P_1$  et  $P_2$ ,  $2dn$  au total.

vi) Soit  $P_i = \mathcal{H}_i \cap \mathbf{P}^3$ . Les triplets de  $I$  doivent avoir un point sur chacun des trois plans  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ; mais comme ces triplets ne sont pas simples, la partie doublet est obligatoirement à support sur une des droites  $P_i \cap P_j$ . Or aucune de ces droites ne coupe  $\Gamma$ ; l'intersection est donc  $O$ .

Le lemme 5 est ainsi démontré.

d) *Conclusion*

Soit  $S$  une surface de  $\mathbf{P}^4$  à singularités ordinaires et  $\Sigma/\mathbf{C}$  le schéma relatif associé défini en I.3.b. Posons  $\bar{U} = \mathbf{C}$  et  $U = \mathbf{C}^*$ . Nous allons voir que les hypothèses de la proposition 1 sont satisfaites pour le schéma relatif  $\Sigma/\mathbf{C}$ .

Pour a), cela résulte de la proposition 4 ii). Pour b), cela résulte de la proposition 6 ii), chaque composante de  $\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0$  étant génériquement réduite. Enfin le schéma  $\Sigma/\mathbf{C}^*$  est isomorphe au produit  $S \times \mathbf{C}^*$  par construction même (remarque 3). Donc par la remarque 1,  $\Sigma/\mathbf{C}^*$  est  $k$ -plat, puisque  $S \subset \mathbf{P}^4$  n'a que des singularités ordinaires. L'hypothèse c) de la proposition 1 est donc satisfaite.

La proposition 1 donne alors l'équivalence rationnelle dans  $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$ :

$$[\text{Hilb}_c^3 S] \sim [\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0].$$

Or par la proposition 6 i), on a l'égalité des cycles:

$$[\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0] = [\text{Hilb}_c^3 S'] + [\overline{S_{21}}] + [S_3].$$

D'où pour n'importe quel cycle  $Z$  de  $A^3(\mathcal{A}\ell^3 \mathbf{P}^4)$ , l'égalité des 0-cycles:

$$Z \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S] = Z \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S'] + Z \cdot i^* [\overline{S_{21}}] + Z \cdot i^* [S_3].$$

Des lemmes 3, 4 et 5 résulte alors aussitôt la proposition 5 que l'on cherchait à prouver.

### III) TRISÉCANTES DANS $\mathbf{P}^4$ : LES CALCULS

Soit  $S$  une surface de  $\mathbf{P}^4$  d'invariants  $n, d, t$  (notations du § II). On va donner deux formules trisécantes pour  $S$ , supposée à singularités ordinaires dans  $\mathbf{P}^4$ .

#### 1°) TANGENTES À $S$ RECOUPANT $S$ ET UNE DROITE FIXÉE.

Nous cherchons le degré du 0-cycle

$$[\mathcal{D}] \cdot \text{Axe}^* \sigma_2 \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S]$$

où comme d'habitude,  $i: \mathcal{A}\ell^3 \mathbf{P}^4 \hookrightarrow \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$  est l'injection canonique. Ici,  $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}\ell^3 \mathbf{P}^4$  est l'hypersurface des triplets alignés non simples et  $\sigma_2 = (1, 4)$  est le cycle de  $A^2(G(1, 4))$  des droites de  $\mathbf{P}^4$  coupant une droite fixe  $\Delta$ . D'après la proposition 5, ce nombre est de la forme