

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 32 (1986)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CLASSIFICATION DES REPRÉSENTATIONS DE LA DOUBLE FLÈCHE  
**Autor:** Burgermeister, Pierre-François  
**Kapitel:** 2. GÉNÉRALITÉS  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-55086>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

commute. C'est-à-dire:  $\psi f_1 = f'_1 \phi$  et  $\psi f_2 = f'_2 \phi$ .

La somme directe de 2 représentations est définie par:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} f_1 \\ (E \rightrightarrows F) \\ f_2 \end{array} \oplus \begin{array}{c} f'_1 \\ (E' \rightrightarrows F') \\ f'_2 \end{array} & = & \begin{array}{c} f_1 \oplus f'_1 \\ E \oplus E' \rightrightarrows F \oplus F' \\ f_2 \oplus f'_2 \end{array}, \end{array}$$

où  $(f_i \oplus f'_i)(x + x') = f_i(x) + f'_i(x')$ ,  $\forall x \in E$ ,  $\forall x' \in E'$ .

Les représentations sont en correspondance bijective avec les  $A$ -modules, où  $A$  est une algèbre de dimension finie [2]. Dans ce contexte, on peut appliquer le théorème de Krull-Schmidt ([3], p. 128), d'où il découle qu'une représentation se décompose de manière unique (à isomorphisme près, et à l'ordre des facteurs près) en une somme directe de représentations indécomposables. La classification s'obtient alors en dressant la liste de toutes les représentations indécomposables (à isomorphisme près).

## 2. GÉNÉRALITÉS

Il est clair qu'une représentation  $E \begin{array}{c} f_1 \\ \rightrightarrows \\ f_2 \end{array} F$  est indécomposable si et seulement si la représentation duale,  $F^* \begin{array}{c} f_1^* \\ \rightrightarrows \\ f_2^* \end{array} E^*$ , est indécomposable. On peut donc se limiter à l'étude des représentations indécomposables  $A: E \begin{array}{c} f_1 \\ \rightrightarrows \\ f_2 \end{array} F$ , avec  $\dim E \leq \dim F$ .

### CAS TRIVIAUX

- a) Supposons  $K = \text{Ker } f_1 \cap \text{Ker } f_2 \neq 0$ . Alors  $A$ , indécomposable, se réduit à:  $K \begin{array}{c} 0 \\ \rightrightarrows \\ 0 \end{array} 0$  et, nécessairement,  $\dim K = 1$ . Ecrivons  $k \begin{array}{c} 0 \\ \rightrightarrows \\ 0 \end{array} 0$  la représentation ainsi obtenue et notons-la  $B_0$ .
- b) Supposons  $\text{Im } f_1 + \text{Im } f_2 \subsetneq F$ , et soit  $G \neq 0$ , un supplémentaire de  $\text{Im } f_1 + \text{Im } f_2$  dans  $F$ .  $A$  se réduit donc à  $0 \begin{array}{c} \rightrightarrows \\ \neq \end{array} G$ , et de nouveau, on doit avoir  $\dim G = 1$ . Ecrivons  $0 \begin{array}{c} 0 \\ \rightrightarrows \\ 0 \end{array} k$  cette représentation et notons-la  $C_0$ .

$B_0$  et  $C_0$  sont 2 représentations indécomposables. Pour la suite nous supposons

- 1)  $\text{Ker } f_1 \cap \text{Ker } f_2 = 0$
- 2)  $\text{Im } f_1 + \text{Im } f_2 = F$

### CAS GÉNÉRAL

Soit  $A: E \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{f_2} \end{smallmatrix} F$ , une représentation indécomposable avec  $\dim E = n$ ,  $\dim F = n+l$ ,  $n \geq 1$  et  $l \geq 0$  des entiers,  $A$  vérifiant les hypothèses 1 et 2 ci-dessus.

Nous allons mettre en évidence certains sous-espaces de  $E$  et de  $F$  qui nous permettront d'obtenir une décomposition de  $A$ . Cette décomposition étant par hypothèse triviale, nous pourrons en tirer, cas par cas, toutes les conclusions nécessaires à l'identification de  $A$ .

Notons  $n_1$  et  $n_2$  les dimensions des noyaux de  $f_1$  et  $f_2$  respectivement, et posons  $m = n_1 + n_2$  et  $W = \text{Im } f_1 \cap \text{Im } f_2 \subset F$ . Alors,  $\dim W = n - m - l$ .

En effet,  $\dim \text{Im } f_1 + \dim \text{Im } f_2 = n - n_1 + n - n_2 = 2n - m$ . Par l'hypothèse 2,  $\dim W = 2n - m - (n + l) = n - m - l$ .

D'autre part, soit  $V = f_1^{-1}(W) \cap f_2^{-1}(W) \subset E$ . Alors,  $\dim V \geq n - m - 2l$ .

En effet,  $\dim f_1^{-1}(W) = n - m - l + n_1 = n - n_2 - l$ , et de même  $\dim f_2^{-1}(W) = n - n_1 - l$ . Donc,  $\dim f_1^{-1}(W) + \dim f_2^{-1}(W) = 2n - m - 2l$  et  $\dim V \geq 2n - m - 2l - n = n - m - 2l$ . Posons  $\dim V = n - m - 2l + r$ ,  $r \geq 0$ .

