

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	32 (1986)
Heft:	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
Artikel:	L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE
Autor:	Raymond, Xavier Saint
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-55077

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

par Xavier SAINT RAYMOND

Depuis une trentaine d'années, l'unicité des solutions des problèmes de Cauchy linéaires a fait l'objet d'un grand nombre de publications. Bien vite, les études successives sont devenues très techniques et difficiles à comparer. Pour remédier à cette situation, dans un livre publié récemment, Zuily [28] donne des démonstrations détaillées d'un grand nombre de résultats; par ailleurs, Alinhac [2] a décrit sans démonstration l'ensemble de la théorie en groupant les théorèmes suivant les différentes classes de problèmes traités.

C'est dans ce même esprit que nous proposons ici une étude détaillée de la question pour les problèmes de Cauchy du premier ordre. Nous avons choisi de nous restreindre au premier ordre pour les deux raisons suivantes: d'une part le problème reste alors suffisamment simple pour que nous puissions donner des preuves complètes des résultats énoncés, et d'autre part, une telle étude fait déjà apparaître les critères d'unicité que l'on rencontre lorsqu'on traite les problèmes de Cauchy généraux.

En effet, si nous ne présentons pas ici les résultats les plus généraux obtenus sur l'unicité de Cauchy (Calderón [6], Hörmander [9, th. 8.9.1]-Lerner [13], Alinhac [1], Robbiano [19]; Lerner [12], Saint Raymond [20], Lerner et Robbiano [14]), nos théorèmes en donnent des prolongements dans le cas du premier ordre; ainsi, nous mettons en évidence l'importance pour l'unicité de Cauchy des conditions suivantes:

1. Conditions de crochet (ou de structure) analogues aux hypothèses du théorème de Calderón [6] ou à la principale normalité d'Hörmander [9, chap. 8]; ainsi, le théorème 1.2 peut être considéré comme une extension du théorème de Calderón pour le premier ordre, et réciproquement, le théorème 1.1 étend Alinhac [1, th. 1] et Robbiano [19].
2. Conditions de convexité du genre de la pseudo-convexité d'Hörmander [9, chap. 8]; là encore, nos résultats étendent les théorèmes généraux classiques de l'ordre m : le théorème 5.2 non seulement contient Hörmander

[9, th. 8.9.1] dans le cas du premier ordre, mais prouve également l'unicité dans des situations où on ne peut espérer obtenir d'inégalité de Carleman (cas pseudo-concave); quant au théorème 5.3, il étend Alinhac [1, th. 2] et Saint Raymond [20].

3. Conditions sur le terme d'ordre inférieur, abordées au chapitre 6.

Pour limiter la complexité technique des démonstrations, nous avons choisi, outre le cadre du premier ordre, de ne traiter que le cas des coefficients C^∞ , et de n'étudier l'unicité que parmi les solutions classiques (c'est-à-dire de classe C^1); pour la même raison, nous ne nous sommes intéressés essentiellement qu'à l'unicité stable (pour un sens précis de cette expression, voir le paragraphe 1.1, l'énoncé des théorèmes et la remarque 4 du paragraphe 1.4). Grâce à ce choix, notre texte ne fait appel à des démonstrations extérieures que pour utiliser des résultats généraux bien connus en analyse (théorème de Borel, cf. Hörmander [11, th. 1.2.6], théorème d'extension de Whitney [26], etc.). D'autres travaux sur le premier ordre sortent du cadre que nous venons de définir; il s'agit notamment de Zachmanoglou [27], Baouendi et Goulaouic [4], Cardoso et Hounie [7], Baouendi et Trèves [5].

Les résultats présentés ici ne sont pour la plupart que de légères améliorations de résultats déjà connus: ainsi le théorème 1.1 améliore les résultats d'Alinhac [1, th. 1] et de Robbiano [19], tandis que le théorème 1.2 améliore les résultats de Strauss et Trèves [24]. Ces raffinements ont pour essentiel mérite de mieux permettre la comparaison des théorèmes entre eux. Les méthodes utilisées dans les démonstrations sont classiques: inégalités de Carleman pour l'unicité, et construction de contre-exemples à base d'optique géométrique et de recollement.

Le théorème 4.2 doit cependant être mis à part car c'est un résultat entièrement nouveau. Bien qu'il s'agisse d'une construction de contre-exemple ressemblant aux constructions standard, c'est-à-dire du type décrit dans le chapitre 2, nous voudrions en souligner ici les caractères spécifiques.

Comme un seul changement de signe de la fonction b ne suffit pas à faire perdre l'unicité, c'est bien l'accumulation de ces changements de signe qui nous permet de construire le contre-exemple. Il nous faut donc recoller des fonctions u_k dont le comportement n'est bien connu qu'au voisinage des changements de signe. Ainsi, d'une part les valeurs de δ_k nous sont imposées (dans la construction standard, il est important de pouvoir choisir ces valeurs d'une manière appropriée), et d'autre part, nous ne possédons pas

de développement limité du type (2.1) commun à tous les u_k , formule qui joue un rôle central pour le recollement au paragraphe 2.3. A ces difficultés s'ajoute le fait que nous devons choisir les paramètres λ_k tellement grands que l'on n'a plus $\lambda_k \sim \lambda_{k+1}$ (contrairement à la situation standard où λ_k est une puissance de k), ce qui a pour effet de multiplier les contraintes sur ces paramètres (car $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k a_k \neq \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{k+1} a_k$ en général).

L'originalité du théorème réside donc dans l'assouplissement des techniques de recollement des fonctions u_k , la partie optique géométrique étant réduite au choix trivial de la phase $B(t) + iy$: c'est exactement le contraire de la méthode décrite au chapitre 2 où l'étape délicate est la construction de la phase (paragraphe 2.2), le reste (paragraphes 2.3 et 2.4) étant standard (cf. Alinhac et Zuily [3], et Alinhac [1]).

Enfin, nous tenons à remercier C. Zuily pour les discussions que nous avons eues, tout particulièrement pour la mise au point du lemme 3.3, ainsi que pour avoir bien voulu relire ces notes; nous lui en sommes très reconnaissant.

CHAPITRE 1: NOTATIONS ET RÉSULTATS PRINCIPAUX

1.1. COMMENT FORMULER LE PROBLÈME

Nous nous plaçons au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$; l'une des coordonnées dans \mathbf{R}^n est le temps, mais avant de l'écrire explicitement, nous considérerons que c'est une fonction donnée $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ à valeurs réelles telle que $d\varphi(x_0) \neq 0$ (afin de pouvoir la prendre comme coordonnée près de x_0).

On étudie un « phénomène physique » représenté par une fonction $u \in C^1(\mathbf{R}^n)$ à valeurs complexes qui est connue dans le passé ($u(x) = u_0(x)$ si $\varphi(x) \leq \varphi(x_0)$) et qui satisfait une équation d'évolution $Lu + c_0 u = f$, avec $L = \sum_{j=1}^n a_j(x) \partial_j$ où $\partial_j = \partial/\partial x_j$ et les $a_j \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ sont à valeurs complexes ainsi que le terme d'ordre zéro $c_0 \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Ici, $u_0(x)$ et $f(x)$ sont des données du problème.

Nous nous intéressons à l'unicité de la solution d'un tel problème indépendamment de son existence, ou plutôt à l'unicité locale en x_0 : étant données deux solutions u_1 et u_2 du problème, coïncident-elles dans tout un

voisinage de x_0 ? Comme tout est linéaire, cette question nous conduit (en posant $v = u_1 - u_2$) à l'étude du noyau de l'application linéaire associée: de

$$\begin{cases} Lv + c_0 v = 0 \\ v(x) = 0 \quad \text{si} \quad \varphi(x) \leq \varphi(x_0), \end{cases}$$

peut-on déduire que $v = 0$ dans tout un voisinage de x_0 ?

A l'exception des résultats cités au chapitre 6, nous rechercherons essentiellement une propriété d'unicité « stable » dans le sens suivant: sous les hypothèses des théorèmes d'unicité (cf. théorème 1.2), la propriété d'unicité demeurera si l'on modifie le terme d'ordre zéro c_0 , ou si l'on se place en un point voisin de x_0 sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Ce point de vue explique que nous ne fassions pas mention du théorème d'Holmgren, ni de théorèmes analogues; cela donne en outre à nos réciproques la forme que l'on trouvera typiquement énoncée au théorème 1.1 ci-dessous.

1.2. NATURE DES HYPOTHÈSES

Nous introduisons maintenant les objets algébriques sur lesquels nous désirons « lire » la réponse à la question que nous avons posée. Ces objets sont construits à partir de la fonction temps φ et de l'opérateur L , et reflètent leurs propriétés près de x_0 . Nous supposerons tout au long de ces notes que L est non dégénéré en x_0 , c'est-à-dire que $\sum_{j=1}^n |a_j(x_0)|^2 \neq 0$.

Commençons par une définition: Le problème est dit caractéristique si $L\varphi(x_0) = 0$. Cette définition est indépendante de la fonction φ pourvu que cette dernière définisse les mêmes demi-espaces du passé et du futur. Les chapitres 2, 3 et 4 sont consacrés à l'étude du problème non caractéristique, tandis que le problème caractéristique est abordé au chapitre 5.

Nous allons construire maintenant l'objet qui permettra principalement la discussion de l'unicité: l'algèbre de Lie \mathcal{L} associée au champ L . Par cette expression, nous désignons l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des champs réels $X = \operatorname{Re} L$, $Y = \operatorname{Im} L$ et de tous leurs commutateurs: $[X, Y] = XY - YX$, $[X, [X, Y]]$ etc. En chaque point x , ces combinaisons linéaires forment un sous-espace vectoriel de $T_x \mathbf{R}^n$ dont la dimension est appelée rang de l'algèbre de Lie \mathcal{L} au point x et que nous noterons $\operatorname{rg} \mathcal{L}(x)$. Comme L est non dégénéré en x_0 , on a $\operatorname{rg} \mathcal{L}(x) \in \{1, \dots, n\}$ pour tout x voisin de x_0 , mais le rang de \mathcal{L} n'a aucune raison d'être constant lorsqu'on passe d'un point à un point voisin.

A cette algèbre de Lie sont associées des variétés appelées variétés intégrales de \mathcal{L} . La variété \mathcal{V} sera une telle variété si pour tout $x \in \mathcal{V}$, l'espace vectoriel $T_x \mathcal{V}$ coïncide avec le sous-espace de $T_x \mathbf{R}^n$ défini par \mathcal{L} . L'existence de variétés intégrales de \mathcal{L} n'est pas automatique, et nous devrons la supposer pour obtenir certains résultats. Nous introduisons donc deux conditions « techniques » destinées à nous fournir de telles variétés intégrales, ou des variétés se comportant un peu comme des variétés intégrales.

Nous dirons que la propriété (R) est vérifiée dans l'ouvert Ω si par tout point de Ω passe une variété intégrale de \mathcal{L} ; Sussmann [25] a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que cette propriété soit vérifiée; rappelons que c'est classiquement le cas dans chacune des deux situations suivantes (qui constituent des critères aisément vérifiables sur un champ L donné):

1. Lorsque le rang de \mathcal{L} est constant dans Ω (théorème « de Frobenius », cf. Sternberg [23, p. 132]).
2. Lorsque les coefficients a_j de L sont analytiques dans Ω (théorème de Nagano [16]).

Nous dirons que L vérifie la condition (P) dans $\omega \subset \Omega$ s'il existe des coordonnées locales $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$, un ouvert v de \mathbf{R}^{n-1} et un nombre $T > 0$ tels que $\omega \subset v \times]-T, T[\subset \Omega$, que L s'écrive

$$L = a(y, t) [\partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y] \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \quad \text{dans} \quad v \times]-T, T[,$$

et que pour tout $y \in v$, il existe un vecteur unitaire $d(y) \in \mathbf{R}^{n-1}$ tel que

$$b(y, t) = |b(y, t)| d(y) \quad \text{pour tout} \quad t \in]-T, T[.$$

Cette condition (P) a été introduite par Nirenberg et Trèves [17] pour étudier la résolubilité locale de L , et ces auteurs ont montré que si (η, τ) était un autre choix de coordonnées locales tel que

$$L = \alpha(\eta, \tau) [\partial_\tau + i\beta(\eta, \tau) \cdot \partial_\eta], \quad \beta \text{ à valeurs dans } \mathbf{R}^{n-1},$$

l'existence d'un vecteur $d(y)$ tel que $b(y, t) = |b(y, t)| d(y)$ est équivalente à l'existence d'un vecteur $\delta(\eta)$ tel que $\beta(\eta, \tau) = |\beta(\eta, \tau)| \delta(\eta)$. Nous verrons au paragraphe 1.5 comment trouver à partir d'un champ L non dégénéré des coordonnées locales dans lesquelles $L = a(\partial_t + ib \cdot \partial_y)$, b à valeurs dans \mathbf{R}^{n-1} , si bien que par cette propriété d'invariance, la condition (P) est aisément vérifiable sur un champ L donné.

Le lecteur remarquera que si L vérifie la condition (P) dans ω , alors $\text{rg } \mathcal{L} \leq 2$ dans $\bar{\omega}$; cependant, la condition (P) dit plus que cela : elle implique

l'existence de variétés de dimension 1 ou 2 le long desquelles le champ L reste tangent (sans qu'il s'agisse de variétés intégrales de \mathcal{L}) ainsi qu'une condition de signe sur les coefficients de L .

1.3. ENONCÉ DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

Munis de ces notations, nous pouvons énoncer les principales réponses apportées à la question posée en 1.1.

THÉORÈME 1.1. *Posons $S_3 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0) \text{ et } \operatorname{rg} \mathcal{L}(x) \geq 3\}$. Si le problème est non caractéristique et si $x_0 \in \bar{S}_3$, alors pour tout voisinage Ω de x_0 , il existe $\omega \subset \Omega$ avec $\omega \cap S_3 \neq \emptyset$, $u \in C^\infty(\omega)$ et $a \in C^\infty(\omega)$ tels que*

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (L + c_0 + a) u(x) = 0 \quad \text{dans } \omega, \\ \operatorname{Supp} u' = \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}, \quad \text{et} \\ \operatorname{Supp} a \subset \omega_+. \end{array} \right.$$

Moralement, ce théorème signifie que pour avoir la propriété d'unicité, il est nécessaire que $\operatorname{rg} \mathcal{L} < 3$ sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Cette condition est également suffisante lorsque nous faisons l'une des deux hypothèses « techniques » introduites au paragraphe précédent :

THÉORÈME 1.2. *Posons $S_3 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0) \text{ et } \operatorname{rg} \mathcal{L}(x) \geq 3\}$; supposons que le problème est non caractéristique et que $x_0 \notin \bar{S}_3$; supposons encore qu'il existe un voisinage Ω de x_0 tel que l'une des deux hypothèses « techniques » suivantes soit vérifiée : soit L vérifie la condition (R) dans Ω , soit L vérifie la condition (P) dans $\Omega_+ = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) > \varphi(x_0)\}$. Alors, pour tout voisinage ω de x_0 et toute $u \in C^1(\omega)$ solution du système*

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (L + c_0) u(x) = 0 \quad \text{dans } \omega, \quad \text{et} \\ u(x) = 0 \quad \text{dans } \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}, \end{array} \right.$$

la fonction u s'annule au voisinage de x_0 .

1.4. COMMENTAIRES SUR LES THÉORÈMES

1. Comme nous le verrons au paragraphe 2.1, le théorème 1.1 s'applique essentiellement aux opérateurs de la forme

$$L = \partial_t + i[t^{k_1} \partial_{y_1} + t^{k_2} \partial_{y_2}], k_1 \neq k_2, \varphi = t.$$

Ce théorème a été démontré dans le cadre plus général des opérateurs d'ordre m quelconque par Alinhac [1] et Robbiano [19] sous la condition $k_1 = 0$.

2. Le théorème 1.2 s'applique aux deux opérateurs suivants définis dans \mathbf{R}^2 :

$$L_{(R)} = \partial_t + it(t+y) \partial_y \quad \text{et} \quad L_{(P)} = \partial_t + ie^{-1/t^2} \partial_y, \varphi = t,$$

le premier vérifiant la condition (R), mais pas la condition (P), et réciproquement pour le second. Ce théorème 1.2 est dû à Strauss et Trèves [24] qui l'ont démontré d'une part sous la condition $\operatorname{rg} \mathcal{L}(x_0) = 2$ dans \mathbf{R}^2 (cas particulier de la condition (R)) et d'autre part en supposant que L vérifie la condition (P) dans tout un voisinage Ω de x_0 .

3. Le théorème 1.2 devient faux si nous supprimons les hypothèses « techniques » ou même si nous supposons seulement que L vérifie la condition (R) dans Ω_+ ; nous montrerons en effet au chapitre 4 que l'opérateur

$$\left\{ \begin{array}{ll} L = \partial_t + ie^{-1/t} \sin \frac{1}{t} \partial_y & \text{si } t > 0, \\ L = \partial_t & \text{si } t \leq 0 \end{array} \right.$$

ne possède pas la propriété d'unicité par rapport à $t = 0$ pourvu que l'on ajoute un terme d'ordre inférieur, bien que $\operatorname{rg} \mathcal{L} \equiv 2$ pour $t > 0$.

4. Dans l'énoncé du théorème 1.1, il convient de remarquer que l'ouvert ω ne contient pas nécessairement le point x_0 ; le théorème 1.1 signifie donc ceci: si nous ne savons pas toujours construire une solution de (1.1) au voisinage de x_0 , nous savons du moins le faire au voisinage de x_1 pour un point x_1 arbitrairement proche de x_0 sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. En revanche, lorsque les hypothèses du théorème 1.2 sont vérifiées en x_0 , elles le sont en tout point suffisamment proche de x_0 sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$, et la conclusion s'applique quel que soit le terme d'ordre inférieur; le théorème 1.2 est donc bien une réciproque du théorème 1.1. Cette remarque correspond à la propriété d'unicité « stable » dont nous avons parlé au paragraphe 1.1.

5. Les hypothèses du théorème 1.2 sous la condition (R) sont équivalentes au groupe d'hypothèses suivant: le problème est non caractéristique, et il existe un voisinage de x_0 où $\operatorname{rg} \mathcal{L} \leq 2$ et où la propriété (Q) introduite par Nirenberg et Trèves [17] est vérifiée (cette propriété (Q) peut s'énoncer

de la façon suivante: par tout point $x \in \Omega$ tel que $\text{rg } \mathcal{L}(x) = 1$ passe une variété intégrale de \mathcal{L}). Sous la condition (P) , nous pourrions omettre l'hypothèse $x_0 \notin \bar{S}_3$ (car (P) dans $\dot{\Omega}_+ \Rightarrow \bar{S}_3 \cap \Omega = \emptyset$), mais nous préférions considérer ce groupe d'hypothèses comme l'hypothèse $x_0 \notin \bar{S}_3$ à laquelle nous avons rajouté une hypothèse « technique ».

6. *Plan de l'ensemble.* Nous exposerons les techniques de construction de contre-exemples à l'unicité dans le chapitre 2 que nous consacrons à démontrer le théorème 1.1. Symétriquement, le chapitre 3 contiendra la démonstration du théorème 1.2 comme illustration des méthodes développées pour obtenir l'unicité. Par ces deux théorèmes, nous avons « génériquement » répondu à la question posée; nous avons cependant écarté trois problèmes marginaux qui feront l'objet des chapitres suivants: au chapitre 4, nous étudierons sur un modèle la situation lorsque $\text{rg } \mathcal{L} \leq 2$ mais que les hypothèses « techniques » ne sont pas vérifiées; au chapitre 5, nous étudierons le problème caractéristique; au chapitre 6 enfin, nous étudierons l'influence du terme d'ordre zéro, c_0 .

1.5. CHOIX DES COORDONNÉES POUR LES PROBLÈMES NON CARACTÉRISTIQUES

Dans ce paragraphe, nous donnons pour les problèmes non caractéristiques (étudiés aux chapitres 2, 3 et 4) un choix de coordonnées permettant d'écrire sous une forme canonique l'opérateur à étudier.

LEMME 1.3. *Supposons que le problème soit non caractéristique; alors il existe près de x_0 un système de coordonnées $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ tel que:*

1. $x_0 = (0, 0)$
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$
3. $L + c_0 = a(y, t) [\partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)]$

où $a: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$, $b: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ et $c: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$ sont des fonctions C^∞ au voisinage de $(0, 0)$ et $a(y, t) \neq 0$ au voisinage de $(0, 0)$.

