

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 32 (1986)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** MOYENNABILITÉ INTÉRIEURE DES GROUPES: DÉFINITIONS ET EXEMPLES  
**Autor:** Bédos, Erik / de la Harpe, Pierre

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-55083>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.08.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## RÉFÉRENCES

- [Ak] AKEMANN, C. A. Operator algebras associated with Fuchsian groups. *Houston J. of Math.* 7 (1981), 295-301.
- [AW] AKEMANN, C. A. and M. E. WALTER. Unbounded negative definite functions. *Can. J. of Math.* 33 (1981), 862-871.
- [B1] BÉDOS, E. Operator algebras associated with free products of groups with amalgamation. *Math. Ann.* 266 (1984), 279-286.
- [B2] ——— Operator algebras associated with *HNN* extensions. Oslo 1983.
- [CC] CHODA, H. and M. CHODA. Fullness, simplicity and inner amenability. *Math. Japonica* 24 (1979), 235-246.
- [Ch1] CHODA, M. The factors of inner amenable groups. *Math. Japonica* 24 (1979), 145-152.
- [Ch2] ——— Effect of inner amenability on strong ergodicity. *Math. Japonica* 28 (1983), 109-115.
- [C1] CONNES, A. On the classification of von Neumann algebras and their automorphisms. *Symp. Math.* 20 (1976), 435-478.
- [C2] ——— A classification of injective factors. *Ann. of Math.* 104 (1976), 73-115.
- [C3] ——— A factor of type  $II_1$  with countable fundamental group. *J. Operator Theory* 4 (1980), 151-153.
- [Da] DAY, M. M. Amenable semigroups. *Ill. J. Math.* 1 (1957), 509-544.
- [DK] DELAROCHE, C. et K. K. KIRILLOV. Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés (d'après D. A. Kajdan). *Séminaire Bourbaki*, Exposé 343, juin 1968.
- [Di1] DIXMIER, J. *Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations*. Gauthier-Villars 1964.
- [Di2] ——— Quelques propriétés des suites centrales dans les facteurs de type  $II_1$ . *Inventiones Math.* 7 (1969), 215-225.
- [E] EFFROS, E. G. Property  $\Gamma$  and inner amenability. *Proc. Amer. Math. Soc.* 47 (1975), 483-486.
- [Ey] EYMARD, P. Initiation à la théorie des groupes moyennables. *Lecture Notes in Math.* 497 (Springer 1975), 89-107.
- [Fø] FØLNER, E. On groups with full Banach mean value. *Math. Scand.* 3 (1955), 243-254.
- [Gr] GREENLEAF, F. P. *Invariant means and topological groups*. Von Nostrand 1965.
- [HJ] DE LA HARPE, P. et K. JHABVALA. Quelques propriétés des algèbres d'un groupe discontinu d'isométries hyperboliques. *Monographie 29 de l'Enseignement math.* (1981), 47-55.
- [Ha] DE LA HARPE, P. Reduced  $C^*$ -algebras of discrete groups which are simple with a unique trace. *Lecture Notes in Math.* 1132 (Springer 1985), 230-253.
- [HaS] DE LA HARPE, P. et G. SKANDALIS. Un résultat de Tarski sur les actions moyennables de groupes et les partitions paradoxales. *L'Enseignement Math.* 32 (1986), 121-138.
- [HeS] HEWITT, E. and K. STROMBERG. *Real and abstract analysis*. Springer 1965.
- [LR] LOSERT, V. and H. RINDLER. Conjugation-invariant means. A paraître in *Colloq. Math.*
- [Ma] MACLACHLAN, C. On the centres of mapping class groups of surfaces. In *Groups-St. Andrews 1981*, London Math. Soc. Lecture Notes 71 (Cambridge Univ. Press 1982), 261-269.
- [MD] MCDUFF, D. Uncountably many  $II_1$ -factors. *Ann. of Math.* 90 (1969), 372-377.

- [MvN] MURRAY, F. D. and J. VON NEUMANN. On rings of operators IV. *Ann. of Math.* 44 (1943), 716-808.
- [Na] NAMIOKA, I. Følner's conditions for amenable semigroups. *Math. Scand.* 15 (1964), 18-28.
- [Pa] PASCHKE, W. Inner amenability and conjugation operators. *Proc. Amer. Math. Soc.* 71 (1978), 117-118.
- [Pi] PIER, J. P. Quasi-invariance intérieure sur les groupes localement compacts. *Actes du 6<sup>e</sup> Congrès des Math. d'Exp. latine*, Luxembourg 1981 (Gauthier-Villars 1982), 431-436.
- [Ra] RAGHUNATHAN, M. S. *Discrete subgroups of Lie groups*. Springer 1972.
- [Ro] ROSENBLATT, J. M. A generalization of Følner's condition. *Math. Scand.* 33 (1973), 153-170.
- [Sa] SAKAI, S. *C\*-algebras and W\*-algebras*. Springer 1971.
- [Ta] TARSKI, A. *Cardinal algebras*. Oxford Univ. Press 1949.
- [Z] LYNDON, R. C. and P. E. SCHUPP. *Combinatorial group theory*. Springer 1977.

### AJOUT, DÉCEMBRE 1985

En complément au corollaire 2, notons qu'un groupe  $\Gamma$  est intérieurement moyennable dès qu'il satisfait à l'une des conditions suivantes :

- (viii)  $\Gamma$  agit sur un ensemble non vide  $X$  muni d'une moyenne  $\Gamma$ -invariante  $\mu$  de telle sorte que l'isotropie  $I(x)$  soit intérieurement moyennable pour tout  $x \in X$ .
- (ix)  $\Gamma$  possède un sous-groupe intérieurement moyennable  $\Gamma'$  d'indice fini.
- (x) Il existe une suite exacte  $1 \rightarrow \Gamma' \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma'' \rightarrow 1$  avec  $\Gamma''$  intérieurement moyennable, de même que  $\{g \in \Gamma \mid ghg^{-1}h^{-1} \in \Gamma'\}$  pour tout  $h \in \Gamma - \Gamma'$ .

L'assertion (ix) résulte de (viii), pour l'action de  $\Gamma$  sur  $X = \Gamma/\Gamma'$ ; elle répond partiellement à la dernière question du § 2. L'assertion (x) résulte aussi de (viii), pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\Gamma'' - 1$ . L'assertion (viii) est « du type Fubini » et se montre comme suit (voir aussi la proposition 3.5 de l'article de Rosenblatt cité ci-dessous).

Soient  $Y = \{x \in X \mid I(x) = 1\}$  et  $Z = X - Y$ ; soit  $D$  un domaine fondamental, c'est-à-dire un sous-ensemble de  $X$  rencontrant chaque  $\Gamma$ -orbite en un unique point. Si  $\mu(Y) \neq 0$  alors  $\Gamma$  est moyennable car, après normalisation,  $S \mapsto \mu(SD)$  est une moyenne invariante sur  $\Gamma$ . Si  $\mu(Y) = 0$  on choisit pour tout  $x \in Z \cap D$  une moyenne intérieurement invariante  $\mu_x$  sur  $l^\infty(I(x) - 1)$ ;