Nous avons une sous-représentation,  $V \begin{smallmatrix} \xrightarrow{\text{res } f_1} \\ \xrightarrow{\text{res } f_2} \end{smallmatrix} W$ , avec  $\dim V = n - m - 2l + r$ ,  $\dim W = n - m - l$ .

Posons maintenant  $K_1 = \text{Ker } f_1 \cap V$  et  $k_1 = \dim K_1$ , et soit un sous-espace  $K'_1$  tel que  $\text{Ker } f_1 = K_1 \oplus K'_1$ . Notons  $k'_1 = \dim K'_1$ ; alors  $n_1 = k_1 + k'_1$ . On peut encore choisir un supplémentaire  $L_1$  tel que  $f_1^{-1}(W) = V \oplus K'_1 \oplus L_1$ . Soit  $l_1 = \dim L_1$ ; alors  $l_1 = n - n_2 - l - (n - m - 2l + r) - k'_1 = k_1 + l - r$ .

De la même manière, on choisit une décomposition  $f_2^{-1}(W) = V \oplus K'_2 \oplus L_2$ .

La somme  $(V \oplus K'_1 \oplus L_1) + (K'_2 \oplus L_2)$  est une somme directe.

En effet, soit  $x \in V \oplus K'_1 \oplus L_1 \cap K'_2 \oplus L_2$ . Alors  $x \in f_1^{-1}(W) \cap f_2^{-1}(W) = V$ . Mais  $V \cap (K'_2 \oplus L_2) = 0$ , d'où  $x = 0$ .

Calculons la dimension  $d$  du sous-espace  $V \oplus K'_1 \oplus L_1 \oplus K'_2 \oplus L_2$ :  
 $d = n - m - 2l + r + k'_1 + k_1 + l - r + k'_2 + k_2 + l - r = n - r$ . Choisissons alors  $X \subset E$ , un sous-espace de dimension  $r$  tel que

$$E = V \oplus K'_1 \oplus L_1 \oplus K'_2 \oplus L_2 \oplus X.$$

Soit maintenant  $Y = f_1(X) + f_2(X) \subset F$ . Alors,

$$F = \text{Im } f + \text{Im } g = W + f_2(K'_1) + f_2(L_1) + f_1(K'_2) + f_1(L_2) + Y.$$

La dimension de  $F$  est inférieure ou égale à  $s$ , la somme des dimensions des sous-espaces du membre de droite :

$$n + l \leq s \leq n - m - l + k'_1 + k_1 + l - r + k'_2 + k_2 + l - r + 2r = n + l.$$

Par conséquent :

$$\text{i) } K'_1 \xrightarrow{\text{res } f_2} f_2(K'_1), \quad L_1 \xrightarrow{\text{res } f_2} f_2(L_1), \quad K'_2 \xrightarrow{\text{res } f_1} f_1(K'_2),$$

$$L_2 \xrightarrow{\text{res } f_1} f_1(L_2),$$

sont des isomorphismes.

$$\text{ii) } \dim Y = 2r.$$

$$\text{iii) } F = W \oplus f_2(K'_1) \oplus f_2(L_1) \oplus f_1(K'_2) \oplus f_1(L_2) \oplus Y.$$

On a obtenu la description suivante de la structure de  $A$  :

$$E = V \oplus K'_1 \oplus L_1 \oplus K'_2 \oplus L_2 \oplus X,$$

$$F = W \oplus f_2(K'_1) \oplus f_2(L_1) \oplus f_1(K'_2) \oplus f_1(L_2) \oplus Y,$$

où  $V \oplus L_1 \oplus L_2 \rightrightarrows W \oplus f_2(L_1) \oplus f_1(L_2)$ ,  $K'_1 \rightrightarrows f_2(K'_1)$ ,  $K'_2 \rightrightarrows f_1(K'_2)$  et  $X \rightrightarrows Y$  sont des sommands directs.  $A$  étant indécomposable, elle se réduit à l'un de ces 4 sommands.

#### ELIMINATION DES CAS SIMPLES

1) Si  $A$  est du type  $K'_1 \begin{matrix} \xrightarrow{0} \\ \xrightarrow{\text{res } f_2} \end{matrix} f_2(K'_1)$ , elle n'est indécomposable que si

$\dim K'_1 = 1$  et elle est alors isomorphe à la représentation  $E \begin{matrix} \xrightarrow{0} \\ \xrightarrow{1} \end{matrix} E$  où

$\dim E = 1$ . Appelons  $\overline{A_1^x}$  cette représentation indécomposable. (Cette notation et les suivantes seront justifiées au § 3).

2) De même, si  $A$  est du type  $K'_2 \begin{matrix} \xrightarrow{\text{res } f_1} \\ \xrightarrow{0} \end{matrix} f_1(K'_2)$ , elle est isomorphe à la

représentation indécomposable  $E \begin{smallmatrix} \rightrightarrows \\ 0 \end{smallmatrix} E$ , où  $\dim E = 1$ , que nous appellerons  $A_1^x$ .