Démonstration. Commençons par choisir des coordonnées x_1, \dots, x_n telles que $x_0 = (0, \dots, 0)$ et $x_n = \varphi(x) - \varphi(x_0)$; comme le problème est non caractéristique, nous savons que $a_n(0, \dots, 0) \neq 0$; on peut donc écrire

$$L + c_0 = a_n(x) \left[\partial_n + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j(x) + i\beta_j(x)) \partial_j + c_1(x) \right]$$

où les $\alpha_j(x)$ et les $\beta_j(x)$ sont à valeurs réelles. Pour $k = 1, \dots, n - 1$, soit $y_k(x)$ la solution du système

$$\begin{cases} y_k(x', 0) = x_k \\ \partial_n y_k + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \partial_j y_k = 0. \end{cases}$$

Si de plus nous posons $t(x) = x_n$, comme la matrice jacobienne $\frac{\partial(y, t)}{\partial x}$ admet l'unité pour déterminant en $(0, \dots, 0)$, nous pouvons utiliser (y, t) comme nouvelles coordonnées locales; nous obtenons que $L + c_0 = (Lt)\partial_t + \sum(Ly_k)\partial_{y_k} + c_0$ est de la forme 3, d'où le lemme.

CHAPITRE 2: CONSTRUCTION D'UN CONTRE-EXEMPLE

Dans ce chapitre, nous proposons une démonstration du théorème 1.1. La méthode utilisée pour obtenir ce résultat est désormais classique; elle a été mise au point successivement par Cohen [8], Plis [18], Hörmander [10], Alinhac-Zuily [3]. Ici, nous suivrons de très près la démonstration du théorème 1 d'Alinhac [1] (qui, pour le premier ordre, est un cas particulier du théorème 2.2 ci-dessous avec $k_1 = 0$ et $k_2 = 1$).

La technique consiste à choisir une suite de valeurs positives δ_k tendant vers 0, puis à construire par les méthodes de l'optique géométrique des fonctions u_k , pour $\varphi(x)$ voisin de $\varphi(x_0) + \delta_k$, qui soient approximativement dans le noyau de $L + c_0$: c'est ce que nous faisons en 2.2. Puis on ajuste la taille de ces fonctions afin de pouvoir les recoller pour obtenir une solution u définie au voisinage de x_0 et telle que u et $a = -(L + c_0)u/u$ soient régulières: c'est l'opération effectuée en 2.3, les dernières vérifications étant reportées en 2.4.

Afin de limiter la complexité de la construction, il convient de choisir un bon système de coordonnées. C'est ce par quoi nous commençons.

2.1. NOUVEAU CHOIX DE COORDONNÉES

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 1.1 et fixons le voisinage Ω . Grâce au lemme 1.3, nous pouvons déjà trouver des coordonnées locales $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ dans Ω (quitte à restreindre ce dernier) telles que

1. $x_0 = (0, 0)$
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

De plus, en utilisant l'hypothèse $x_0 \in \bar{S}_3$, on peut trouver un point $x_3 = (y_3, 0) \in \Omega$ tel que $\text{rg } \mathcal{L}(x_3) \geq 3$. Nous pouvons alors écrire notre opérateur $L + c_0$ sous une forme encore plus précise que celle donnée par le point 3. ci-dessus, comme le montre le lemme suivant.

LEMME 2.1. *Supposons que $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ et que $\text{rg } \mathcal{L}(x_3) \geq 3$ pour un point $x_3 \in S = \mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}$. Alors, pour tout voisinage Ω de x_3 , il existe un point $x_2 \in \Omega \cap S$, un voisinage ω de x_2 et des entiers $k_1 \geq 0$ et $k_2 > 0$ tels que $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$ et $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$ dans ω avec $(b_1(x_2), b_2(x_2))$ linéairement indépendants.*

Démonstration. On peut déjà supposer que Ω est suffisamment petit pour que le rang de \mathcal{L} reste supérieur ou égal à 3 dans $\Omega \cap S$.

Soit $k_1 = \inf \{k \geq 0 \mid \exists x \in \Omega \cap S : \partial_t^k b(x) \neq 0\}$. Alors $k_1 < \infty$ car $\text{rg } \mathcal{L}(x_3) \geq 3$. Soit donc x_1 un point de $\Omega \cap S$ tel que $\partial_t^{k_1} b(x_1) \neq 0$, et soit $\omega \subset \Omega$ un voisinage de x_1 tel que $\partial_t^{k_1} b(x) \neq 0$ pour tout $x \in \omega \cap S$. Dans ω , on a $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$ avec $b_1(x) \neq 0$ si $x \in S$.

Soit maintenant $k_2 = \inf \{k > 0 \mid \exists x \in \omega \cap S : \partial_t^k b_1(x) \text{ et } b_1(x) \text{ soient linéairement indépendants}\}$. Alors $k_2 < \infty$ car $\text{rg } \mathcal{L}(x_1) \geq 3$. On peut donc écrire dans ω , $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$ et il existe un point $x_2 \in \omega \cap S$ tel que $b_1(x_2)$ et $b_2(x_2)$ soient linéairement indépendants.

Ce lemme nous permettra donc de déduire le théorème 1.1 du théorème suivant (que nous démontrerons aux paragraphes 2.2, 2.3 et 2.4).

THÉORÈME 2.2. *Supposons que $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$, que $b : \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ et $c : \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ sont des fonctions C^∞ dans un voisinage Ω de $x_0 = (y_0, 0)$ et qu'il existe des entiers $k_1 \geq 0$ et $k_2 > 0$ tels que $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$ et $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$ dans Ω avec $(b_1(x_0), b_2(x_0))$ linéairement indépendants. Alors il existe un voisinage ω de x_0 , $u \in C^\infty(\omega)$ et $a \in C^\infty(\omega)$ vérifiant (1.1).*

2.2. OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Nous dirons que $w \in B^\infty(\mathbf{R}^n \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ si $w(x, \delta)$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}^n \times [0, \infty[$, indéfiniment dérivable en x pour $\delta > 0$ et dont les dérivées restent bornées quand δ tend vers 0.

PROPOSITION 2.3. *Sous les hypothèses du théorème 2.2, il existe au voisinage de $(y_0, 0, 0)$ deux fonctions φ et $\beta \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ telles que*

$$(2.1) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} \varphi(y, t, \delta) = -\delta^{k_1+k_2-1}(t-\delta)^2 \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta) & \text{pour } \delta > 0 \\ \beta(y_0, 0, 0) = \beta_0 > 0 \end{cases}$$

et telles que pour toute fonction $\gamma \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$, il existe une fonction $w(y, s, \varepsilon) \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ telle que $w(y, 0, 0) = 1$ et

$$(2.2) \quad \begin{cases} \forall \alpha \in \mathbf{N}^n, \forall v \in \mathbf{N}, \exists \delta_{\alpha, v}: \text{pour } 0 < \delta < \delta_{\alpha, v} \text{ et} \\ \text{pour } (y, \delta^{-2}(t-\delta)) \text{ dans un voisinage fixe de } (y_0, 0) \\ (\text{indépendant de } \alpha \text{ et } v) \\ |\partial^\alpha[(L+c_0)h/h]| \leq 2 \delta^v \end{cases}$$

où on a posé:

$$(2.3) \quad h(y, t, \delta) = w(y, \delta^{-2}(t-\delta), \delta^{1/3}) \exp[-\delta^{-5/3} \gamma(y, \delta) + \delta^{-4-k_1-k_2} \varphi(y, t, \delta)]$$

(dans (2.2), ∂^α désigne la dérivation d'ordre α par rapport à y et t).

Démonstration: en trois parties.

1. *Construction de φ et de β .* Choisissons $\eta_0 \in \mathbf{R}^{n-1}$ tel que $b_1(x_0) \cdot \eta_0 = 0$ et $b_2(x_0) \cdot \eta_0 < 0$ (ce qui est possible grâce à l'hypothèse d'indépendance). Il existe alors une fonction C^∞ à valeurs réelles ψ_1 telle que

$$\begin{cases} b_1(y, \delta) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) = 0 \\ \partial_y \psi_1(y_0, 0) = \eta_0 \end{cases}$$

et on pose:

$$\begin{aligned} \psi_2(y, t, \delta) &= \int_\delta^t b(y, r) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) dr, \\ \varphi(y, t, \delta) &= \psi_2(y, t, \delta) + i\psi_1(y, \delta). \end{aligned}$$

On calcule alors que:

$$\psi_2(y, \delta, \delta) = 0,$$

$$\partial_t \psi_2(y, \delta, \delta) = b(y, \delta) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) = 0 \text{ par choix de } \psi_1, \text{ et}$$

$$\partial_t^2 \psi_2(y, t, \delta) = \partial_t b(y, t) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[k_1 t^{k_1-1} b_1(y, 0) + (k_1 + k_2) t^{k_1+k_2-1} b_2(y, t) + t^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y, t) \right] \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) \\
&= \left[-k_1 t^{k_1-1} \delta^{k_2} b_2(y, \delta) + (k_1 + k_2) t^{k_1+k_2-1} b_2(y, t) + t^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y, t) \right] \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) \\
&= \delta^{k_1+k_2-1} \left[-k_1 \left(\frac{t}{\delta} \right)^{k_1-1} b_2(y, \delta) + (k_1 + k_2) \left(\frac{t}{\delta} \right)^{k_1+k_2-1} b_2(y, t) \right. \\
&\quad \left. + \delta \left(\frac{t}{\delta} \right)^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y, t) \right] \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta).
\end{aligned}$$

Par la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient donc

$$\operatorname{Re} \varphi(y, t, \delta) = \psi_2(y, t, \delta) = -\delta^{k_1+k_2-1} (t-\delta)^2 \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta)$$

où

$$\begin{aligned}
\beta(y, \sigma, \delta) &= \int_0^1 (\theta-1) \left[-k_1 (1+\theta\sigma)^{k_1-1} b_2(y, \delta) \right. \\
&\quad \left. + (k_1 + k_2) (1+\theta\sigma)^{k_1+k_2-1} b_2(y, \delta(1+\theta\sigma)) \right. \\
&\quad \left. + \delta (1+\theta\sigma)^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y, \delta(1+\theta\sigma)) \right] \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) d\theta
\end{aligned}$$

ce qui donne (2.1) puisque $\beta(y_0, 0, 0) = -\frac{1}{2} k_2 b_2(y_0, 0) \cdot \eta_0 > 0$ grâce à notre choix de η_0 .

Notons que

$$L\varphi(y, t, \delta) = -i\delta^{k_1+k_2-1} (t-\delta)^2 b(y, t) \cdot \partial_y \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta)$$

par (2.1), et si on pose $s = \delta^{-2}(t-\delta)$,

$$L[\delta^{-4-k_1-k_2}\varphi(y, t, \delta)] = -i\delta^{-1}s^2 b(y, t) \cdot \partial_y \beta(y, \delta s, \delta).$$

2. *Construction de w.* Définissons l'opérateur M par la relation $(Mw/w) = ((L+c_0)h/h)$ où h est donnée par (2.3); on calcule alors que

$$Mw = \delta^{-2} [\partial_s w + \varepsilon Nw], \quad \text{avec} \quad Nw = iB \cdot \partial_y w + Cw,$$

où B et C sont des fonctions de l'espace $B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ définies par :

$$B(y, s, \varepsilon) = \varepsilon^5 b(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s),$$

$$\begin{aligned} C(y, s, \varepsilon) = & -ib(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s) \cdot \partial_y \gamma(y, \varepsilon^3) - i\varepsilon^2 s^2 b(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s) \cdot \partial_y \beta(y, \varepsilon^3 s, \varepsilon^3) \\ & + \varepsilon^5 c(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s). \end{aligned}$$

Définissons une suite de fonctions w_j de l'espace $B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ par les formules (toutes ces fonctions sont bien définies sur un même domaine)

$$w_0(y, s, \varepsilon) = 1,$$

$$w_{j+1}(y, s, \varepsilon) = \int_0^s -N w_j(y, r, \varepsilon) dr, \quad \text{pour } j \geq 0.$$

Une solution de (2.2)-(2.3) est alors obtenue formellement en posant $w = \sum \varepsilon^j w_j$. Choisissons donc une fonction de troncature, c'est-à-dire une fonction $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\chi = 1$ sur $[0, 1]$, $\chi = 0$ sur $[2, +\infty[$ et $\chi(\varepsilon) \in [0, 1]$ pour $\varepsilon \in [0, +\infty[$. Nous posons

$$w(y, s, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \chi(\lambda_j \varepsilon) w_j(y, s, \varepsilon),$$

et nous allons prouver dans la troisième partie de cette démonstration qu'il existe une suite de réels positifs λ_j telle que cette formule définisse une fonction w de l'espace $B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ qui vérifie de plus (2.2)-(2.3).

3. *Construction de la suite λ_j .* Nous allons montrer qu'il suffit que la suite λ_j croisse assez vite pour que l'on ait les deux propriétés précédentes. Nous pouvons déjà imposer que $\lambda_{j+1} > 2\lambda_j$ de sorte que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, les $\chi(\lambda_j \varepsilon)$ soient tous égaux à 1 ou à 0 sauf au plus l'un d'entre eux.

Soient k un voisinage compact de $y_0, s_0 > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que les fonctions w_j soient bien définies dans $K = k \times [-s_0, s_0] \times [0, \varepsilon_0]$. Pour obtenir que $w \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$, il suffit d'imposer pour tout $J \in \mathbf{N}$,

$$\lambda_J > (J+1) \sup \{ |D^\alpha w_j(y, s, \varepsilon)| \mid (y, s, \varepsilon) \in K, |\alpha| \leq J \quad \text{et} \quad j \leq J+1 \}$$

où D^α désigne la dérivation d'ordre α en y et s . En effet, si $(\lambda_{J+1})^{-1} \leq \varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$,

$$w(y, s, \varepsilon) = \sum_{j=0}^J \varepsilon^j w_j(y, s, \varepsilon) + \varepsilon^{J+1} \chi(\lambda_{J+1} \varepsilon) w_{J+1}(y, s, \varepsilon)$$

donc si $0 < |\alpha| \leq J, (\lambda_{J+1})^{-1} \leq \varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$ et $(y, s, \varepsilon) \in K$,

$$|D^\alpha w(y, s, \varepsilon)| \leq \sum_{j=1}^{J+1} \varepsilon |D^\alpha w_j(y, s, \varepsilon)| \leq 1.$$

Il en résulte que $w \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ car w est continue sur K comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur K .

On a $w(y, 0, 0) = 1$, et si on a choisi le compact K assez petit, on a aussi $|w| > \frac{1}{2}$ dans K (un tel compact K pourra être choisi après coup, une fois que les λ_j auront été fixés); il en résulte que $|(D^\gamma w)/w|$ reste inférieur à 2 pour $\varepsilon \leq (\lambda_{|\gamma|})^{-1}$. Comme on peut écrire $D^\alpha(Nw_j/w)$ comme une somme (algébrique) comportant au plus $(|\alpha|+1)! \times 2$ termes de la forme $[(D^\beta Nw_j)/w] [(D^{\gamma_1} w)/w] \dots [(D^{\gamma_{|\alpha|}} w)/w]$ (avec $\alpha = \beta + \gamma_1 + \dots + \gamma_{|\alpha|}$, par la formule de Leibniz), on obtient une majoration

$$|D^\alpha(Nw_j/w)| \leq (|\alpha|+1)! 2^{|\alpha|+2} \sup \{|D^\beta Nw_j| \mid \beta \leq \alpha\}$$

pourvu que $\varepsilon \leq (\lambda_{|\alpha|})^{-1}$. Si donc nous demandons pour tout J que

$$\begin{aligned} \lambda_J &> (J+1)! 2^{J+2} \sup \{|D^\alpha Nw_j(y, s, \varepsilon)| \mid (y, s, \varepsilon) \in K, |\alpha| \leq J \\ &\quad \text{et } j \leq J+1\}, \end{aligned}$$

alors pour $(\lambda_{J+1})^{-1} \leq \varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$,

$$Mw = \varepsilon^{J-5} [Nw_J(1 - \chi(\lambda_{J+1}\varepsilon)) + Nw_{J+1}\varepsilon\chi(\lambda_{J+1}\varepsilon)]$$

d'où $|D^\alpha(Mw/w)| \leq 2\varepsilon^{J-6}$ pour $|\alpha| \leq J$ (et $(\lambda_{J+1})^{-1} \leq \varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$ et $(y, s, \varepsilon) \in K$). Cette majoration étant obtenue pour tout J , on peut remplacer la condition $(\lambda_{J+1})^{-1} \leq \varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$ par $\varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$.

Pour $\alpha \in \mathbf{N}^n$ et $v \in \mathbf{N}$ fixés, on obtient, en posant $J = 6(1+|\alpha|) + 3v$, que pour $(y, s, \varepsilon) \in K$ et $\varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$,

$$|\partial^\alpha((L+c_0)h/h)| = |\varepsilon^{-6\alpha} D^\alpha(Mw/w)| \leq 2\varepsilon^{3v} = 2\delta^v.$$

2.3. AJUSTEMENT DES FONCTIONS u_k

Nous posons

$$\delta_k = k^{-3/4}, l_k = \delta_k - \delta_{k+1} \left(\sim \frac{3}{4} k^{-7/4} \right) \quad \text{et} \quad m_k = \frac{1}{3} \delta_k + \frac{2}{3} \delta_{k+1}.$$

Puis nous considérons les fonctions $h_k(y, t) = h(y, t, \delta_k)$ définies par (2.3); ces fonctions vérifient (2.2) pour k suffisamment grand et $t \in]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[$ pourvu que $\delta_k^{-2} l_k$ tende vers 0 lorsque k tend vers l'infini, ce qui est bien le cas puisque $\delta_k^{-2} l_k \sim \frac{3}{4} k^{-1/4}$.

En vue de poser $u = h_k + h_{k+1}$ pour t voisin de m_k et de montrer que $a = -(L+c_0)u/u$ est C^∞ , il nous faut déterminer le lieu d'équation $h_{k+1} = -h_k$ (qui est contenu dans le lieu d'équation $|h_{k+1}| = |h_k|$).

PROPOSITION 2.4. Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage Y de y_0 , une fonction $\gamma \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ à valeurs réelles telle que $\gamma(y, 0) > 0$ pour $y \in Y$, et trois suites de fonctions $e_k \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, f_k et $g_k \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R})$ à valeurs réelles telles que les fonctions $h_k(y, t) = h(y, t, \delta_k)$ définies en (2.3) (avec la fonction γ ci-dessus) vérifient $h_k/h_{k+1} = \exp[f_k + ig_k]$ avec

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_Y |f_k(y, m_k)| \right) = 0, \\ \text{et } \partial_t f_k(y, t) > \frac{\beta_0 k^2}{2} \text{ sur } Y \times [\delta_{k+1}, \delta_k]; \end{array} \right.$$

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^n, \text{ il existe } C_\alpha \text{ et } v_\alpha \in \mathbf{N} \text{ tels que sur} \\ Y \times [\delta_{k+1}, \delta_k], |\partial^\alpha f_k(y, t)| \leq C_\alpha k^{v_\alpha} \text{ et } |\partial^\alpha g_k(y, t)| \leq C_\alpha k^{v_\alpha}; \end{array} \right.$$

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} |h_k(y, t)| = |h_{k+1}(y, t)| \Leftrightarrow t = m_k + e_k(y) \\ \text{et } e_k(y) = o(l_k) \text{ (pour } k \rightarrow \infty). \end{array} \right.$$

Démonstration. Posons

$$\varphi_k(y, t) = \delta_k^{-4-k_1-k_2} \varphi(y, t, \delta_k) \text{ et } w_k(y, t) = w(y, \delta_k^{-2}(t-\delta_k), \delta_k^{1/3});$$

les constructions s'effectuent en trois temps.

