Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE POLARE ZERLEGUNG EINER REGULÄREN MATRIX UND DIE GEOMETRIE DER ORTHOGONALEN GRUPPE

Autor: Rummler, Hansklaus

Vorwort: §0. EINFÜHRUNG

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55087

L'Enseignement Mathématique, t. 32 (1986), p. 211-218

EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE POLARE ZERLEGUNG EINER REGULÄREN MATRIX UND DIE GEOMETRIE DER ORTHOGONALEN GRUPPE

von Hansklaus Rummler

§ 0. Einführung

Bekanntlich lässt sich jede reguläre $n \times n$-Matrix A mit reellen Koeffizienten eindeutig als Produkt $A = US$ schreiben, wobei U orthogonal und S positiv definit symmetrisch ist (vgl. [3]). Diese sogennante polare Zerlegung hat eine ebenso einfache wie interessante geometrische Deutung: U ist die beste orthogonale Approximation von A, wenn man den Raum $\mathbf{R}^{n \times n}$ aller reellen $n \times n$-Matrizen mit der üblichen euklidischen Struktur versieht. Man kann das auch so ausdrücken: Fasst man die Spalten der Matrix $A = (a_1, ..., a_n)$ als Basis des $\mathbf{R}^n$ auf, so ist $U = (u_1, ..., u_n)$ diejenige eindeutig bestimmte Orthonormalbasis, für die $\sum_{j=1}^{n} \| a_j - u_j \|^2$ minimal ist.

Darüber hinaus zeigt sich, dass für festes $A \in GL(n, \mathbf{R})$ die Funktion $f_A : O(n) \to \mathbf{R}$, $f_A(U) := \| A - U \|^2$ Aufschlüsse über die Geometrie von $O(n)$ gibt: Es ist fast immer eine perfekte Morse-Funktion.

Eine Übertragung der Resultate auf komplexe Matrizen bereitet keine Schwierigkeiten, aber der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf den reellen Fall; aus dem gleichen Grunde verzichten wir auch darauf, singuläre Matrizen zu betrachten.

§ 1. Die beste orthogonale Approximation einer regulären Matrix

Mit $\mathbf{R}^{n \times n}$ bezeichnen wir den reellen Vektorraum aller reellen $n \times n$-Matrizen. $\mathbf{1}$ ist die Einheitsmatrix, und A^* die Transponierte der Matrix A. Wir versehen $\mathbf{R}^{n \times n}$ mit dem Standard-Skalarprodukt

$$<A, B> := \operatorname{tr}(A^* B) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} B_{ij} .$$