3) Si  $A$  est du type  $X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{f_2} \end{smallmatrix} Y$ , alors, comme  $\dim Y = 2 \dim X$ ,  $A$  n'est indécomposable que si  $\dim X = 1$ ,  $\dim Y = 2$  et  $Y = f_1(X) \oplus f_2(X)$ . Elle est alors isomorphe à la représentation suivante, notée matriciellement:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E \rightrightarrows F$  (avec  $\dim E = 1$ ,  $\dim F = 2$ ). Nous appellerons  $B_1$  cette représentation

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

indécomposable.

Il ne reste plus qu'à considérer le cas où  $A$  est donnée par

$$E = V \oplus L_1 \oplus L_2 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{f_2} \end{smallmatrix} W \oplus f_2(L_1) \oplus f_1(L_2) = F,$$

avec  $\dim V = n - m - 2l, \quad \dim W = n - m - l, \quad (*)$   
 $\dim L_1 = n_1 + l, \quad \dim L_2 = n_2 + l.$

Remarquons que dans ce cas  $\text{Ker } f_1 = K_1 \subset V$  et  $\text{Ker } f_2 = K_2 \subset V$ .

Nous allons étudier ce cas en trois parties correspondant aux différentes valeurs de  $l$ :  $l = 0, l = 1, l \geq 2$ . Pour cela, nous utiliserons le

LEMME. Soit  $A$  une représentation comme ci-dessus. Si la sous-représentation  $V \begin{smallmatrix} \xrightarrow{\text{res } f_1} \\ \xrightarrow{\text{res } f_2} \end{smallmatrix} W$  est décomposable,  $A$  est décomposable.

Preuve. Supposons  $V = S \oplus S' \begin{smallmatrix} \xrightarrow{\text{res } f_1} \\ \xrightarrow{\text{res } f_2} \end{smallmatrix} T \oplus T' = W$ , une décomposition non triviale.  $f_1(S) \subset T, f_1(S') \subset T'$ . Soient  $T_1$  un supplémentaire de  $f_1(S)$  dans  $T$  et  $T'_1$  un supplémentaire de  $f_1(S')$  dans  $T'$ . On peut choisir une décomposition  $L_1 = U_1 \oplus U'_1$  telle que  $f_1(U_1) = T_1$  et  $f_1(U'_1) = T'_1$ .

De même on peut choisir  $L_2 = U_2 \oplus U'_2$  telle que  $f_2(U_2) \subset T$  et  $f_2(U'_2) \subset T'$ .

On obtient alors la décomposition suivante de  $A$ :

$$(S \oplus U_1 \oplus U_2) \oplus (S' \oplus U'_1 \oplus U'_2) \rightrightarrows (T \oplus f_2(U_1) \oplus f_1(U_2)) \\ \oplus (T' \oplus f_2(U'_1) \oplus f_1(U'_2))$$

### 3. LA CLASSIFICATION

#### 3.1. PREMIER CAS: $l = 0$

Soit  $A$  une représentation indécomposable du type (\*) avec  $l = 0$ .  
En particulier:

$$\dim E = \dim F = n; \quad \dim V = \dim W = n - m; \quad \dim L_1 = n_1; \\ \dim L_2 = n_2.$$

**PROPOSITION.** *L'une au moins des deux applications  $f_1$  ou  $f_2$  est un isomorphisme.*

*Preuve.* Par récurrence sur  $n$ .

Si  $n = 1$ , c'est trivial.

Si  $n > 1$ , on envisage deux cas:

1)  $m = 0$ , et alors  $f_1$  et  $f_2$  sont des isomorphismes.

2)  $m > 0$ , et on regarde  $V \begin{matrix} \text{res } f_1 \\ \rightrightarrows \\ \text{res } f_2 \end{matrix} W$  qui est indécomposable (par le lemme)  
et où  $\dim V = \dim W < n$ .

Par hypothèse de récurrence,  $\text{res } (f_1)$  — ou  $\text{res } (f_2)$  — est un isomorphisme. Alors  $L_1 = 0$ . Et puisque  $f_1: L_2 \rightarrow f_1(L_2)$  est un isomorphisme,  $f_1: E = V \oplus L_2 \rightarrow W \oplus f_1(L_2) = F$  est un isomorphisme. A isomorphisme près,

on est alors ramené à classer les représentations  $E \begin{matrix} 1 \\ \rightrightarrows \\ f_2 \end{matrix} E$  et  $E \begin{matrix} f_1 \\ \rightrightarrows \\ 1 \end{matrix} E$ .

Remarquons que si  $f_1$  est inversible,  $E \begin{matrix} f_1 \\ \rightrightarrows \\ 1 \end{matrix} E$  est isomorphe à  $E \begin{matrix} 1 \\ \rightrightarrows \\ f_1^{-1} \end{matrix} E$ .

Pour les représentations du type  $E \begin{matrix} 1 \\ \rightrightarrows \\ f_2 \end{matrix} E$ , on regarde  $E$  comme  $k[x]$ -module