1. *Construction de γ .* Nous allons choisir la fonction γ de telle sorte que

$$\log |h_k(y, m_k)| - \log |h_{k+1}(y, m_k)| = 0,$$

du moins si on néglige l'influence de w dans la formule (2.3). Nous posons donc

$$\begin{aligned} I_k(y) &= \operatorname{Re} \varphi_k(y, m_k) - \operatorname{Re} \varphi_{k+1}(y, m_k) \\ &= \left[\beta(y, 0, 0) + o(1) \right] \left[-\frac{4}{9} \delta_k^{-5} l_k^2 + \frac{1}{9} \delta_{k+1}^{-5} l_k^2 \right] \text{ (pour } k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

d'après (2.1), et donc si on a choisi Y de telle façon que $\beta(y, 0, 0) > 0$ pour $y \in Y$ (ce qui est possible grâce à (2.1)),

$$I_k(y) \sim -\frac{1}{3} \beta(y, 0, 0) \delta_k^{-5} l_k^2 \sim -\frac{3}{16} \beta(y, 0, 0) k^{1/4} \text{ pour } y \in Y.$$

Remarquons que de même, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^{n-1}$,

$$|\partial^\alpha I_k(y)| \leq C_\alpha k^{1/4}.$$

Nous posons alors, pour k_0 assez grand, $\gamma_k(y) = -\sum_{j=k_0}^{k-1} I_j(y)$; nous avons:

$$\gamma_k(y) \sim \frac{3}{20} \beta(y, 0, 0) k^{5/4} = \frac{3}{20} \beta(y, 0, 0) \delta_k^{-5/3}, \quad \text{et}$$

$$|\partial^\alpha \gamma_k(y)| \leq C_\alpha \delta_k^{-5/3} \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^{n-1},$$

et il existe donc une fonction $\gamma \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ telle que pour tout $k \geq k_0$, $\gamma_k(y) = \delta_k^{-5/3} \gamma(y, \delta_k)$ et que $\gamma(y, 0) = \frac{3}{20} \beta(y, 0, 0) > 0$ pour $y \in Y$.

2. *Construction des suites f_k et g_k .* Comme $\delta_k^{-2} l_k$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini, la fonction w fournie par la proposition 2.3 vérifie

$$(2.7) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{Y \times [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}]} |w_k(y, t) - 1| \right) = 0;$$

nous utiliserons donc la détermination principale du logarithme de w , qui possède les mêmes propriétés de régularité que w ; nous posons

$$\begin{aligned} f_k &= \operatorname{Re} \operatorname{Log} w_k - \operatorname{Re} \operatorname{Log} w_{k+1} + \gamma_k - \gamma_{k+1} + \operatorname{Re} \varphi_k - \operatorname{Re} \varphi_{k+1} \\ g_k &= \operatorname{Im} \operatorname{Log} w_k - \operatorname{Im} \operatorname{Log} w_{k+1} + \operatorname{Im} \varphi_k - \operatorname{Im} \varphi_{k+1}. \end{aligned}$$

Nous avons donc (cf. (2.3)) $h_k/h_{k+1} = \exp [f_k + ig_k]$, et grâce au choix de γ et à (2.7) nous obtenons la première moitié de (2.4) soit $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_Y |f_k(y, m_k)| \right) = 0$. De plus, il est facile de vérifier (2.5) sur les formules ci-dessus définissant f_k et g_k .

3. *Construction de la suite e_k .* Compte tenu de ce qui précède, il ne nous reste plus qu'à montrer la minoration de $\partial_t f_k$ (deuxième moitié de (2.4)) et (2.6). Mais (2.6) découle de (2.4) parce que $|h_{k+1}(y, t)| = |h_k(y, t)|$ équivaut à $f_k(y, t) = 0$ et que $k^2 l_k \left(\sim \frac{3}{4} k^{1/4} \right)$ tend vers l'infini avec k .

En reprenant l'expression de f_k ci-dessus, calculons-en la dérivée par rapport à t

$$\begin{aligned} \partial_t f_k &= \delta_k^{-2} \operatorname{Re} (\partial_s w_k / w_k) - \delta_{k+1}^{-2} \operatorname{Re} (\partial_s w_{k+1} / w_{k+1}) \\ &\quad + \partial_t \operatorname{Re} \varphi_k - \partial_t \operatorname{Re} \varphi_{k+1}. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont $O(\delta_k^{-2})$ lorsque k tend vers l'infini (cf. (2.7)); pour estimer les deux autres, on écrit, grâce à (2.1)

$$\begin{aligned} \delta^{1-k_1-k_2} \partial_t \operatorname{Re} \varphi(y, t, \delta) &= -2(t-\delta) \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta) \\ &\quad - \delta^{-1}(t-\delta)^2 \partial_\alpha \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta) \\ &\leq -\beta_0(t-\delta) \end{aligned}$$

pourvu que $|y - y_0|$, $\delta^{-2}(t-\delta)$ et δ soient suffisamment petits. On obtient donc

$$\begin{aligned}\partial_t f_k(y, t) &\geq \beta_0 \delta_k^{-5}(\delta_k - t) + \beta_0 \delta_{k+1}^{-5}(t - \delta_{k+1}) + O(\delta_k^{-2}) \\ &\geq \beta_0 \delta_k^{-5}(\delta_k - \delta_{k+1}) + \beta_0(t - \delta_{k+1})(\delta_{k+1}^{-5} - \delta_k^{-5}) + O(\delta_k^{-2}) \\ &\geq \beta_0 \delta_k^{-5} l_k + O(\delta_k^{-5} l_k k^{-1}) + O(\delta_k^{-2}) \quad (\text{pour } k \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

Enfin, $\delta_k^{-5} l_k \sim \frac{3}{4} k^2$ et $\delta_k^{-2} = k^{3/2}$, d'où (2.4) puis (2.6).

Maintenant que nous avons circonscrit le lieu où u s'annule (par (2.6)), il faut nous assurer que $(L + c_0)u$ s'annule suffisamment en ce même lieu pour que $(L + c_0)u/u$ soit régulière. Pour cela, nous devons modifier les fonctions h_k .

PROPOSITION 2.5. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage Y de y_0 , un entier k_0 et trois suites de fonctions $u_k \in C^\infty(Y \times]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[)$ à valeurs complexes et F_k et $G_k \in C^\infty(Y \times]\delta_{k+1}, \delta_k[)$ à valeurs réelles tels que si l'on pose*

$$\begin{aligned}r_k(y, t) &= (L + c_0)u_k(y, t)/u_k(y, t) \\ v_k(y, t) &= u_k(y, t)/u_{k+1}(y, t)\end{aligned}$$

on ait $v_k = \exp [F_k + iG_k]$, et r_k , F_k et G_k possèdent les propriétés suivantes pour $k \geq k_0$:

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_k(y, t) \text{ et } r_{k+1}(y, t) \text{ sont « plates » sur } t = m_k + e_k(y) \\ (\text{ce qui signifie que toutes leurs dérivées s'y annulent}); \end{array} \right.$$

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^n \text{ et tout } v \in \mathbf{N}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{Y \times]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[} |k^v \partial^\alpha r_k(y, t)| \right) = 0; \end{array} \right.$$

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_k(y, m_k + e_k(y)) = 0 \\ \text{et } \partial_t F_k(y, t) \geq \frac{\beta_0 k^2}{3} \text{ sur } Y \times]\delta_{k+1}, \delta_k[; \end{array} \right.$$

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^n, \text{ il existe } C_\alpha \text{ et } v_\alpha \in \mathbf{N} \text{ tels que sur} \\ Y \times]\delta_{k+1}, \delta_k[, |\partial^\alpha F_k(y, t)| \leq C_\alpha k^{v_\alpha} \text{ et } |\partial^\alpha G_k(y, t)| \leq C_\alpha k^{v_\alpha}. \end{array} \right.$$

Démonstration: en deux parties.

1. *Construction de la suite u_k .* Nous choisissons les fonctions $u_k(y, t)$ par la formule $u_k = h_k(1 + \varepsilon_k)$ avec

$$\varepsilon_k(y, t) = \varepsilon(y, l_k^{-1}(t - \delta_k), \delta_k)$$

où la fonction $\varepsilon(y, \tau, \delta)$ est à choisir. Pour obtenir (2.8), il faudra que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$,

$$\partial^\alpha [(L + c_0)h_k/h_k] + \partial^\alpha [L\varepsilon_k/(1 + \varepsilon_k)] = 0$$

sur $t = m_k + e_k(y)$ et sur $t = m_{k-1} + e_{k-1}(y)$. Si nous demandons de plus à la fonction ε de s'annuler sur les fermés Φ_k et Ψ_k définis ci-dessous, ces conditions sont encore équivalentes à la suite d'équations suivante :

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } j \geq 1 \text{ et tout } k \geq k_0, \\ \partial_\tau^j \varepsilon(y, \tau, \delta) = \varphi_{j,k}(y) \text{ sur} \\ \Phi_k = \{(y, \tau, \delta) \mid y \in \bar{Y}, \delta = \delta_k \text{ et } \tau = l_k^{-1}(m_k + e_k(y) - \delta_k)\}, \\ \partial_\tau^j \varepsilon(y, \tau, \delta) = \psi_{j,k}(y) \text{ sur} \\ \Psi_k = \{(y, \tau, \delta) \mid y \in \bar{Y}, \delta = \delta_k \text{ et } \tau = l_k^{-1}(m_{k-1} + e_{k-1}(y) - \delta_k)\}, \end{array} \right.$$

où les fonctions $\varphi_{j,k}(y)$ et $\psi_{j,k}(y)$ s'expriment en fonction des dérivées de $(L + c_0)h_k/h_k$ et sont donc à décroissance rapide en k ainsi que toutes leurs dérivées grâce à (2.2). Nous demanderons aussi à la fonction ε de vérifier

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } l > 0 \text{ et tout } j \geq 0, \text{ ainsi que pour } j = l = 0, \\ \text{et pour tout } k \geq k_0, \partial_\tau^j \partial_\delta^l \varepsilon(y, \tau, \delta) = 0 \text{ sur } \Phi_k \text{ et } \Psi_k, \text{ et} \end{array} \right.$$

$$(2.14) \quad \partial_\delta^l \varepsilon(y, \tau, 0) = 0 \quad \text{pour tout } l \geq 0.$$

Il existe une fonction $\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ vérifiant (2.12), (2.13) et (2.14) : elle nous est fournie par le théorème d'extension de Whitney [26] appliqué au fermé

$$\{(y, \tau, \delta) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \delta = 0\} \cup \left(\bigcup_{k \geq k_0} \Phi_k \right) \cup \left(\bigcup_{k \geq k_0} \Psi_k \right).$$

Les conditions de compatibilité requises pour pouvoir utiliser ce théorème sont trivialement vérifiées puisque les fonctions $\varphi_{j,k}$ et $\psi_{j,k}$ sont à décroissance rapide en k ainsi que leurs dérivées, et que $l_k^{-1}(m_k + e_k(y) - \delta_k)$

$$= -\frac{2}{3} + O(k^{-1}) \text{ et } l_k^{-1}(m_{k-1} + e_{k-1}(y) - \delta_k) = \frac{1}{3} + O(k^{-1}) \text{ (pour } k \rightarrow \infty).$$

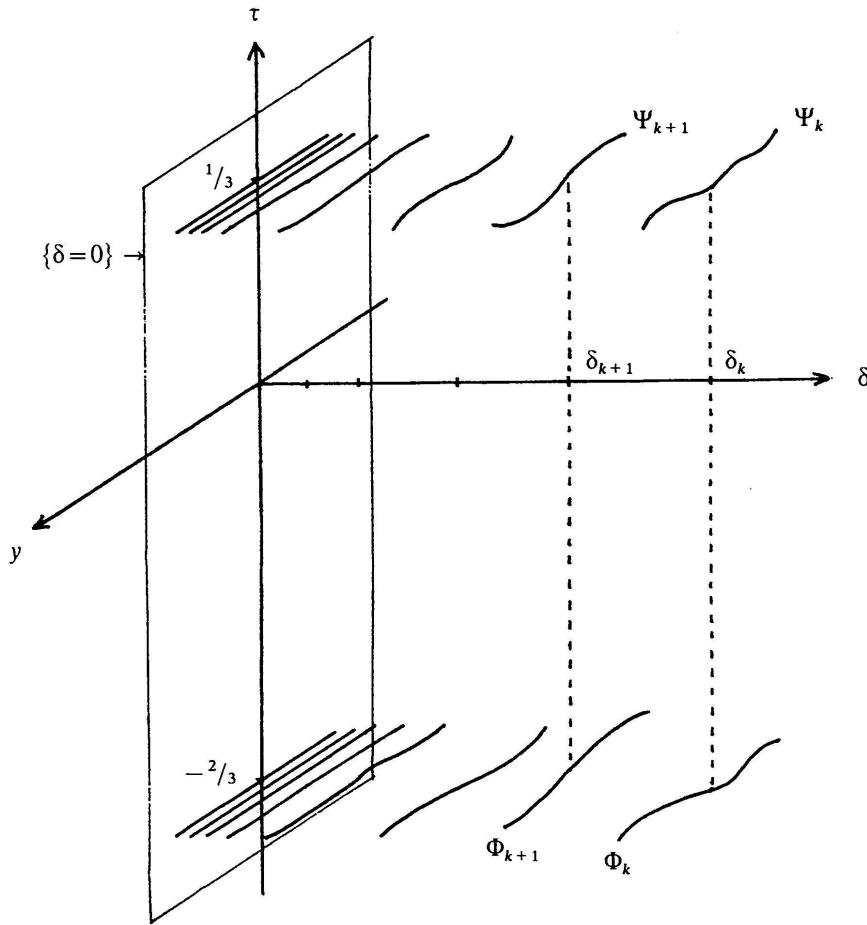


FIGURE 2.1.
Le fermé auquel on applique le théorème de Whitney.

2. *Construction des suites F_k et G_k .* Les équations (2.12) ont été choisies pour que r_k et r_{k+1} soient plates sur $t = m_k + e_k(y)$: la propriété (2.8) est donc acquise. De la condition (2.14) nous tirons que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$ et tout $v \in \mathbf{N}$,

$$(2.15) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{Y \times [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}]} |k^v \partial^\alpha \epsilon_k| \right) = 0,$$

et par conséquent, on obtient (2.9) en utilisant (2.2) et la formule

$$\partial^\alpha r_k = \partial^\alpha [(L + c_0) h_k / h_k] + \partial^\alpha [L \epsilon_k / (1 + \epsilon_k)].$$

L'estimation (2.15) permet aussi d'utiliser la détermination principale du logarithme de $1 + \epsilon$; nous posons donc:

$$\begin{aligned} F_k &= f_k + \operatorname{Re} \operatorname{Log}(1 + \epsilon_k) - \operatorname{Re} \operatorname{Log}(1 + \epsilon_{k+1}) \\ G_k &= g_k + \operatorname{Im} \operatorname{Log}(1 + \epsilon_k) - \operatorname{Im} \operatorname{Log}(1 + \epsilon_{k+1}). \end{aligned}$$

Nous avons alors $v_k = \exp [F_k + iG_k]$, et F_k et G_k vérifient (2.10) et (2.11) grâce à ces formules qui les définissent et à (2.4), (2.5), (2.6), (2.13) ($j=l=0$) et (2.15).

2.4. CONSTRUCTION DES FONCTIONS u ET a

Par un calcul élémentaire nous voyons que pour $y \in Y$ et k assez grand, $\delta_{k+1} < \delta_k - \frac{3}{4} l_k < m_k + e_k(y) < \delta_{k+1} + \frac{3}{4} l_{k+1} < \delta_k$. Nous choisissons alors une fonction à valeurs réelles $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\chi(\tau) = 1 \quad \text{pour } \tau \in [-3/4, 3/4],$$

$$\text{supp } \chi \subset [-1, 1] \quad \text{et} \quad \chi(\tau) \in [0, 1] \quad \text{pour } \tau \in [-1, 1];$$

puis avec $\chi_k(t) = \chi(l_k^{-1}(t - \delta_k))$ nous posons

$$\begin{cases} u(y, t) = \sum_{k \geq k_0} \chi_k(t) u_k(y, t) & \text{pour } (y, t) \in Y \times]0, \delta_{k_0}[, \\ u(y, t) = 0 & \text{pour } (y, t) \in Y \times]-\delta_{k_0}, 0] \\ \begin{cases} a(y, t) = -(L + c_0)u(y, t)/u(y, t) & \text{pour } u(y, t) \neq 0, \\ a(y, t) = 0 & \text{pour } u(y, t) = 0. \end{cases} \end{cases}$$

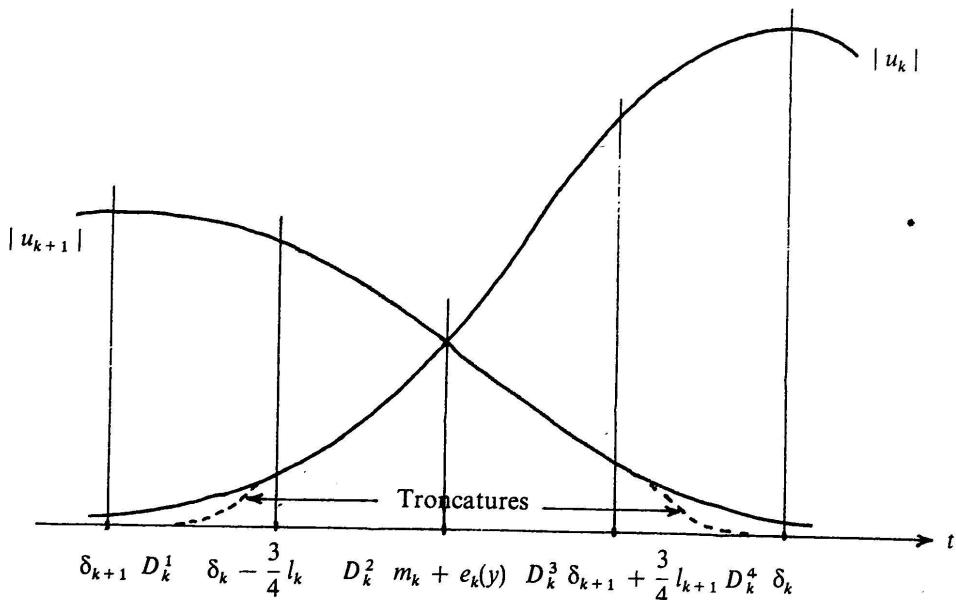


FIGURE 2.2.

Profils des fonctions u_k et u_{k+1} pour $t \in [\delta_{k+1}, \delta_k]$.

Régularité de la fonction u . Remarquons d'abord qu'une telle fonction u est C^∞ . En effet, pour $t > 0$, u est somme d'au plus deux termes non nuls qui sont des fonctions C^∞ , et u est donc C^∞ dans $Y \times]0, \delta_{k_0}[$; pour voir que u est C^∞ au voisinage de $t = 0$, il suffit de montrer que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$,

$$(2.16) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{Y \times [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[} \left| \partial^\alpha (\chi_k u_k) \right| \right) = 0.$$

Or tous les éléments ayant servi à la construction de u_k se comportent comme des puissances de k ainsi que leurs dérivées; on peut donc écrire

$$|\partial^\alpha (\chi_k u_k)| \leq C_\alpha k^{v_\alpha} \exp(-\gamma_k + \operatorname{Re} \varphi_k).$$

Mais $-\gamma_k(y) \sim -\frac{3}{20} \beta(y, 0, 0) k^{5/4}$, et

$$|\operatorname{Re} \varphi_k| \leq \frac{4}{3} \delta_k^{-5} l_k^2 \beta(y, 0, 0) \leq k^{1/4} \beta(y, 0, 0)$$

pour k suffisamment grand et $y \in Y$; comme $\beta(y, 0, 0) > 0$ pour $y \in Y$, cela donne (2.16).

Détermination des supports des fonctions u et a . D'après (2.10), nous savons que $|v_k(y, t)| < 1$ pour $t \in [\delta_{k+1}, m_k + e_k(y)[$, et comme dans ce même domaine $u = u_{k+1} + \chi_k u_k$, soit $u = u_{k+1}(1 + \chi_k v_k)$, on en déduit que u ne s'annule pas; on démontrerait de même que u ne s'annule pas pour $t \in]m_{k+1} + e_{k+1}(y), \delta_{k+1}[$, ni donc dans le domaine

$D = \{(y, t) \in Y \times]-\delta_{k_0}, \delta_{k_0}[\mid t > 0 \text{ et } t \neq m_k + e_k(y) \text{ pour tout } k \geq k_0\}$ qui est dense dans $Y \times [0, \delta_{k_0}[$; il en résulte que $\operatorname{supp} u = Y \times [0, \delta_{k_0}[$, et par définition de a , on a $\operatorname{supp} a \subset \operatorname{supp} u$. Pour obtenir (1.1), il ne nous reste plus qu'à montrer que a est C^∞ dans $Y \times]-\delta_{k_0}, \delta_{k_0}[$.

Régularité de la fonction a . Dans le domaine D défini ci-dessus, $u \neq 0$ donc la fonction a est définie par la formule $a = -(L + c_0)u/u$; il en résulte que a est C^∞ dans D . Pour t voisin de $m_k + e_k(y)$, $u = u_{k+1} + u_k$, donc pour $u_{k+1} + u_k \neq 0$, $a = -(L + c_0)u/u = -(r_{k+1}u_{k+1} + r_ku_k)/(u_{k+1} + u_k)$; en particulier,

$$\begin{cases} a = -(r_{k+1} + r_k v_k)/(1 + v_k) & \text{si } t < m_k + e_k(y) (\Leftrightarrow |v_k| < 1) \\ a = -(r_{k+1} v_k^{-1} + r_k)/(1 + v_k^{-1}) & \text{si } t > m_k + e_k(y) (\Leftrightarrow |v_k^{-1}| < 1). \end{cases}$$

Dans la première de ces deux formules, le numérateur est plat sur $t = m_k + e_k(y)$ à cause de (2.8), et le dénominateur vérifie

$$|1 + v_k| \geq 1 - |v_k| \geq \frac{\beta_0 k^2}{12} (m_k + e_k(y) - t)$$

d'après (2.10) et en utilisant l'inégalité $e^F \leq 1 + \frac{F}{4}$ pour $F \in [-2, 0]$. L'expression $(r_{k+1} + r_k v_k)/(1 + v_k)$ définit donc une fonction plate sur $t = m_k + e_k(y)$, et comme il en est de même pour l'autre expression, nous avons obtenu que, même si u s'annule en certains points de $t = m_k + e_k(y)$ (ce qui entraîne que $a = 0$ par définition de a), la fonction a est C^∞ dans $Y \times]0, \delta_{k_0}[$.

Pour montrer que a est C^∞ pour t voisin de 0, il nous faut estimer les dérivées de a sur $Y \times [\delta_{k+1}, \delta_k]$ lorsque k tend vers l'infini. Pour cela, nous étudions a successivement sur les quatre intervalles schématisés sur la figure 2.2.

1. Sur $D_k^1 = \{(y, t) \mid \delta_{k+1} \leq t \leq \delta_k - \frac{3}{4} l_k\}$, on a

$$F_k(y, t) \leq \frac{\beta_0 k^2}{3} \left(\delta_k - \frac{3}{4} l_k - m_k - e_k(y) \right) \leq -\frac{\beta_0}{50} k^{1/4}$$

pour k assez grand d'après (2.10). En utilisant aussi (2.11), on obtient que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$ et tout $v \in \mathbf{N}$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{D_k^1} |k^v \partial^\alpha v_k| \right) = 0.$$

Sur D_k^1 , u et a sont données par les formules $u = u_{k+1} + \chi_k u_k$ et $a = -(L + c_0)u/u$, d'où

$$\begin{aligned} a &= - \left[(L + c_0)u_{k+1} + \chi_k(L + c_0)u_k + l_k^{-1} \chi' \left(\frac{t - \delta_k}{l_k} \right) u_k \right] / u \\ &= - \left(r_{k+1} + \left[\chi_k r_k + l_k^{-1} \chi' \left(\frac{t - \delta_k}{l_k} \right) \right] v_k \right) / (1 + \chi_k v_k). \end{aligned}$$

On en déduit, à l'aide de l'estimation précédente et de (2.9) que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{D_k^1} |\partial^\alpha a| \right) = 0.$$

2. Sur $D_k^2 = \{(y, t) \mid \delta_k - \frac{3}{4}l_k \leq t < m_k + e_k(y)\}$, on a $F_k(y, t) < 0$ d'après (2.10) d'où $|v_k| < 1$. Comme $u = u_{k+1} + u_k \neq 0$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} a &= -(L + c_0)u/u = -(r_{k+1}u_{k+1} + r_ku_k)/(u_{k+1} + u_k) \\ &= -(r_{k+1} + r_kv_k)/(1 + v_k), \end{aligned}$$

et toutes les dérivées d'une telle expression peuvent être estimées par des sommes de puissances de k avec des coefficients de la forme $(\partial^\alpha r_{k+1})/(1 + v_k)^\nu$. Mais grâce à (2.10)

$$|1 + v_k| \geq 1 - |v_k| \geq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\beta_0 k^2}{12} (m_k + e_k(y) - t) \right\}$$

car $e^F \leq \frac{1}{2}$ pour $F \in]-\infty, -1]$ et $e^F \leq 1 + \frac{F}{4}$ pour $F \in [-2, 0]$, et le théorème des accroissements finis donne pour $(y, t) \in D_k^2$

$$\begin{aligned} &|\partial^\alpha r_{k+1}(y, t) / (m_k + e_k(y) - t)^\nu| \\ &\leq \sup \{ |\partial^{\alpha+\beta} r_{k+1}(y, t)| \mid (y, t) \in D_k^2 \text{ et } |\beta| \leq \nu \} \end{aligned}$$

puisque r_{k+1} est plate sur $t = m_k + e_k(y)$ (cf. (2.8)). On obtient donc en utilisant (2.9) que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{D_k^2} |\partial^\alpha a| \right) = 0.$$

3. Sur $D_k^3 = \{(y, t) \mid m_k + e_k(y) < t \leq \delta_{k+1} + \frac{3}{4}l_{k+1}\}$ on procède comme sur D_k^2 en échangeant les rôles de u_k et u_{k+1} , et donc en utilisant v_k^{-1} à la place de v_k .

4. Sur $D_k^4 = \{(y, t) \mid \delta_{k+1} + \frac{3}{4}l_{k+1} \leq t \leq \delta_k\}$ on procède comme sur D_k^1 en échangeant les rôles de u_k et u_{k+1} .

CHAPITRE 3: TECHNIQUES D'UNICITÉ

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment prouver certaines inégalités de Carleman, et comment les utiliser pour obtenir l'unicité de Cauchy. En guise d'exemple, nous donnons une démonstration complète pour le cas elliptique (3.1).

Pour démontrer le théorème 1.2, nous suivrons le schéma proposé par Strauss et Trèves [24] sauf au paragraphe 3.2 où nous nous inspirons de Zuily [28]. Il faut dans la démonstration distinguer les étapes suivantes : tout d'abord une étape purement locale où nous établissons un lemme technique copié sur le cas elliptique (3.2); puis nous effectuons par deux fois un passage du local au global afin d'obtenir le théorème 1.2 sous la condition (*R*) d'abord dans \mathbf{R}^2 (3.3), puis dans \mathbf{R}^n (3.4); enfin, c'est de nouveau en « globalisant » le résultat donné par le lemme du paragraphe 3.2 que nous obtenons le théorème 1.2 sous la condition (*P*) (3.5).

3.1. LE PROBLÈME ELLIPTIQUE

Un champ L de \mathbf{R}^2 est dit elliptique en x_0 si les champs réels $X = \operatorname{Re} L$ et $Y = \operatorname{Im} L$ sont linéairement indépendants en x_0 . Pour toute fonction φ telle que $d\varphi(x_0) \neq 0$, le problème associé à un champ elliptique est non caractéristique. Le champ L sera dit elliptique dans un ouvert Ω de \mathbf{R}^2 s'il est elliptique en chacun de ses points.

THÉORÈME 3.1. *Soit L un champ elliptique en un point $x_0 \in \mathbf{R}^2$. Alors, pour tout voisinage ω de x_0 et toute $u \in C^1(\omega)$ solution du système*

$$(3.1) \quad \begin{cases} (L + c_0)u(x) = 0 & \text{dans } \omega \text{ et} \\ u(x) = 0 & \text{dans } \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}, \end{cases}$$

la fonction u s'annule au voisinage de x_0 .

Démonstration. Posons

$$\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) + |x - x_0|^2 \quad \text{et} \quad \Psi(x) = -(\psi(x) - \varepsilon_0)^2$$

pour un $\varepsilon_0 > 0$ que nous choisirons ultérieurement. Remarquons que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $K_\varepsilon = \{x \in \omega_+ \mid \psi(x) \leq \varepsilon\}$ est un compact tel que x_0 soit un point intérieur de $K_\varepsilon \cup \omega_-$.

Le point clé de la démonstration, que nous établirons plus loin, est l'obtention de l'inégalité suivante (dite inégalité de Carleman) : il existe des constantes $\tau_0 < \infty$ et $C < \infty$, et un opérateur R (du premier ordre) tels que $\forall v \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_0}$, $\forall \tau \geq \tau_0$,

$$(3.2) \quad \int e^{-2\tau\Psi} |v|^2 \leq C \int e^{-2\tau\Psi} |(L + c_0)v| (|Rv| + |v|).$$

Montrons pour le moment comment obtenir l'unicité à partir d'une telle inégalité. Des valeurs ε_1 et ε_2 étant fixées de telle manière que $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, nous choisissons une fonction de troncature $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ telle que $\chi = 1$ sur K_{ε_1} et $\text{supp } \chi \cap \omega_+ \subset K_{\varepsilon_0}$:

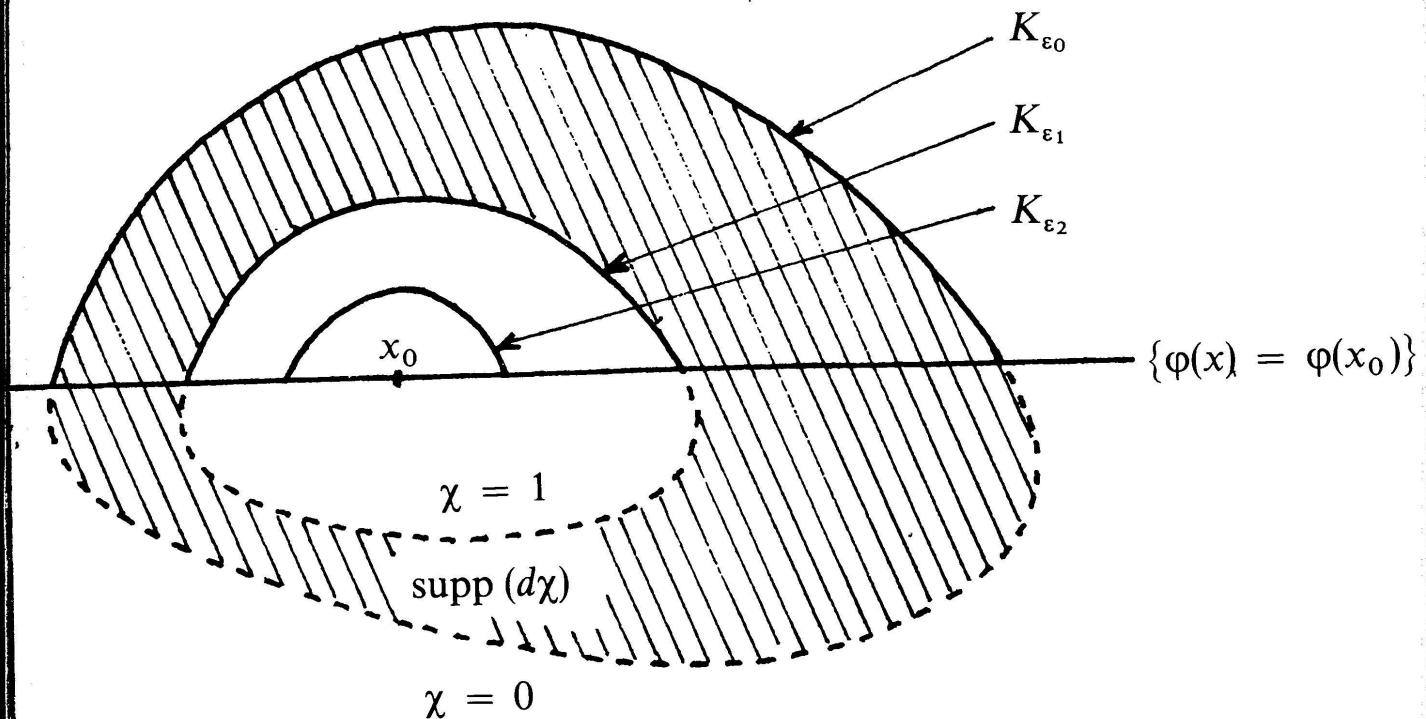


FIGURE 3.1.
Le support de χ et les compacts K_{ε_0} , K_{ε_1} et K_{ε_2} .

Soit u une solution du système (3.1); formons $v = \chi u$ le produit de u par χ : $v \in C^1(\mathbf{R}^2)$ et $\text{supp } v \subset K_{\varepsilon_0}$, donc on peut appliquer l'inégalité (3.2) à v . Mais d'autre part

$$\begin{aligned} e^{2\tau(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)^2} \int_{K_{\varepsilon_2}} |u|^2 &\leq \int_{K_{\varepsilon_2}} e^{-2\tau\Psi} |u|^2 \\ &= \int_{K_{\varepsilon_2}} e^{-2\tau\Psi} |v|^2 \leq \int_{K_{\varepsilon_0}} e^{-2\tau\Psi} |v|^2, \end{aligned}$$

et d'autre part, $(L + c_0)v = \chi(L + c_0)u + [L, \chi]u = (L\chi)u = 0$ sur K_{ε_1} , d'où

$$\begin{aligned} \int_{K_{\varepsilon_0}} e^{-2\tau\Psi} |(L + c_0)v| (|Rv| + |v|) &= \int_{K_{\varepsilon_0} \setminus K_{\varepsilon_1}} e^{-2\tau\Psi} |(L + c_0)v| (|Rv| + |v|) \\ &\leq e^{2\tau(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2} \int_{K_{\varepsilon_0}} |(L + c_0)v| (|Rv| + |v|). \end{aligned}$$

L'inégalité (3.2) donne donc pour $\tau \geq \tau_0$,

$$\int_{K_{\varepsilon_2}} |u|^2 \leq Ce^{2\tau(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(2\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \int_{K_{\varepsilon_0}} |(L + c_0)v| (|Rv| + |v|),$$

et comme $(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(2\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) < 0$, il suffit de laisser τ tendre vers l'infini pour savoir que $u = 0$ dans K_{ε_2} donc au voisinage de x_0 .

Démonstration de l'inégalité (3.2). Comme $d\psi(x_0) = d\phi(x_0) \neq 0$ et que L est elliptique en x_0 , le problème (avec ψ) est non caractéristique et nous pouvons d'après le lemme 1.3 trouver des coordonnées $(y, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ telles que

1. $x_0 = (0, 0)$,
2. $\psi(x) = t$,
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

Comme L est elliptique en x_0 , nous supposerons que $b(0, 0) > 0$ (sinon, changer y en $-y$), et prendrons ε_0 suffisamment petit pour que $b \geq \delta > 0$ dans K_{ε_0} .

En vue d'écrire $w = e^{-\tau\Psi}v$, posons $L_\tau = e^{-\tau\Psi}(L + c_0)e^{\tau\Psi}$, et $c = c_1 + ic_2$ où c_1 et c_2 sont à valeurs réelles; d'après les points 2 et 3 ci-dessus, on calcule que:

$$L_\tau = \partial_t - 2\tau(t - \varepsilon_0) + ib \partial_y + c_1 + ic_2 = M + iN \quad \text{où}$$

$$\begin{cases} M = \partial_t + ic_2 \\ N = b \partial_y + i(2\tau(t - \varepsilon_0) - c_1). \end{cases}$$

Dans le découpage ci-dessus, nous avons séparé la partie autoadjointe de la partie anti-autoadjointe pour pouvoir effectuer des intégrations par parties. En effet, pour $w \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec $\text{supp } w \subset K_{\varepsilon_0}$,

$$\operatorname{Re} \int \frac{1}{ib} L_\tau w \overline{Nw} = \operatorname{Re} \int \frac{1}{ib} Mw \overline{Nw} + \int \frac{|Nw|^2}{b} \geq \operatorname{Re} \int \frac{1}{ib} Mw \overline{Nw}$$

puisque $b > 0$ dans K_{ε_0} ; puis

$$2 \operatorname{Re} \int Mw \overline{(Nw/ib)} = \int |w|^2 \partial_t [(2\tau(t - \varepsilon_0) - c_1)/b] - \int |w|^2 \partial_y c_2$$

par intégrations par parties. On obtient donc:

$$\int |w|^2 \left(2\tau \left[(b - (t - \varepsilon_0) \partial_t b)/b^2 \right] - [\partial_y c_2 + \partial_t(c_1/b)] \right)$$

$$\leq 2 \operatorname{Re} \int \frac{1}{ib} L_\tau w \overline{Nw} \leq 2 \int |L_\tau w| |Nw/b|.$$

Choisissons donc ε_0 assez petit pour que $| (t - \varepsilon_0) \partial_t b | \leq \delta/2$ dans K_{ε_0} , puis τ_0 suffisamment grand pour que $|\partial_y c_2 + \partial_t(c_1/b)| \leq \delta \tau_0 / (2 \sup_{K_{\varepsilon_0}} b^2)$ dans K_{ε_0} ; alors, pour $\tau \geq \tau_0$ et $C_0 = 4 \sup b^2 / \delta$,

$$\frac{\tau}{C_0} \int |w|^2 \leq \int |L_\tau w| |Nw/b|.$$

Enfin, pour $v \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_0}$, posons $w = e^{-\tau\Psi} v$, et reportons cette expression dans l'inégalité précédente; on obtient:

$$\int e^{-2\tau\Psi} |v|^2 \leq \frac{C_0}{\tau} \int e^{-2\tau\Psi} |(L + c_0)v| |(\partial_y - ic_1/b)v|$$

$$+ C_0 \int e^{-2\tau\Psi} |(L + c_0)v| |2(t - \varepsilon_0)v/b|$$

d'où l'inégalité (3.2) si nous posons

$$R = \partial_y - ic_1/b \quad \text{et} \quad C = \max \{ C_0/\tau_0, C_0 \sup |2(t - \varepsilon_0)/b| \}.$$

Remarques. Il existe pour les champs elliptiques des inégalités de Carleman meilleures que l'inégalité (3.2); nous avons fait ce choix parce que ce résultat s'étend à des champs non elliptiques comme nous le verrons plus loin. L'introduction du facteur $1/b$ dans les intégrales a pour but de remplacer $\int b \partial_t w \partial_y \bar{w}$ qui nécessite des calculs pour être estimée, par $\int \partial_t w \partial_y \bar{w}$ dont la partie imaginaire est nulle; c'est là que nous utilisons l'ellipticité de L . Dans le prochain paragraphe, nous allons montrer qu'un tel calcul est encore possible sous des hypothèses plus faibles sur L . Avant cela, donnons un corollaire du théorème 3.1.

COROLLAIRE 3.2. Soit Ω un ouvert connexe de \mathbf{R}^2 dans lequel le champ L est elliptique. Si $u \in C^1(\Omega)$ vérifie $(L + c_0)u(x) = 0$ dans Ω et s'annule dans un ouvert non vide $\omega \subset \Omega$, alors u est nulle dans Ω .

Démonstration. Notons $F = \operatorname{supp} u$ et supposons que $F \neq \overset{\circ}{F}$.

Alors il existe $x_0 \in F \setminus \overset{\circ}{F}$. Comme $x_0 \in \Omega$, il existe une boule ouverte centrée en x_0 , $B(x_0, \delta)$, qui soit contenue dans Ω . Comme $x_0 \notin \overset{\circ}{F}$, il existe

un point $x_1 \in B(x_0, \delta/2)$ tel que $x_1 \notin F$. Soit alors $\varepsilon = \sup \{r \mid B(x_1, r) \cap F = \emptyset\}$; on a $0 < \varepsilon \leq \delta/2$ puisque F est fermé et que $x_0 \in F$, donc $B(x_1, \varepsilon) \subset B(x_0, \delta) \subset \Omega$. De plus, par compacité il existe $x_2 \in F \cap \overline{B(x_1, \varepsilon)}$.

Soit $\varphi(x) = |x - x_1|^2$; alors u est nulle dans $\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \leq \varepsilon^2\} = \overline{B(x_1, \varepsilon)}$ puisque $B(x_1, \varepsilon) \cap F = \emptyset$ par définition de ε ; or le problème est elliptique en x_2 et $d\varphi(x_2) = 2(x_2 - x_1) \neq 0$, donc par le théorème 3.1, $u = 0$ au voisinage de x_2 , ce qui contredit le fait que $x_2 \in F = \text{supp } u$.

Cette contradiction prouve que le support de u est à la fois ouvert et fermé. Mais $\text{supp } u \neq \Omega$ puisque $\omega \neq \emptyset$ est contenu dans le complémentaire de ce support. Comme Ω est connexe, c'est que $\text{supp } u = \emptyset$.

3.2. UN LEMME TECHNIQUE

Pour préparer la démonstration du théorème 1.2, nous donnons maintenant un résultat d'unicité dans \mathbf{R}^2 copié sur le résultat précédent, mais sous des hypothèses plus faibles.

LEMME 3.3. *Soient $\theta: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et $b: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions C^∞ . Supposons qu'il existe un voisinage convexe ω de $(y_0, \theta(y_0))$ tel que b soit positive sur $\omega_+ = \{(y, t) \in \omega \mid t \geq \theta(y)\}$ et $b(y_0, t_0) > 0$ pour un t_0 tel que $(y_0, t_0) \in \omega_+$. Alors pour toute $u \in C^1(\omega)$ solution du système*

$$(3.3) \quad \begin{cases} \partial_t u + ib \partial_y u + cu = 0 \text{ dans } \omega, \text{ et} \\ u = 0 \text{ dans } \omega_- = \{(y, t) \in \omega \mid t \leq \theta(y)\} \end{cases}$$

la fonction u s'annule au voisinage de $(y_0, \theta(y_0))$.

Démonstration. Elle sera très semblable à celle du théorème 3.1. Pour commencer, nous allons choisir un poids ψ fabriqué de telle manière que l'opérateur $n = N/b$ soit encore bien défini.

Si $b(y_0, \theta(y_0)) > 0$, nous sommes dans le cas elliptique, et le résultat découle du théorème 3.1; nous supposerons donc tout au long de cette démonstration que $b(y_0, \theta(y_0)) = 0$. Le t_0 de l'hypothèse vérifie donc $t_0 > \theta(y_0)$, et il existe un voisinage de (y_0, t_0) contenu dans ω_+ tel que $b \geq \delta > 0$ dans ce voisinage (et nous supposerons $\delta \leq 1$ dans la suite); nous pouvons même choisir ce voisinage de la forme

$$]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[\times]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[.$$

Nous posons alors

$$(3.4) \quad \psi(y, t) = (y - y_0)^2 + \int_{\theta(y)}^t b(y, s) (t_0 + \alpha - s) ds.$$

Alors, pour tout $0 < \varepsilon \leq \alpha^2 \delta$, $K_\varepsilon = \{x \in \omega_+ \mid \psi(x) \leq \varepsilon\}$ est un compact tel que x_0 soit un point intérieur de $K_\varepsilon \cup \omega_-$, ce qui nous permettra de déduire l'unicité de l'inégalité de Carleman (3.5) comme dans la démonstration du théorème 3.1.

Soit $0 < \varepsilon_0 \leq \alpha^2 \delta$ que nous fixerons plus loin. En vue d'écrire $w = v \exp\left(-\tau\psi + \int_{t_0}^t c(y, s) ds\right)$, posons

$$L_\tau = \left[\exp\left(-\tau\psi + \int_{t_0}^t c(y, s) ds\right) \right] [\partial_t + ib\partial_y + c] \left[\exp\left(\tau\psi - \int_{t_0}^t c(y, s) ds\right) \right].$$

Grâce à (3.4), et en posant $\int_{t_0}^t \partial_y c(y, s) ds = c_1(y, t) + ic_2(y, t)$ où c_1 et c_2 sont à valeurs réelles, on calcule que :

$$\begin{aligned} L_\tau &= [\partial_t + \tau b(t_0 + \alpha - t) - c] + ib[\partial_y + \tau \partial_y \psi - (c_1 + ic_2)] + c \\ &= M + iN = M + ibn \end{aligned}$$

où nous avons séparé la partie autoadjointe de la partie anti-autoadjointe :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{\partial}{\partial t} + i\tau b \frac{\partial \psi}{\partial y} - ibc_1 \\ n = \frac{\partial}{\partial y} - i\tau(t_0 + \alpha - t) - ic_2. \end{array} \right.$$

Alors, pour $w \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec $\text{supp } w \subset K_{\varepsilon_0}$,

$$\operatorname{Re} \int \frac{1}{i} L_\tau \overline{wnw} = \operatorname{Re} \int \frac{1}{i} M \overline{wnw} + \int b |nw|^2 \geq \operatorname{Re} \int \frac{1}{i} M \overline{wnw}$$

puisque $b \geq 0$ dans K_{ε_0} ; puis,

$$2 \operatorname{Re} \int M w \overline{(nw/i)} = - \int |w|^2 \partial_t (\tau(t_0 + \alpha - t) + c_2) - \int |w|^2 \partial_y (\tau b \partial_y \psi - bc_1)$$

par intégrations par parties. On obtient donc

$$\begin{aligned} & \int |w|^2 [\tau(1 - \partial_y(b\partial_y\psi)) + (\partial_y(bc_1) - \partial_t(c_2))] \\ & \leq 2 \operatorname{Re} \int \frac{1}{i} L_\tau w \overline{nw} \leq 2 \int |L_\tau w| |nw|. \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant distinguer deux cas. Pour cela, posons $\theta_0 = \sup \{t > \theta(y_0) \mid \forall s \in [\theta(y_0), t], b(y_0, s) = 0\}$; alors $\theta(y_0) \leq \theta_0 < t_0$. Si $\theta_0 = \theta(y_0)$, alors pour tout voisinage de $(y_0, \theta(y_0))$ on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que K_ε soit contenu dans ce voisinage; en revanche, si $\theta_0 > \theta(y_0)$, alors ψ est nulle sur $K_0 = \{y_0\} \times [\theta(y_0), \theta_0]$, et c'est seulement pour tout voisinage de K_0 qu'on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que K_ε soit contenu dans ce voisinage. Cette distinction de cas nous permet d'écrire :

1. Si $\theta_0 = \theta(y_0)$, calculons $\partial_y\psi$ par la formule (3.4) :

$$\partial_y\psi = 2(y - y_0) + \int_{\theta(y)}^t \partial_y b(y, s) (t_0 + \alpha - s) ds + \theta'(y) b(y, \theta(y)) (t_0 + \alpha - \theta(y))$$

et donc $b(y_0, \theta(y_0)) = \partial_y\psi(y_0, \theta(y_0)) = 0$; d'où $\partial_y(b\partial_y\psi)(y_0, \theta(y_0)) = 0$, ce qui fait qu'on peut trouver ε_0 assez petit pour que $|\partial_y(b\partial_y\psi)| \leq 1/2$ dans K_{ε_0} .

2. Si $\theta_0 > \theta(y_0)$, alors b est nulle sur K_0 , et comme b est positive dans ω_+ , $\partial_y b$ est également nulle dans $\{y_0\} \times [\theta(y_0), \theta_0]$, donc dans K_0 ; d'où $\partial_y(b\partial_y\psi) = 0$ dans K_0 , ce qui fait qu'on peut trouver ε_0 assez petit pour que $|\partial_y(b\partial_y\psi)| \leq 1/2$ dans K_{ε_0} .

Le nombre $\varepsilon_0 > 0$ étant choisi, oublions maintenant cette distinction des deux cas, et choisissons τ_0 suffisamment grand pour que $|\partial_y(bc_1) - \partial_t c_2| \leq \tau_0/4$ dans K_{ε_0} ; alors, pour $\tau \geq \tau_0$

$$\frac{\tau}{4} \int |w|^2 \leq 2 \int |L_\tau w| |nw|.$$

Enfin, pour $v \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_0}$, posons

$$w = v \exp(-\tau\psi + \int_{t_0}^t c(y, s) ds)$$

et reportons cette expression dans l'inégalité précédente; on obtient :

$$\int e^{-2\tau\psi} e^{2\operatorname{Re}\int^c} |v|^2 \leqslant \frac{8}{\tau} \int e^{-2\tau\psi} e^{2\operatorname{Re}\int^c} |\partial_t v + ib\partial_y v + cv| |\partial_y v + c_1 v| \\ + 8 \int e^{-2\tau\psi} e^{2\operatorname{Re}\int^c} |\partial_t v + ib\partial_y v + cv| |(\partial_y \psi + i(t_0 + \alpha - t))v|.$$

Il existe donc une constante C telle que pour toute $v \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_0}$ et tout $\tau \geqslant \tau_0$,

$$(3.5) \quad \int e^{-2\tau\psi} |v|^2 \leqslant C \int e^{-2\tau\psi} |\partial_t v + ib\partial_y v + cv| (|\partial_y v + c_1 v| + |v|).$$

3.3. UNICITÉ EN DIMENSION DEUX SOUS LA CONDITION (R)

Nous continuons en donnant une version faible du théorème 1.2 sous la condition (R) lorsque l'espace est \mathbf{R}^2 .

THÉORÈME 3.4. *Supposons que $\operatorname{rg} \mathcal{L}(x_0) = 2$ en un point $x_0 \in \mathbf{R}^2$. Si le problème est non caractéristique (en x_0), alors pour tout voisinage ω de x_0 et toute $u \in C^1(\omega)$ solution du système*

$$(3.6) \quad \begin{cases} (L + c_0)u(x) = 0 & \text{dans } \omega \text{ et} \\ u(x) = 0 & \text{dans } \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}, \end{cases}$$

la fonction u s'annule au voisinage de x_0 .

Démonstration. D'après le lemme 1.3, nous pouvons prendre sur \mathbf{R}^2 des coordonnées (y, t) telles que :

1. $x_0 = (0, 0)$,
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$,
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

Si $b(0, 0) \neq 0$, nous sommes dans le cas elliptique et le résultat découle du théorème 3.1. Sinon, par l'hypothèse $\operatorname{rg} \mathcal{L}(x_0) = 2$, il existe $k > 0$ tel que $\partial_t^k b(0, 0) \neq 0$ tandis que $\partial_t^j b(0, 0) = 0$ pour $j < k$. Alors, par le théorème de préparation de Malgrange (cf. Hörmander [11, th. 7.5.5]), il existe, pour $(y, t) \in]-Y, Y[\times]-T, T[$ avec $Y > 0$ et $T > 0$, une factorisation

$$b(y, t) = a(y, t) (t^k + a_{k-1}(y)t^{k-1} + \dots + a_0(y))$$

avec a, a_0, \dots, a_{k-1} des fonctions C^∞ à valeurs réelles telles que $a(y, t) \neq 0$ dans $] - Y, Y[\times] - T, T[$, et $a_j(0) = 0$ pour $j = 0, \dots, k - 1$. Nous allons maintenant découper le domaine $] - Y, Y[\times] - T, T[$ en petits morceaux pour pouvoir appliquer le lemme 3.3; ce découpage nous est donné par le lemme suivant:

LEMME 3.5. *Dans la situation décrite ci-dessus, il existe une suite d'intervalles ouverts disjoints $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dont la réunion est dense dans $] - Y, Y[$, et pour chaque $i \in \mathbb{N}$, un nombre fini de fonctions $C^\infty \theta_{i,j}: I_i \rightarrow \mathbf{R}$ tels que pour tout $y \in I_i$:*

1. $j_1 < j_2 \Rightarrow \theta_{i,j_1}(y) < \theta_{i,j_2}(y)$,
2. $b(y, t) = 0 \Leftrightarrow \exists j \text{ tel que } t = \theta_{i,j}(y)$.

Démonstration du lemme. Avec les notations précédentes, posons

$$P(y, t) = t^k + a_{k-1}(y)t^{k-1} + \dots + a_0(y)$$

qui est un polynôme en t à coefficients réels et réguliers en y .

Soit \mathcal{O}_k l'ouvert de $] - Y, Y[$ tel que $P(y, t)$ possède k racines complexes distinctes en t pour $y \in \mathcal{O}_k$; notons \mathcal{O}'_k l'intérieur du complémentaire de \mathcal{O}_k dans $] - Y, Y[$. Si \mathcal{O}'_k est vide, c'est que \mathcal{O}_k est dense dans $] - Y, Y[$ et nous arrêtons là notre construction; sinon $P(y, t)$ possède au plus $k - 1$ racines complexes distinctes en t pour $y \in \mathcal{O}'_k$. Nous définissons alors \mathcal{O}_{k-1} comme l'ouvert de \mathcal{O}'_k tel que $P(y, t)$ possède exactement $k - 1$ racines complexes distinctes en t pour $y \in \mathcal{O}_{k-1}$, puis \mathcal{O}'_{k-1} comme l'intérieur du complémentaire de \mathcal{O}_{k-1} dans \mathcal{O}'_k . Et ainsi de suite; l'ouvert $\bigcup_{j=1}^k \mathcal{O}_j$ est alors dense dans $] - Y, Y[$. Nous appelons $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ les composantes connexes des ouverts \mathcal{O}_j .

Dans chaque intervalle I_i , les racines en t de $P(y, t)$ sont de multiplicité constante, et par le théorème des fonctions implicites, elles sont donc fonctions C^∞ de y ; de plus, P étant à coefficients réels, θ est racine si et seulement si $\bar{\theta}$ est racine, et donc, toujours à cause de la multiplicité constante, les racines réelles et distinctes restent réelles et distinctes quand y décrit I_i . Ces racines réelles sont donc représentées par des fonctions $C^\infty \theta_{i,j}: I_i \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant 1. et 2.

Démonstration du théorème 3.4 (fin). Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (3.6). Supposons qu'elle soit non nulle en un point de $] - Y, Y[\times]0, T[$; alors elle est non nulle dans tout un voisinage de ce point, et donc il

existe un point $(y_0, t_0) \in \text{supp } u$ avec $y_0 \in I_i$ pour un $i \in \mathbb{N}$. L'intervalle I_i étant ouvert, il existe aussi $\varepsilon > 0$ tel que $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subset I_i$.

Posons $\psi(y, t) = t + t_0(y - y_0)^2 \varepsilon^{-2}$ et considérons les paraboles P_τ d'équations $\psi(y, t) = \tau$. La fonction u est nulle en dessous de la parabole P_0 puisque $P_0 \subset \{t \leq 0\}$, mais P_{t_0} coupe le support de u et $P_{t_0} \cap \{t \geq 0\} \subset I_i \times [0, T[$. Par compacité, il existe donc un point $(y_1, t_1) \in \text{supp } u \cap (I_i \times [0, T[)$ tel que $u = 0$ dans $\{(y, t) \in \omega \mid \psi(y, t) \leq \psi(y_1, t_1)\}$. Nous distinguerons alors deux cas :

1. Si $b(y_1, t_1) \neq 0$, le problème est elliptique en (y_1, t_1) et $d\psi(y_1, t_1) \neq 0$; donc par le théorème 3.1, $u = 0$ au voisinage de (y_1, t_1) ce qui contredit le fait que $(y_1, t_1) \in \text{supp } u$.

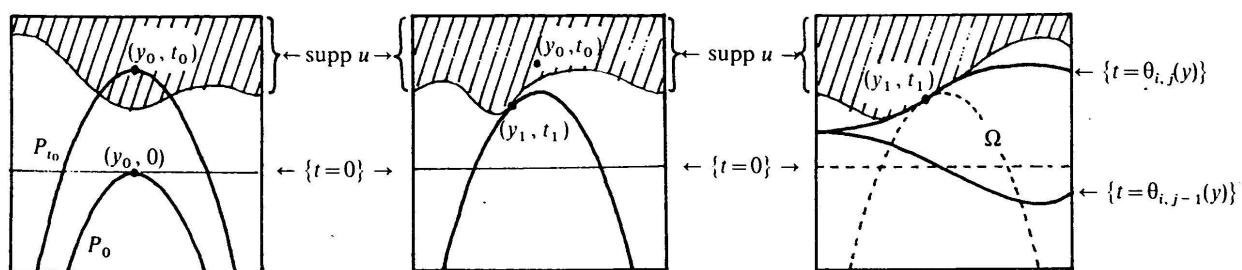
2. Si $b(y_1, t_1) = 0$, par le lemme 3.5 il existe j tel que $t_1 = \theta_{i,j}(y_1)$. En outre, le lemme 3.5 permet d'affirmer que

α. $\Omega = \{(y, t) \in I_i \times \mathbb{R} \mid \theta_{i,j-1}(y) < t < \theta_{i,j}(y)\}$ est un ouvert connexe;

β. b ne s'annule pas dans Ω , donc L est elliptique dans Ω .

Comme u s'annule dans $\{(y, t) \in \omega \mid \psi(y, t) < \psi(y_1, t_1)\}$, elle s'annule dans l'intersection de ce domaine avec Ω , qui est une partie ouverte non vide de Ω . Par le corollaire 3.2, u est nulle dans Ω .

De même, la fonction b ne s'annule pas dans $\{(y, t) \in I_i \times \mathbb{R} \mid \theta_{i,j}(y) < t < \theta_{i,j+1}(y)\}$, et on peut donc supposer, quitte à changer y en $-y$, que b est strictement positive dans ce domaine. Il existe donc un voisinage convexe w de (y_1, t_1) tel que b soit positive sur $w_+ = \{(y, t) \in w \mid t \geq \theta_{i,j}(y)\}$, strictement positive en un point $(y_1, t_2) \in w_+$, et tel que $u = 0$ dans $w_- = \{(y, t) \in w \mid t \leq \theta_{i,j}(y)\}$. Tout cela nous permet alors d'utiliser le lemme 3.3 au point (y_1, t_1) : nous obtenons $u = 0$ au voisinage de (y_1, t_1) , ce qui contredit le fait que $(y_1, t_1) \in \text{supp } u$.



Les paraboles P_0 et P_{t_0} .

Cas 1.

Cas 2.

FIGURE 3.2.
Les paraboles P_τ .

3.4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2 SOUS LA CONDITION (*R*)

Dans ce paragraphe, l'espace est \mathbf{R}^n , n entier quelconque.

Commençons par expliciter les hypothèses du théorème 1.2 sous la condition (*R*); le problème étant non caractéristique, nous pouvons choisir (lemme 1.3) des coordonnées locales (y, t) telles que:

1. $x_0 = (0, 0)$,
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$,
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

L'intersection de l'ouvert ω avec le domaine dans lequel la propriété (*R*) est vérifiée contient un voisinage de $(0, 0)$ de la forme $v \times]-T, T[$ où $T > 0$ et v est un voisinage de 0 dans \mathbf{R}^{n-1} suffisamment petit pour que $\text{rg } \mathcal{L} \leq 2$ sur $S = \{(y, 0) \in \mathbf{R}^n \mid y \in v\}$. On a $\text{rg } \mathcal{L} \geq 1$ sur S puisque $\partial_t \in \mathcal{L}$, ce qui entraîne encore que:

1. Pour un point $(y_0, 0) \in S$ tel que $\text{rg } \mathcal{L}(y_0, 0) = 1$, la variété intégrale passant par $(y_0, 0)$ est $\{y_0\} \times]-T, T[$.
2. Pour un point $(y_0, 0) \in S$ tel que $\text{rg } \mathcal{L}(y_0, 0) = 2$, si la courbe $\gamma \subset S$ est la trace sur S de la variété intégrale passant par $(y_0, 0)$, cette dernière est $\gamma \times]-T, T[$.

Comme la réunion des traces sur S des variétés intégrales de \mathcal{L} est égale à S par la propriété (*R*), la réunion des variétés intégrales de \mathcal{L} coupant S est égale au voisinage $v \times]-T, T[$ tout entier.

Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (1.2), et supposons qu'il existe un point $(y_0, t_0) \in v \times]0, T[$ tel que $u(y_0, t_0) \neq 0$. Ce point (y_0, t_0) est donc situé sur une variété intégrale de \mathcal{L} coupant S . Si (y_0, t_0) est sur une variété intégrale de dimension 1, c'est que $b(y_0, t) = 0$ pour tout $t \in]-T, T[$, et u vérifie donc l'équation

$$\partial_t u(y_0, t) + c(y_0, t) u(y_0, t) = 0 \quad \text{pour } t \in]-T, T[$$

où y_0 n'est plus qu'un paramètre; la théorie des équations différentielles ordinaires nous permet de conclure que $u(y_0, t) = 0$ pour $t \in]0, T[$, ce qui contredit le fait que $u(y_0, t_0) \neq 0$.

Il s'ensuit donc que (y_0, t_0) est sur une variété intégrale de \mathcal{L} de dimension 2 que nous noterons \mathcal{V} . Utilisons (z, t) comme coordonnées sur \mathcal{V} où z est l'abscisse curviligne sur $\mathcal{V} \cap S$, et désignons par z_0 l'abscisse du point (y_0, t_0) dans les coordonnées (z, t) . Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon] \times]-T, T[$ soit contenu dans \mathcal{V} . Comme dans la démonstration du théorème 3.4, nous posons $\psi(z, t) = t + t_0(z - z_0)^2 \varepsilon^{-2}$ et intro-

duisons les paraboles P_τ d'équations $\psi(z, t) = \tau$. Nous obtenons ainsi un point (z_1, t_1) du support de la trace de u sur \mathcal{V} tel que $u = 0$ dans $\{(z, t) \in \mathcal{V} \mid \psi(z, t) \leq \psi(z_1, t_1)\}$. Or le problème (pour ψ) est non caractéristique en (z_1, t_1) et $\text{rg } \mathcal{L}(z_1, t_1) = 2$ puisque nous sommes sur une variété intérieure de \mathcal{L} de dimension 2. Nous pouvons donc appliquer le théorème 3.4 pour conclure que u est nulle au voisinage de (z_1, t_1) sur \mathcal{V} , ce qui contredit le fait que (z_1, t_1) est un point du support de la trace de u sur \mathcal{V} .

Nous avons donc obtenu que $u = 0$ dans $v \times]-T, T[$.

3.5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2 SOUS LA CONDITION (P)

Comme le problème est non caractéristique, nous pouvons faire usage du lemme 1.3 pour trouver des coordonnées locales $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$, un voisinage v de 0 dans \mathbf{R}^{n-1} et un nombre $T > 0$ tels que

1. $x_0 = (0, 0)$,
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$,
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ dans $v \times]-T, T[$ à un facteur non nul près,
4. $v \times]-T, T[\subset \omega \cap \Omega$.

Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (1.2) et supposons qu'il existe $(y_0, t_0) \in v \times]0, T[$ tel que $u(y_0, t_0) \neq 0$. Si on avait $b(y_0, t) = 0$ pour tout $t \in]0, t_0[$, l'équation se réduirait à une équation différentielle ordinaire, ce qui conduirait à une contradiction.

Il existe donc $t_1 \in]0, t_0[$ tel que $b(y_0, t_1) \neq 0$. Il existe aussi tout un voisinage de y_0 tel que $b(y, t_1) \neq 0$ pour y dans ce voisinage, par continuité, et le vecteur

$$d(y) = b(y, t_1) / |b(y, t_1)|$$

est bien défini et régulier au voisinage de y_0 ; par conséquent, le champ réel $d(y) \cdot \partial_y$ admet en y_0 une courbe intégrale que nous noterons γ .

Comme la condition (P) est vérifiée dans $v \times]0, T[$, nous avons $b(y, t) = |b(y, t)| d(y)$ pour tout $(y, t) \in \gamma \times]0, T[$, et donc le champ L est tangent à $\gamma \times]0, T[$; nous pouvons désormais nous restreindre à $\gamma \times]-T, T[$ qui contient le point (y_0, t_0) où u ne s'annule pas et sur lequel nous prenons comme coordonnées le couple (z, t) où z est l'abscisse curviligne sur γ associée au champ $d(y) \cdot \partial_y$; z_0 désignera l'abscisse du point (y_0, t_0) .

Par continuité, il existe un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que le problème restreint à $\gamma \times]-T, T[$ se présente de la façon suivante:

1. $\mathcal{V} =]z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon[\times]-T, T[\subset \gamma \times]-T, T[$;
2. $u(z, t_0) \neq 0$ pour $z \in]z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon[$;
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(z, t) \partial_z + c(z, t)$ dans $\mathcal{V}_+ =]z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon[\times [0, T[$;
4. $b(z, t) \geq 0$ dans \mathcal{V}_+ (par la condition (P)).

Comme dans la démonstration du théorème 3.4, introduisons la fonction $\psi(z, t) = t + t_0(z - z_0)^2 \varepsilon^{-2}$ et les paraboles P_τ d'équations $\psi(z, t) = \tau$. Nous obtenons ainsi un point (z_2, t_2) du support de la trace de u sur \mathcal{V}_+ tel que $t_2 < t_0$ et $u = 0$ dans $\{(z, t) \in \mathcal{V} \mid \psi(z, t) \leq \psi(z_2, t_2)\}$.

Comme tout à l'heure, si on avait $b(z_2, t) = 0$ pour tout $t \in]t_2, T[$, on prouverait que $u(z_2, t_0) = 0$ ce qui contredit le point 2 ci-dessus. Il existe donc $t_3 \in]t_2, T[$ tel que $b(z_2, t_3) > 0$. Nous distinguons alors deux cas de figure:

1. Si $t_2 > 0$, posons $\theta(z) = t_2 + t_0 \left(\frac{z_2 - z_0}{\varepsilon} \right)^2 - t_0 \left(\frac{z - z_0}{\varepsilon} \right)^2$ (en sorte que $t \geq \theta(z) \Leftrightarrow \psi(z, t) \geq \psi(z_2, t_2)$). Nous pouvons alors trouver un voisinage convexe w de (z_2, t_2) contenant (z_2, t_3) (où $b > 0$) tel que b soit positive dans $w_+ = \{(z, t) \in w \mid t \geq \theta(z)\}$ et $u = 0$ dans $w_- = \{(z, t) \in w \mid t \leq \theta(z)\}$. Par le lemme 3.3 nous en déduisons que $u = 0$ au voisinage de (z_2, t_2) ce qui contredit le fait que (z_2, t_2) est un point du support de la trace de u sur \mathcal{V}_+ .
2. Si $t_2 = 0$, posons $\theta(z) = 0$. Nous pouvons alors trouver un voisinage convexe w de (z_2, t_2) possédant les mêmes propriétés que dans le cas précédent, d'où la même conclusion.

CHAPITRE 4: ETUDE D'UN MODÈLE DANS \mathbf{R}^2

Lorsque nous supprimons les hypothèses « techniques », le théorème 1.2 devient faux; c'est ce que montre l'un des premiers contre-exemples à l'unicité de Cauchy historiquement construits : le contre-exemple de Cohen [8]. Plutôt que d'en répéter la construction, que le lecteur trouvera par exemple dans Hörmander [9, th. 8.9.2], nous avons préféré étudier de façon assez précise un modèle dans \mathbf{R}^2 (ce qui assure que $\text{rg } \mathcal{L} \leq 2$) qui fournit des contre-exemples où le champ L est complètement explicite; c'est l'objet de ce chapitre.

Pour traiter le problème non caractéristique général dans \mathbf{R}^2 , nous savons d'après le lemme 1.3 qu'il suffit d'étudier le champ $L = \partial_t + ib(y, t) \partial_y$ où b est à valeurs réelles. Nous allons examiner ici le cas où la fonction b est indépendante de y , c'est-à-dire que L prend la forme

$$L = \partial_t + ib(t) \partial_y.$$

Pour un tel modèle, la condition (R) dans un voisinage de l'origine entraîne la condition (P) dans un ouvert Ω_+ , Ω étant un autre voisinage de l'origine, si bien que le théorème 1.2 s'énonce plus simplement de la façon suivante: s'il existe un nombre $T > 0$ tel que $b(t)$ ne change pas de signe dans l'intervalle $]0, T[$, alors il y a unicité (au sens de la conclusion du théorème 1.2, et pour tout terme c d'ordre zéro).

Dans le lemme ci-dessous (que nous ne démontrons pas car nous ne l'utiliserons pas), nous analysons la condition précédente.

LEMME 4.1. Soient $b: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction C^∞ et $B(t) = \int_0^t b(s)ds$.

Alors il est équivalent de dire:

- (i) $\forall T > 0$, b change de signe dans l'intervalle $]0, T[$.
- (ii) Il existe une suite de réels δ_k décroissante et tendant vers 0 telle que pour tout $k \geq 1$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}], (-1)^k B(\delta_k) \geq (-1)^k B(t), \text{ et} \\ (-1)^k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})) > 0. \end{array} \right.$$

Dans cette situation, nous allons montrer que l'on peut modifier le terme d'ordre zéro c en sorte que l'opérateur $L + c$ ne possède pas la propriété d'unicité, à condition toutefois de faire l'hypothèse supplémentaire que la suite $(-1)^k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))$ ne tend pas trop vite vers zéro.

THÉORÈME 4.2. Soient $b: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et $c: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions C^∞ ; posons $B(t) = \int_0^t b(s)ds$, et supposons qu'il existe une suite de réels δ_k décroissante et tendant vers 0, et un réel $\varepsilon_1 > 0$ tels que si l'on pose $\varepsilon_{k+1} = \exp[-\varepsilon_k^{-1}]$ pour tout $k \geq 1$ on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}], (-1)^k B(\delta_k) \geq (-1)^k B(t), \text{ et} \\ (-1)^k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})) \geq \varepsilon_k. \end{array} \right.$$

Alors il existe un voisinage ω de $(0, 0)$ dans \mathbf{R}^2 , $u \in C^\infty(\omega)$ et $a \in C^\infty(\omega)$ tels que

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\partial_t + ib(t) \partial_y + c(y, t) + a(y, t)] u(y, t) = 0 \text{ dans } \omega, \\ \text{supp } u = \omega_+ = \{(y, t) \in \omega \mid t \geq 0\}, \text{ et} \\ \text{supp } a \subset \omega_+. \end{array} \right.$$

Exemple. Le lecteur vérifiera facilement que la fonction

$$\left\{ \begin{array}{ll} b(t) = e^{-1/t} \sin(1/t) & \text{pour } t > 0, \\ b(t) = 0 & \text{pour } t \leq 0 \end{array} \right.$$

satisfait les hypothèses du théorème (on prendra $\delta_k = 1/k\pi$).

La démonstration du théorème 4.2 s'effectue en deux étapes : d'abord nous construisons cinq suites de paramètres $\lambda_k, m_k, p_k, q_k, \gamma_k$ possédant de bonnes propriétés asymptotiques ; la deuxième étape, plus standard, utilise ces paramètres pour construire les fonctions u et a par une technique de recollement analogue à la méthode de Cohen [8] (cf. aussi les calculs du paragraphe 2.4).

PROPOSITION 4.3. *Sous les hypothèses du théorème 4.2, il existe cinq suites de réels positifs λ_k, m_k, p_k, q_k et γ_k telles que*

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_{k+1} < p_k < m_k < q_k < \delta_k, \\ \forall t \in [\delta_{k+1}, p_k], (-1)^k(B(t) - B(m_k)) \leq -\frac{1}{2}(-1)^k(B(m_k) - B(\delta_{k+1})) \\ \text{et } (-1)^k(B(t) - B(\delta_k)) \leq -\frac{7}{8}(-1)^k(B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})), \\ \text{et } \forall t \in [q_k, \delta_k], (-1)^k(B(t) - B(m_k)) \geq \frac{1}{2}(-1)^k(B(m_k) - B(\delta_{k+1})). \end{array} \right.$$

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} [-\gamma_k + (-1)^k \lambda_k (B(m_k) - B(\delta_k))] \\ = [-\gamma_{k+1} + (-1)^{k+1} \lambda_{k+1} (B(m_k) - B(\delta_{k+1}))]. \end{array} \right.$$

$$(4.4) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \lambda_k}{\gamma_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log (p_k - \delta_{k+1})}{\lambda_k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log (\delta_k - q_k)}{\gamma_{k+1}} = 0.$$

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(\lambda_k + \lambda_{k+1})}{(\lambda_k + \lambda_{k+1})(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(p_k - \delta_{k+1})}{(\lambda_k + \lambda_{k+1})(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))} \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(\delta_k - q_k)}{(\lambda_k + \lambda_{k+1})(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))} = 0. \end{array} \right.$$

Démonstration: en quatre parties.

1. *Construction de la suite λ_k .* Nous choisissons $\lambda_k = \varepsilon_k^{-3}$; on peut alors écrire

$$\frac{\log \lambda_{k+1}}{\lambda_k |B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})|} \leqslant \frac{-3 \log \varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^{-3} \varepsilon_k} = -3 \varepsilon_k^2 \log \varepsilon_{k+1} = 3 \varepsilon_k, \quad \text{d'où}$$

$$(4.6) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \lambda_{k+1}}{\lambda_k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))} = 0.$$

En outre, comme $\varepsilon_{k+1}^{-3} \geqslant e^3 \varepsilon_k^{-3}$ (car $e^x \geqslant ex \Rightarrow (e^x)^3 \geqslant e^3 x^3$),

$$(4.7) \quad \lambda_{k+1} \geqslant 2 \lambda_k.$$

2. *Construction des suites m_k , p_k et q_k .* En utilisant (4.7), nous pouvons écrire

$$0 < \frac{1}{2} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} (-1)^k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})) < (-1)^k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))$$

et donc, par le théorème de la valeur intermédiaire, nous obtenons l'existence d'un point $m_k \in]\delta_{k+1}, \delta_k[$ tel que

$$(4.8) \quad (-1)^k (B(m_k) - B(\delta_{k+1})) = \frac{1}{2} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} (-1)^k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})).$$

Nous posons ensuite :

$$\begin{aligned} p_k &= \sup \{p > \delta_{k+1} \mid \forall t \in [\delta_{k+1}, p], \\ &\quad (-1)^k (B(t) - B(\delta_{k+1})) \leqslant \frac{1}{2} (-1)^k (B(m_k) - B(\delta_{k+1}))\} \\ q_k &= \inf \{q < \delta_k \mid \forall t \in [q, \delta_k], \\ &\quad (-1)^k (B(t) - B(\delta_{k+1})) \geqslant \frac{3}{2} (-1)^k (B(m_k) - B(\delta_{k+1}))\}. \end{aligned}$$

La propriété (4.2) se déduit facilement de cette définition et de (4.8). Nous aurons en outre besoin d'estimations sur $p_k - \delta_{k+1}$ et $\delta_k - q_k$. Or $B(p_k) - B(\delta_{k+1}) = \frac{1}{2} (B(m_k) - B(\delta_{k+1}))$; par le théorème des accroissements finis, il existe donc $\theta_k \in]\delta_{k+1}, p_k[$ tel que

$$(p_k - \delta_{k+1}) b(\theta_k) = \frac{1}{2} (B(m_k) - B(\delta_{k+1}))$$

et comme b est bornée au voisinage de 0, on obtient pour un $C > 0$

$$(p_k - \delta_{k+1}) \geq C(-1)^k (B(m_k) - B(\delta_{k+1})).$$

En multipliant cette inégalité par λ_{k+1} et en utilisant (4.8) il vient

$$\lambda_{k+1}(p_k - \delta_{k+1}) \geq \frac{C}{2} (-1)^k \lambda_k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})).$$

On procède de la même façon pour estimer $\delta_k - q_k$; λ_k ayant été choisi de telle sorte que $(-1)^k \lambda_k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))$ tende vers l'infini avec k , on a donc

$$(4.9) \quad \begin{cases} \text{pour } k \text{ suffisamment grand} \\ | \log(p_k - \delta_{k+1}) | \leq \log \lambda_{k+1} \text{ et } | \log(\delta_k - q_k) | \leq \log \lambda_{k+1}. \end{cases}$$

3. *Construction de la suite γ_k .* Pour construire γ_k nous prenons la propriété (4.3) comme définition, c'est-à-dire que nous posons

$$\gamma_1 = 0, \text{ puis pour } k \geq 1,$$

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k - (-1)^k \lambda_k (B(m_k) - B(\delta_k)) + (-1)^{k+1} \lambda_{k+1} (B(m_k) - B(\delta_{k+1})).$$

De (4.7) et (4.8) nous tirons

$$(-1)^k (B(m_k) - B(\delta_{k+1})) \leq \frac{1}{4} (-1)^k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})), \quad \text{d'où}$$

$$(-1)^k (B(\delta_k) - B(m_k)) \geq \frac{3}{4} (-1)^k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})), \quad \text{puis}$$

$$- (-1)^k \lambda_k (B(m_k) - B(\delta_k)) \geq \frac{3}{2} (-1)^k \lambda_{k+1} (B(m_k) - B(\delta_{k+1})).$$

En reportant cette estimation dans la définition de γ_k , on obtient

$$(4.10) \quad \gamma_{k+1} \geq \gamma_k + \frac{1}{2} (-1)^k \lambda_{k+1} (B(m_k) - B(\delta_{k+1})).$$

4. *Calcul des limites (4.4) et (4.5).* De (4.8) et (4.10) nous tirons que

$$\gamma_{k+1} \geq \frac{1}{2} (-1)^k \lambda_{k+1} (B(m_k) - B(\delta_{k+1})) = \frac{1}{4} (-1)^k \lambda_k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})),$$

d'où

$$\frac{\log \lambda_{k+1}}{\gamma_{k+1}} \leq \frac{4 \log \lambda_{k+1}}{(-1)^k \lambda_k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))}.$$

Grâce à (4.6), nous en déduisons que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \lambda_k}{\gamma_k} = 0.$$

De plus, en utilisant (4.9) nous pouvons écrire

$$\left| \frac{\log(p_k - \delta_{k+1})}{\lambda_k(B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))} \right| \leq \left| \frac{\log \lambda_{k+1}}{\lambda_k(B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))} \right|, \quad \text{et}$$

$$\left| \frac{\log(\delta_k - q_k)}{\gamma_{k+1}} \right| \leq \frac{\log \lambda_{k+1}}{\gamma_{k+1}}$$

d'où (4.4) en utilisant (4.6) et le résultat précédent.

Grâce à (4.7) et (4.9) on a

$$\left| \frac{\log(\lambda_k + \lambda_{k+1})}{(\lambda_k + \lambda_{k+1})(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))} \right| \leq \left| \frac{\log \lambda_{k+1}(1 + o(1))}{\lambda_{k+1}(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))} \right|,$$

$$\left| \frac{\log(p_k - \delta_{k+1})}{(\lambda_k + \lambda_{k+1})(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))} \right| \leq \left| \frac{\log \lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))} \right|,$$

$$\left| \frac{\log(\delta_k - q_k)}{(\lambda_k + \lambda_{k+1})(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))} \right| \leq \left| \frac{\log \lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))} \right|,$$

puis d'après (4.8),

$$\frac{\log \lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))} = \frac{2 \log \lambda_{k+1}}{\lambda_k(B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))},$$

ce qui implique (4.5) en utilisant (4.6).

Démonstration du théorème 4.2. Etant donnée une fonction $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$ vérifiant: $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 0$ sur $]-\infty, 0]$ et $\chi = 1$ sur $[1, +\infty[$, nous définissons dans $\omega = \mathbf{R} \times]-\infty, \delta_1[$ les fonctions suivantes:

$$u_k(y, t) = \exp [-\gamma_k + (-1)^k \lambda_k (B(t) - B(\delta_k) + iy)],$$

$$\varphi_k(t) = \chi \left(\frac{t - \delta_{k+1}}{p_k - \delta_{k+1}} \right) \quad \text{et} \quad \psi_k(t) = \chi \left(\frac{t - \delta_k}{q_k - \delta_k} \right),$$

$$\begin{cases} u_0(y, t) = \varphi_k(t)u_k(y, t) + \psi_k(t)u_{k+1}(y, t) & \text{pour } t \in [\delta_{k+1}, \delta_k], \\ u_0(y, t) = 0 & \text{pour } t \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0(y, t) = (\partial_t u_0(y, t) + ib(t) \partial_y u_0(y, t))/u_0(y, t) & \text{si } u_0(y, t) \neq 0, \\ a_0(y, t) = 0 & \text{si } u_0(y, t) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1(y, t) = b(t) \int_0^t \partial_y c(y, s) ds & \text{pour } t > 0, \\ a_1(y, t) = 0 & \text{pour } t \leq 0. \end{cases}$$

Puis enfin nous posons

$$a(y, t) = -a_0(y, t) + ia_1(y, t), \quad \text{et}$$

$$u(y, t) = u_0(y, t) \exp \left[- \int_0^t c(y, s) ds \right].$$

Comme $\exp \left[- \int_0^t c(y, s) ds \right]$ est C^∞ et non nulle, il suffit, pour montrer que a et u sont solutions du problème (4.1), d'établir les quatre points suivants :

1. *La fonction u_0 est C^∞ dans ω .* La fonction u_0 est clairement C^∞ pour $t > 0$ ainsi que pour $t < 0$. Pour conclure au voisinage de $t = 0$, il faut estimer les dérivées de u_0 pour les petites valeurs de t .

Comme $(-1)^k(B(t) - B(\delta_k)) \leq 0$ et $(-1)^{k+1}(B(t) - B(\delta_{k+1})) \leq 0$ pour $t \in [\delta_{k+1}, \delta_k]$, et que $\varphi_k(t) = 1$ pour $t \in [p_k, \delta_k]$, on peut écrire les estimations suivantes :

$$|\partial^\alpha(\varphi_k u_k)| \leq \sum_{\beta \leqslant \alpha} C_\beta \lambda_k^{|\beta|} e^{-\gamma_k} \quad \text{pour } t \in [p_k, \delta_k], \quad \text{et}$$

$$|\partial^\alpha(\psi_k u_{k+1})| \leq \sum_{\beta+\gamma \leqslant \alpha} C_{\beta\gamma} (\delta_k - q_k)^{-|\gamma|} \lambda_{k+1}^{|\beta|} e^{-\gamma_{k+1}}$$

$$\quad \text{pour } t \in [\delta_{k+1}, \delta_k]$$

où les constantes C_β et $C_{\beta\gamma}$ ne dépendent que de α , de χ et de b , mais pas de k . Or le logarithme de chacun de ces termes vaut

$$\log C_\beta + |\beta| \log \lambda_k - \gamma_k = \gamma_k \left[\frac{\log C_\beta}{\gamma_k} + |\beta| \frac{\log \lambda_k}{\gamma_k} - 1 \right], \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} \log C_{\beta\gamma} - |\gamma| \log (\delta_k - q_k) + |\beta| \log \lambda_{k+1} - \gamma_{k+1} \\ = \gamma_{k+1} \left[\frac{\log C_{\beta\gamma}}{\gamma_{k+1}} - |\gamma| \frac{\log (\delta_k - q_k)}{\gamma_{k+1}} + |\beta| \frac{\log \lambda_{k+1}}{\gamma_{k+1}} - 1 \right] \end{aligned}$$

et tend vers $-\infty$ lorsque k tend vers l'infini grâce à (4.4); donc les quantités de départ tendent vers 0.

Reste à estimer le terme $\partial^\alpha [\varphi_k(t)u_k(y, t)]$ pour $t \in [\delta_{k+1}, p_k]$; dans ce domaine, $(-1)^k(B(t) - B(\delta_k)) \leq -\frac{7}{8}(-1)^k(B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))$ d'après (4.2), d'où l'estimation

$$\begin{aligned} & |\partial^\alpha(\varphi_k u_k)| \\ & \leq \sum_{\beta+\gamma \leq \alpha} C_{\beta\gamma}(p_k - \delta_{k+1})^{-|\gamma|} \lambda_k^{|\beta|} \exp \left[-\gamma_k - \frac{7}{8}(-1)^k \lambda_k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})) \right], \end{aligned}$$

où les constantes $C_{\beta\gamma}$ ne dépendent que de α , de χ et de b , mais pas de k ; comme ci-dessus, on calcule le logarithme des termes de cette somme

$$\begin{aligned} & \text{Log } C_{\beta\gamma} - |\gamma| \text{Log } (p_k - \delta_{k+1}) + |\beta| \text{Log } \lambda_k \\ & - \left[\gamma_k + \frac{7}{8}(-1)^k \lambda_k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})) \right] \leq \left[\gamma_k + \frac{7}{8}(-1)^k \lambda_k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})) \right] \\ & \times \left[\left| \frac{\text{Log } C_{\beta\gamma}}{\gamma_k} \right| + |\gamma| \left| \frac{8 \text{Log } (p_k - \delta_{k+1})}{7 \lambda_k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))} \right| + |\beta| \frac{\text{Log } \lambda_k}{\gamma_k} - 1 \right] \end{aligned}$$

et cette expression tend à son tour vers $-\infty$ lorsque k tend vers l'infini grâce à (4.4). Nous avons donc démontré:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{\mathbf{R} \times [\delta_{k+1}, \delta_k]} |\partial^\alpha u_0(y, t)| \right) = 0.$$

2. *Le support de a est contenu dans $\text{supp } u_0 = \{(y, t) \in \omega \mid t \geq 0\}$.* Pour $t \in [\delta_{k+1}, \delta_k]$, posons $v_k = u_k/u_{k+1}$. En utilisant (4.3), on peut écrire:

$$(4.11) \quad v_k(y, t) = \exp [(-1)^k(\lambda_k + \lambda_{k+1})(B(t) - B(m_k) + iy)].$$

Pour $t \in [\delta_{k+1}, p_k]$, on a grâce à (4.2) $|v_k| < 1$, et comme $u_0 = u_{k+1}(1 + \varphi_k v_k)$, on a $u_0 \neq 0$. De même pour $t \in [q_k, \delta_k]$, $|v_k| > 1$ et $u_0 = u_k(1 + \psi_k/v_k) \neq 0$. Enfin, pour $t \in [p_k, q_k]$, $u_0 = u_k + u_{k+1}$, et donc $u_0 = 0$ équivaut à $v_k = -1$, ce qui entraîne d'après (4.11) que

$$\exp [(-1)^k(\lambda_k + \lambda_{k+1})iy] = -1,$$

soit $y \in \left\{ \frac{(2n+1)\pi}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} \mid n \in \mathbf{Z} \right\}$; cet ensemble étant discret, on obtient que $\text{supp } u_0 = \{(y, t) \in \omega \mid t \geq 0\}$.

Par définition de a_0 , $\text{supp } a_0 \subset \text{supp } u_0$, et par définition de a_1 , $\text{supp } a_1 \subset \{(y, t) \in \omega \mid t \geq 0\}$, d'où finalement $\text{supp } a \subset \text{supp } u_0$.

3. La fonction a_0 est C^∞ dans ω . Pour tout k , on a $\partial_t u_k + ib \partial_y u_k = 0$, et donc pour $t \in [p_k, q_k]$, $u_0 = u_k + u_{k+1} \Rightarrow a_0 = \partial_t u_0 + ib \partial_y u_0 = 0$; pour $t \in [q_{k+1}, p_k]$, $u_0 \neq 0$ donc $a_0 = (\partial_t u_0 + ib \partial_y u_0)/u_0$ est une fonction C^∞ . Il en résulte que la fonction a_0 est C^∞ dans les domaines d'équations $t > 0$ et $t < 0$.

Pour conclure au voisinage de $t = 0$, il faut estimer les dérivées de a_0 pour $t \in [\delta_{k+1}, p_k]$ et $t \in [q_k, \delta_k]$ (a_0 est nulle en dehors de ces intervalles).

Pour $t \in [\delta_{k+1}, p_k]$, $|v_k| < 1$, et on peut écrire

$$a_0 = \frac{(\partial_t + ib\partial_y)(\varphi_k u_k + u_{k+1})}{\varphi_k u_k + u_{k+1}} = \frac{w_k}{1 + x_k}, \quad \text{où}$$

$$w_k(y, t) = (p_k - \delta_{k+1})^{-1} \chi' \left(\frac{t - \delta_{k+1}}{p_k - \delta_{k+1}} \right) v_k(y, t) \quad \text{et}$$

$$x_k(y, t) = \varphi_k(t) v_k(y, t).$$

Pour montrer que les dérivées de cette expression tendent vers 0 lorsque k tend vers l'infini, il suffit de montrer qu'il en est ainsi pour les fonctions w_k et x_k . En utilisant (4.2) et (4.11), on obtient les majorations

$$|\partial^\alpha w_k| \leq \sum_{\beta+\gamma \leq \alpha} C_{\beta\gamma} (p_k - \delta_{k+1})^{-1-|\gamma|} (\lambda_k + \lambda_{k+1})^{|\beta|} \\ \exp \left[-\frac{1}{2} (-1)^k (\lambda_k + \lambda_{k+1}) (B(m_k) - B(\delta_{k+1})) \right],$$

$$|\partial^\alpha x_k| \leq \sum_{\beta+\gamma \leq \alpha} C_{\beta\gamma} (p_k - \delta_{k+1})^{-|\gamma|} (\lambda_k + \lambda_{k+1})^{|\beta|} \\ \exp \left[-\frac{1}{2} (-1)^k (\lambda_k + \lambda_{k+1}) (B(m_k) - B(\delta_{k+1})) \right],$$

où les constantes $C_{\beta\gamma}$ ne dépendent que de α , de χ et de b , mais pas de k . Comme tout à l'heure, on montre que ces expressions tendent vers 0 en calculant leurs logarithmes et en utilisant (4.5). Nous obtenons donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{\mathbf{R} \times [\delta_{k+1}, p_k]} |\partial^\alpha a_0| \right) = 0.$$

On montre de même à l'aide de (4.2), (4.11) et (4.5) que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{\mathbf{R} \times [q_k, \delta_k]} |\partial^\alpha a_0| \right) = 0.$$

4. La fonction a_1 est C^∞ dans ω . Pour obtenir cette dernière propriété, il suffit de remarquer que toutes les dérivées de la fonction b tendent vers 0

lorsque $t > 0$ tend vers 0. En effet, comme $b(\delta_k) = 0$ pour tout k , nous obtenons par application répétée du théorème de Rolle que pour tous j et k entiers positifs, il existe un point $\theta_k^j \in]\delta_{k+j}, \delta_k[$ tel que $\partial_t^j b(\theta_k^j) = 0$; la limite annoncée en résulte.

CHAPITRE 5: LE PROBLÈME CARACTÉRISTIQUE

Dans ce chapitre, nous donnons deux résultats: l'un d'unicité, l'autre de non-unicité.

Au paragraphe 5.1, nous regardons ce qui subsiste du théorème 1.2 lorsque nous supprimons l'hypothèse que le problème est non caractéristique. Le résultat d'unicité (théorème 5.2) découlera d'un théorème sur la géométrie du support d'une solution (théorème 5.1) qui est dû à Bony (cf. Sjöstrand [22, th. 8.7] qui en donne une extension aux équations d'ordres supérieurs).

Puis au paragraphe suivant (5.2) nous construisons un contre-exemple à l'unicité sous la condition que le rang de \mathcal{L} est constant. Ce dernier résultat est dû à Saint Raymond [21, th. 2.9].

5.1. RÉSULTAT D'UNICITÉ LORSQUE $\text{rg } \mathcal{L} \leq 2$

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 1.2, mais sans nous donner de fonction φ ni supposer que le problème est non caractéristique. Cela signifie que nous sommes dans l'un des deux cas suivants:

1. L vérifie la condition (R) dans un ouvert Ω où $\text{rg } \mathcal{L} \leq 2$ (cf. 1.2).
2. L vérifie la condition (P) dans un ouvert Ω (cf. 1.2).

Donnons-nous de plus une solution $u \in C^1(\Omega)$ de l'équation $(L + c_0)u(x) = 0$ dans Ω . Alors, pour paraphraser le théorème 1.2, chaque fois que l'on trouvera $x_0 \in \Omega$ et $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ à valeurs réelles tels qu'il existe un voisinage ω de x_0 avec

$$x_0 \in (\text{supp } u \cap \omega) \subset \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\},$$

on pourra affirmer que le problème en x_0 est caractéristique, c'est-à-dire que $L\varphi(x_0) = 0$ ou encore que $X\varphi(x_0) = Y\varphi(x_0) = 0$ (si $X = \text{Re } L$ et $Y = \text{Im } L$). Cette remarque nous donne une relation entre les champs réels X et Y et le fermé $F = \text{supp } u$ dont nous allons analyser les conséquences dans le prochain théorème.

Avant de l'énoncer, rappelons qu'un champ réel X (éventuellement dégénéré) défini dans un ouvert Ω vérifie toujours la propriété (R). En effet, pour les points x où X s'annule, $\{x\}$ est une variété intégrale, et dans l'ouvert où X ne s'annule pas, le rang est constamment égal à 1 d'où la propriété grâce au théorème de Frobenius (cf. 1.2). Si $X = \sum a_j(x) \partial_j$, nous noterons $e^{tX}x_0$ la solution $x(t)$ du système différentiel ordinaire suivant:

$$\begin{cases} x'_j(t) = a_j(x(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Si $X = 0$ en x_0 , $e^{tX}x_0$ reste égal à x_0 , tandis que si $X \neq 0$ en x_0 , $e^{tX}x_0$ décrit la courbe intégrale de X passant par x_0 .

THÉORÈME 5.1. *Soient X un champ réel défini dans un ouvert Ω de \mathbf{R}^n , et $F \subset \Omega$ une partie fermée dans Ω . Supposons que pour tout $x_0 \in \Omega$ et toute $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ à valeurs réelles,*

$$\begin{aligned} [\exists \omega \text{ ouvert de } \Omega : x_0 \in F \cap \omega \subset \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}] \\ \Rightarrow X\varphi(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Alors, pour tout compact K de Ω , il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$x_0 \in F \cap K \quad \text{et} \quad |t| < \varepsilon \Rightarrow e^{tX}x_0 \in F.$$

Démonstration. Pour un compact K fixé, choisissons un voisinage compact W de K (c'est-à-dire $K \subset \overset{\circ}{W}$, W compact de Ω); il existe alors $\varepsilon_1 > 0$ ne dépendant que de K , de W et de X tel que pour $x_0 \in K$ et $t \in]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[$, $e^{tX}x_0$ soit bien défini et reste dans W ; par la suite, chaque ε que nous choisirons sera plus petit que le précédent, et ne dépendra que de K , W , X et F .

Pour tout $x_0 \in K$, le système

$$(5.1) \quad \begin{cases} \partial_t \varphi(t, x) + X\varphi(t, x) = 0 \\ \varphi(0, x) = |x - x_0|^2 \end{cases}$$

admet une solution φ (dépendant de x_0) définie dans $]-\varepsilon_2, \varepsilon_2[\times W$ pour un $\varepsilon_2 > 0$. La dérivée par rapport à t de $\varphi(t, e^{tX}x_0)$ est nulle à cause de l'équation (5.1), d'où $\varphi(t, e^{tX}x_0) = \varphi(0, x_0) = 0$. Puis dérivons la fonction $\varphi_j(t) = \partial_j \varphi(t, e^{tX}x_0)$; nous obtenons (en utilisant (5.1)):

$$\begin{aligned}\varphi'_j(t) &= \left(\partial_j [\partial_t \varphi(t, x)] + X [\partial_j \varphi(t, x)] \right) |_{x=e^{tx}x_0} \\ &= [X, \partial_j] \varphi(t, x) |_{x=e^{tx}x_0} = \sum_{k=1}^n \partial_j a_k(e^{tx}x_0) \varphi_k(t)\end{aligned}$$

d'où $\varphi_j(t) = 0$ puisque c'est vérifié en $t = 0$. Comme $\varphi(0, x) = |x - x_0|^2$, il existe un $\varepsilon_3 > 0$ tel que si $x_0 \in K$, $x \in W$ et $|t| < \varepsilon_3$,

$$(5.2) \quad \varphi(t, x) \geq \frac{1}{2} |x - e^{tx}x_0|^2.$$

Pour $x_0 \in F \cap K$, nous avons $0 = \inf_{x \in F \cap W} \varphi(0, x) < \inf_{x \in F \cap \partial W} \varphi(0, x)$ et donc cette inégalité reste vraie lorsque $|t| < \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$. Pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ fixé, il existe donc un point $x_t \in F \cap \overset{\circ}{W}$ où $\varphi(t, x)$ atteint sa borne inférieure, soit :

$$x_t \in (F \cap \overset{\circ}{W}) \subset (\overset{\circ}{W})_+ = \{x \in \overset{\circ}{W} \mid \varphi(t, x) \geq \varphi(t, x_t)\}.$$

En utilisant l'hypothèse du théorème on obtient $X\varphi(t, x_t) = 0$, et en utilisant l'équation (5.1), $\partial_t \varphi(t, x_t) = 0$. Nous avons donc pour tous $|t| < \varepsilon$ et $|s| < \varepsilon$,

$$\begin{aligned}O((t-s)^2) &= \varphi(t, x_t) - \varphi(s, x_t) \leq \varphi(t, x_t) - \varphi(s, x_s) \leq \varphi(t, x_s) - \varphi(s, x_s) \\ &= O((t-s)^2)\end{aligned}$$

d'où $\varphi(t, x_t) = \varphi(0, x_0) = 0$. Par (5.2) nous en déduisons que pour $x_0 \in F \cap K$ et $|t| < \varepsilon$, $e^{tx}x_0 = x_t \in F$.

Pour pouvoir tirer les conséquences pour l'unicité de ce théorème, il nous faut introduire un nouvel objet géométrique.

Si L vérifie la condition (P) dans un voisinage Ω d'un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$, choisissons des coordonnées (lemme 1.3) dans lesquelles L s'écrit $\partial_t + ib \cdot \partial_y$ à un facteur non nul près, et notons \mathcal{V}_1 la courbe intégrale du champ réel ∂_t passant par x_0 . Si le rang de \mathcal{L} reste égal à 1 au voisinage de x_0 sur \mathcal{V}_1 , nous dirons que \mathcal{V}_1 est la « feuille de \mathcal{L} passant par x_0 ». Si au contraire on peut trouver des points de \mathcal{V}_1 arbitrairement proches de x_0 où le rang de \mathcal{L} est égal à 2, nous savons par la propriété (P) qu'il existe une variété \mathcal{V}_2 de dimension 2 contenant \mathcal{V}_1 et à laquelle le champ L reste tangent au voisinage de x_0 ; dans ce deuxième cas, nous dirons que \mathcal{V}_2 est la « feuille de \mathcal{L} passant par x_0 » (on remarquera que \mathcal{V}_2 n'est pas nécessairement une variété intégrale de \mathcal{L} , et que dans les deux cas la feuille de \mathcal{L} passant par x_0 est une notion géométrique indépendante des coordonnées choisies).

De même, pour n'énoncer qu'un seul théorème, si L vérifie la condition (R) dans un voisinage Ω d'un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$, nous appellerons « feuille de \mathcal{L} passant par x_0 » la variété intégrale de \mathcal{L} passant par x_0 .

Dans l'énoncé suivant, \mathcal{V} désigne la feuille de \mathcal{L} passant par x_0 .

THÉORÈME 5.2. *Supposons qu'il existe un voisinage Ω de x_0 tel que l'on se trouve dans l'une des deux situations suivantes :*

1. *L vérifie la condition (R) et $\text{rg } \mathcal{L} \leq 2$ dans Ω .*
2. *L vérifie la condition (P) dans Ω .*

Si de plus, pour tout voisinage ω de x_0 ,

$$\mathcal{V} \cap \omega \neq \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\},$$

alors pour tout voisinage ω de x_0 et toute $u \in C^1(\omega)$ solution du système

$$(5.3) \quad \begin{cases} (L + c_0)u(x) = 0 & \text{dans } \omega, \text{ et} \\ u(x) = 0 & \text{dans } \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}, \end{cases}$$

la fonction u s'annule au voisinage de x_0 .

Démonstration. Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (5.3); supposons que $x_0 \in \text{supp } u$. Nous allons montrer qu'il existe alors un voisinage de x_0 sur \mathcal{V} entièrement contenu dans $\text{supp } u$. En utilisant ensuite l'hypothèse sur \mathcal{V} du théorème, nous en déduisons qu'il existe des points $x \in \text{supp } u$ tels que $\varphi(x) < \varphi(x_0)$ ce qui contredit le fait que $u = 0$ dans ω_- . C'est donc que $x_0 \notin \text{supp } u$, c'est-à-dire que $u = 0$ au voisinage de x_0 .

Montrons donc que si $x_0 \in \text{supp } u$, il existe un voisinage de x_0 sur \mathcal{V} entièrement contenu dans $\text{supp } u$. Le champ L étant non dégénéré, nous pouvons trouver (lemme 1.3) des coordonnées locales (y, t) telles que

1. $x_0 = (0, 0)$,
2. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

Comme $(L + c_0)u(x) = 0$ dans ω , nous pouvons affirmer grâce au théorème 1.2 que les hypothèses du théorème 5.1 sont vérifiées dans ω avec $F = \text{supp } u$ et chacun des deux champs réels $X = \partial_t$ et $Y = b(y, t) \cdot \partial_y$. Nous devons alors distinguer deux cas :

1. Si $\dim \mathcal{V} = 1$, il suffit d'appliquer le théorème 5.1 avec X et $K = \{x_0\}$ pour obtenir un voisinage de x_0 sur \mathcal{V} entièrement contenu dans $\text{supp } u$.
2. Si $\dim \mathcal{V} = 2$, nous pouvons trouver un voisinage de x_0 inclus dans ω qui soit de la forme $\{(y, t) \in \mathbf{R}^n \mid |y| < \delta \text{ et } |t| \leq T\}$ pour un $\delta > 0$

et un $T > 0$ avec $b(y, T) \neq 0$ pour tout y tel que $|y| < \delta$ (sinon, changer t en $-t$). Prenons alors sur \mathcal{V} les coordonnées (z, t) où z est l'abscisse curviligne associée au champ $b(y, T) \cdot \partial_y$; on notera z_0 l'abscisse de x_0 . Il existe alors un $\alpha > 0$ tel que $K = [z_0 - \alpha, z_0 + \alpha] \times [-T, T]$ soit un voisinage compact de x_0 dans \mathcal{V} contenu dans le voisinage précédent.

Dans ces conditions, tout point de K est dans le support de u ; en effet, $(z_0, 0) = x_0 \in \text{supp } u$ par hypothèse, puis étant donné $(z, t) \in K$, on obtient par l'utilisation répétée du théorème 5.1 avec tantôt X , tantôt Y , que

$$(z, t) = e^{(t-T)X} e^{(z-z_0)Y} e^{TX}(z_0, 0) \in \text{supp } u \cap K.$$

Remarque. Le théorème de Bony (théorème 5.1 ci-dessus) permet aussi de démontrer des théorèmes d'unicité globale. A titre d'exemple, énonçons le résultat pour un problème mi-local, mi-global : dans

$$\Omega = \{(y, t) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 + t^2 < 2\},$$

considérons le champ

$$\begin{cases} L = \partial_y + ie^{\frac{1}{y+1}} \partial_t & \text{si } y < -1, \\ L = \partial_y & \text{si } y \geq -1. \end{cases}$$

Alors, pour tout voisinage ω de $(0, 0)$ et toute $u \in C^1(\Omega)$ solution du système

$$\begin{cases} (L + c_0)u(x) = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et} \\ u(x) = 0 & \text{dans } \omega_- = \{(y, t) \in \omega \mid t \leq 0\}, \end{cases}$$

la fonction u s'annule au voisinage de $(0, 0)$.

(On remarquera que ce problème ne possède pas la propriété d'unicité locale; en effet, dans $\omega = \{(y, t) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 + t^2 < 1\}$, la fonction

$$\begin{cases} u(y, t) = \exp \left(- \int_0^y c_0(z, t) dz - \frac{1}{t} \right) & \text{si } t > 0, \\ u(y, t) = 0 & \text{si } t \leq 0, \end{cases}$$

est C^∞ , solution de $(L + c_0)u(x) = 0$ dans ω , et vérifie $\text{supp } u = \omega_+ = \{(y, t) \in \omega \mid t \geq 0\}$).

5.2. CONTRE-EXEMPLE À L'UNICITÉ LORSQUE LE RANG DE \mathcal{L} EST CONSTANT

Lorsque le rang de \mathcal{L} est constant, le champ L vérifie la condition (R) d'après le théorème de Frobenius (cf. 1.2). Dans l'énoncé suivant, \mathcal{V} désigne la variété intégrale de \mathcal{L} passant par x_0 .

THÉORÈME 5.3. *Supposons qu'il existe un voisinage Ω de x_0 tel que le rang de \mathcal{L} soit constant dans Ω et que*

$$\mathcal{V} \cap \Omega \subset \Omega_+ = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}.$$

Alors il existe un voisinage ω de x_0 , $u \in C^\infty(\omega)$ et $a \in C^\infty(\omega)$ tels que

$$(5.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (L + c_0 + a)u(x) = 0 \text{ dans } \omega, \\ \mathcal{V} \cap \omega \subset \text{supp } u \subset \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}, \quad \text{et} \\ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n, \partial_x^\alpha a(x_0) = 0 \text{ (}a \text{ est « plate » en } x_0\text{).} \end{array} \right.$$

De plus, si $c_0 = 0$, on peut choisir $a = 0$.

Démonstration. Le rang de \mathcal{L} étant constant, on peut trouver des coordonnées locales dans un voisinage ω de x_0 qui redressent les variétés intégrales de \mathcal{L} , ou plus précisément, des coordonnées $x = (x', x'', x_n)$ avec $x' = (x_1, \dots, x_r)$ et $x'' = (x_{r+1}, \dots, x_{n-1})$, telles que:

1. $x_0 = (0, 0, 0)$.
2. $d\varphi(x_0) = (0, 0, 1)$.
3. Les variétés intégrales de \mathcal{L} ont pour équations $x'' = Cte$, $x_n = Cte$ (en particulier, \mathcal{V} a pour équation $x'' = 0$, $x_n = 0$).

Dans ce qui va suivre, nous aurons éventuellement besoin de réduire le voisinage ω . Le nombre d'étapes étant fini, et les propriétés obtenues restant vraies si on réduit le voisinage, nous utiliserons toujours la même lettre ω sans préciser les modifications de ce dernier.

Comme L reste tangent aux variétés intégrales de \mathcal{L} , nous avons $L\psi(x) = 0$ dans ω si $\psi(x) = x_n^3 - |x''|^2$. Posons

$$(5.5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u_0(x) = \exp(-1/\psi(x)) & \text{si } x \in \omega \text{ et } \psi(x) > 0, \quad \text{et} \\ u_0(x) = 0 & \text{si } x \in \omega \text{ et } \psi(x) \leq 0. \end{array} \right.$$

Alors $u_0 \in C^\infty(\omega)$, $Lu_0(x) = 0$ dans ω et $\mathcal{V} \cap \omega \subset \text{supp } u_0$ puisque $u_0(x', 0, \varepsilon) > 0$ pour tout x' et tout $\varepsilon > 0$ tels que $(x', 0, \varepsilon) \in \omega$. Pour voir que $\text{supp } u_0 \subset \omega_+$, il faut exprimer φ dans les coordonnées (x', x'', x_n) .

Par le théorème des fonctions implicites (cf. le point 2 ci-dessus), il existe une fonction $\varphi_0 \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ telle que $\varphi(x) \geq \varphi(x_0)$ équivaut dans ω à $x_n + \varphi_0(x', x'') \geq 0$. L'hypothèse sur \mathcal{V} du théorème nous indique que $\varphi_0(x', 0) \geq 0$ dans ω (cf. le point 3 ci-dessus), donc par développement de Taylor en x'' à l'ordre zéro, $\varphi_0(x', x'') \geq -C|x''|$ dans ω pour une constante $C < \infty$ ($C > 0$). Si donc on a choisi ω assez petit pour que $|x''| < C^{-3}$ dans ω ,

$$u_0(x) \neq 0 \Rightarrow \psi(x) > 0 \Rightarrow x_n > |x''|^{2/3} \Rightarrow x_n + \varphi_0(x', x'') > 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$$

d'où $\text{supp } u_0 \subset \omega_+$.

Nous avons donc donné une solution du problème (5.4) lorsque $c_0 = 0$. Sinon, le champ L étant non dégénéré, choisissons (lemme 1.3) des coordonnées (y, t) telles que

1. $x_0 = (0, 0)$.
2. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

Pour tout $j \in \mathbf{N}$, posons alors

$$b_j(y) = \partial_t^j b(y, 0) \quad \text{et} \quad c_j(y) = \partial_t^j c(y, 0),$$

puis par récurrence,

$$(5.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_0(y) = 0, \\ v_{j+1}(y) = - \sum_{k=0}^j C_j^k b_k(y) \cdot \partial_y v_{j-k}(y) - c_j(y) \quad \text{pour } j \geq 0. \end{array} \right.$$

Par le théorème de Borel (cf. Hörmander [11, th. 1.2.6]), il existe une fonction $v \in C^\infty(\omega)$ telle que $\partial_t^j v(y, 0) = v_j(y)$. Par (5.6), nous obtenons que la fonction

$$a(y, t) = - (\partial_t v(y, t) + ib(y, t) \cdot \partial_y v(y, t) + c(y, t))$$

est plate en $(0, 0)$.

La fonction $u(x) = e^{v(x)} u_0(x)$, où u_0 est donnée par (5.5) et v par ce qui précède est alors solution du problème (5.4).

Remarques. 1) Pour une discussion du rôle du terme d'ordre zéro, on se reportera au chapitre suivant.

2) On notera que par les théorèmes 5.2 et 5.3 nous avons complètement élucidé la question de l'unicité pour les problèmes caractéristiques de rang constant. En effet, distinguons les deux situations suivantes :

α — Le rang de \mathcal{L} est inférieur ou égal à 2. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait unicité (pour toute perturbation a plate en x_0) est alors que la variété intégrale de \mathcal{L} passant par x_0 ne reste pas localement dans $\{\varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}$ (c'est nécessaire par le théorème 5.3, et suffisant par le théorème 5.2).

β — Le rang de \mathcal{L} est supérieur ou égal à 3. Alors il n'y a jamais unicité « stable ». En effet, deux cas peuvent se produire : s'il existe des

points arbitrairement proches de x_0 dans $S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)\}$ où le problème n'est pas caractéristique, nous pouvons appliquer le théorème 1.1 ; si le problème est caractéristique en tous les points de S , c'est que la variété intégrale de \mathcal{L} passant par x_0 reste localement dans S , et nous pouvons appliquer le théorème 5.3.

CHAPITRE 6: RÔLE DU TERME D'ORDRE ZÉRO

Aux théorèmes 1.1, 2.2, 4.2 et 5.3, nous avons dû modifier le terme d'ordre zéro pour montrer qu'il n'y avait pas unicité de Cauchy. Il est alors naturel de se demander si de tels problèmes possèdent tout de même la propriété d'unicité pour certains termes d'ordre zéro. La réponse à cette question est positive comme nous le verrons ci-dessous.

Cependant, le rôle du terme d'ordre zéro est encore mal connu. Nous nous bornerons ici à énoncer deux remarques qui suggèrent la nature des conditions à imposer. La première d'entre elles (théorème 6.1) est due à Lewy [15].

Avant d'énoncer le premier théorème, rappelons que la résolubilité locale d'un champ complexe non dégénéré a été étudiée par Nirenberg et Trèves [17], et que sous les hypothèses du théorème 2.2, ainsi que sous les hypothèses du théorème 5.3 si $\text{rg } \mathcal{L} \geq 3$, le champ L n'est localement résoluble en aucun point d'un voisinage de x_0 ; de même, les hypothèses des théorèmes 1.1 et 4.2 entraînent qu'il existe de nombreux points voisins de x_0 où L n'est pas localement résoluble. Il en résulte qu'il existe des fonctions $C^\infty c$ telles que l'équation $Lv - c = 0$ ne possède pas de solution v au voisinage de ces points.

THÉORÈME 6.1. Soit $\mathcal{N}_j(c_0)$ l'ensemble des points de \mathbf{R}^n au voisinage desquels l'équation $Lv(x) + c_0(x) = 0$ ne possède pas de solution $v \in C^j$. S'il existe un voisinage Ω de x_0 tel que

$$\overline{\mathcal{N}_j(c_0)} \supset \Omega_+ = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\},$$

alors pour tout voisinage ω de x_0 et toute $u \in C^j(\omega)$ solution du système

$$(6.1) \quad \begin{cases} (L + c_0)u(x) = 0 & \text{dans } \omega \text{ et} \\ u(x) = 0 & \text{dans } \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}, \end{cases}$$

la fonction u s'annule au voisinage de x_0 .

Démonstration. Soit $u \in C^j(\omega)$ une solution du problème (6.1). Supposons qu'elle n'est pas nulle dans $\omega \cap \Omega$. Alors, comme $u(x) = 0$ dans ω_- , il existe un ouvert contenu dans $\omega \cap \Omega_+$ où u ne prend pas la valeur 0; cet ouvert contient donc un point $x_1 \in \mathcal{N}_j(c_0)$ et une boule ω_1 de centre x_1 : $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in \omega_1$. Dans ω_1 , on peut alors écrire $u(x) = e^{v(x)}$ pour une fonction $v \in C^j(\omega_1)$. Or (6.1) implique que $Lv(x) + c_0(x) = 0$ dans ω_1 , ce qui contredit le fait que $x_1 \in \mathcal{N}_j(c_0)$. Donc $u = 0$ dans $\omega \cap \Omega$.

Dans le théorème suivant, nous nous plaçons résolument dans une situation où l'on a déjà montré qu'il n'y avait pas unicité pour un terme d'ordre zéro donné c_0 (situation fournie par exemple par l'un des théorèmes 1.1, 2.2, 4.2 ou 5.3), et nous cherchons pour quels autres termes d'ordre zéro c l'opérateur $L + c$ ne possède toujours pas la propriété d'unicité.

Pour un fermé F , nous noterons $C^j(F)$ l'ensemble des fonctions $v \in C^j(\overset{\circ}{F})$ possédant la propriété suivante: pour tout $x \in F$ et tout multi-indice α de longueur inférieure à j , il existe un voisinage ω_α de x tel que $\partial_x^\alpha v$ reste bornée dans $\omega_\alpha \cap \overset{\circ}{F}$.

THÉORÈME 6.2. *Supposons qu'il existe un voisinage ω de x_0 et des fonctions $u_0 \in C^j(\omega)$ et $c_0 \in C^\infty(\omega)$ tels que*

$$\begin{cases} (L + c_0)u_0(x) = 0 \text{ dans } \omega, \text{ et} \\ x_0 \in \text{supp } u_0 \subset \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}. \end{cases}$$

Si de plus l'équation $Lv(x) + c(x) - c_0(x) = 0$ possède une solution $v \in C^j(\text{supp } u_0)$, alors il existe une fonction $u \in C^j(\omega)$ telle que

$$\begin{cases} (L + c)u(x) = 0 \text{ dans } \omega, \text{ et} \\ x_0 \in \text{supp } u \subset \omega_+. \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de prendre $u(x) = e^{v(x)}u_0(x)$.

Application. Comme illustration de ce dernier théorème, reprenons un problème abordé au chapitre 5.

Supposons qu'il existe un voisinage Ω d'un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$ dans lequel le champ L vérifie la condition (P) et \mathcal{L} est de rang constant. Deux exemples d'une telle situation sont fournis par le cas où L est un champ réel (non dégénéré en x_0) et le cas où $X = \text{Re } L$ et $Y = \text{Im } L$ sont linéairement indépendants en x_0 et commutent au voisinage de x_0 ($[X, Y] = 0$).

Notons \mathcal{V} la variété intégrale de \mathcal{L} passant par x_0 ; alors, en rassemblant les résultats des théorèmes 5.2, 5.3 et 6.2, et en rappelant que sous la condition (P), L est localement résoluble (cf. Nirenberg et Trèves [17]), on s'aperçoit qu'on a démontré l'équivalence des deux propriétés suivantes :

1. Unicité locale en x_0 : pour tout voisinage ω de x_0 ,

$$\left. \begin{array}{l} u \in C^1(\omega), \\ (L + c_0)u(x) = 0 \text{ dans } \omega, \text{ et} \\ u(x) = 0 \text{ dans } \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\} \end{array} \right\} \Rightarrow u = 0 \text{ au voisinage de } x_0.$$

2. Pour tout voisinage ω de x_0 , $\mathcal{V} \cap \omega \neq \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALINHAC, S. Non unicité du problème de Cauchy. *Annals of Math.* 117 (1983), 77-108.
- [2] —— Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem. *Contemporary Mathematics*, Vol. 27 (1984), 1-22.
- [3] ALINHAC, S. et C. ZUILY. Unicité et non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles. *Comm. in Pde's*, 6 (7) (1981), 799-828.
- [4] BAOUENDI, M. S. and C. GOULAOUIC. Cauchy problems with characteristic initial hypersurface. *Comm. on Pure and Appl. Math.* 26 (1973), 455-475.
- [5] BAOUENDI, M. S. and F. TRÈVES. A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields. *Annals of Math.* 113 (1981), 387-421.
- [6] CALDERÓN, A. P. Existence and uniqueness theorems for systems of partial differential equations. *Proc. Symp. Fluid Dynamics and applied Math.*, (Univ. of Maryland 1961), 147-195, Gordon and Breach, New York 1962.
- [7] CARDOSO, F. and J. HOUNIE. First order linear pde's and uniqueness in the Cauchy problem. *J. of diff. equ.* 33 (1979), 239-248.
- [8] COHEN, P. *The non-uniqueness of the Cauchy problem*. O.N.R. Techn. Report 93, Stanford 1960.
- [9] HÖRMANDER, L. *Linear partial differential operators*. Springer Verlag, Berlin 1963.
- [10] —— Non-uniqueness for the Cauchy problem. Lecture notes in Math. (Springer-Verlag) n° 459, *Fourier integral operators and pde's* (1975), 36-72.
- [11] —— *The analysis of linear partial differential operators, T. I.* Springer-Verlag, Berlin 1983.
- [12] LERNER, N. Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs elliptiques. *Ann. Sc. de l'Ecole Normale Sup.* 17 (1984), 469-505.
- [13] —— Unicité de Cauchy pour des opérateurs différentiels faiblement principalement normaux. À paraître dans *J. de Math. pures et appliquées*.
- [14] LERNER, N. et L. ROBBIANO. Unicité de Cauchy pour des opérateurs de type principal. *Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1983-84*, exposé n° IX (Ecole Polytechnique, Paris), et article à paraître dans *J. d'analyse math.*

- [15] LEWY, H. An example of a smooth linear partial differential equation without solution. *Annals of Math.* 66 (1957), 155-158.
- [16] NAGANO, T. Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras. *J. of the Math. Soc. of Japan* 18 (1966), 398-404.
- [17] NIJENBERG, L. and F. TRÈVES. Solvability of a first order linear partial differential equation. *Comm. on Pure and Appl. Math.* 16 (1963), 331-351.
- [18] PLIS, A. A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere. *Comm. on Pure and Appl. Math.* 14 (1961), 599-617; voir aussi la bibliographie de [10].
- [19] ROBBIANO, L. Non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs non-elliptiques à symboles complexes. Thèse de 3^e cycle, Université de Paris XI-Orsay, 1983.
- [20] SAINT RAYMOND, X. Non-unicité de Cauchy pour des opérateurs principalement normaux. *Indiana Univ. Math. J.* 33 (1984), 847-858.
- [21] —— Autour du théorème de Holmgren sur l'unicité de Cauchy. *J. of diff. geom.* 20 (1984), 121-135.
- [22] SJÖSTRAND, J. *Singularités analytiques microlocales*. Astérisque n° 95 (1982).
- [23] STERNBERG, S. *Lectures on differential geometry*. 2nd edition, Chelsea Publishing Company, New York 1983.
- [24] STRAUSS, M. and F. TRÈVES. First order linear pde's and uniqueness in the Cauchy problem. *J. of diff. equ.* 15 (1974), 195-209.
- [25] SUSSMANN, H. J. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. *Trans. of the Am. Math. Soc.* 180 (1973), 171-188.
- [26] WHITNEY, H. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Trans. of the Am. Math. Soc.* 36 (1934), 63-89.
- [27] ZACHMANOGLOU, E. C. Propagation of zeroes and uniqueness in the Cauchy problem for first order partial differential equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 38 (1970), 178-188.
- [28] ZUILY, C. *Uniqueness and non uniqueness in the Cauchy problem*. Progress in mathematics vol. 33, Birkhäuser, Boston 1983.

(Reçu le 22 novembre 1984)

Xavier Saint Raymond

Mathématique, bâtiment 425
 Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay
 91405 ORSAY Cedex (France)

vide-leer-empty