Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 32 (1986)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MOYENNABILITÉ INTÉRIEURE DES GROUPES: DÉFINITIONS ET EXEMPLES
Autor: Bédos, Erik / de la Harpe, Pierre
Kapitel: §2. Conditions suffisantes
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55083

qui est CCI, c'est-à-dire le cas où $\lambda(\Gamma)''$ est un facteur, ou encore autrement dit le cas où $C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma))$ agit irréductiblement sur $l^2(\Gamma)$. On sait que l'intersection d'une C^*-algèbre irréductible avec l'algèbre $\mathcal{K}$ des opérateurs compacts est ou bien nulle, ou bien égale à $\mathcal{K}$ (corollaire 4.1.10 de [Di1]). Par suite (P) est équivalent pour un groupe CCI à

(P') $\quad \mathcal{K} \cap C^*(\alpha(\Gamma)) = \{0\}$.

D'autre part, un résultat de Connes (théorème 2.1 de [C2]) exprime que $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma si et seulement si

(C) $\quad \mathcal{K} \cap C^*(\lambda(\Gamma)'', \rho(\Gamma)'') = \{0\}$.

Enfin, on a évidemment

$$C^*(\alpha(\Gamma)) \subset C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma)) \subset C^*(\lambda(\Gamma)'', \rho(\Gamma)'') .$$

Par suite, si le facteur $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma, alors le groupe Γ est intérieurement moyennable. Cette implication est à l'origine du travail d'Effros, comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction.

2) Soit Γ un groupe CCI satisfaisant la condition (F) avec de plus $\sup |F_n| < \infty$, par exemple un groupe faiblement commutatif (voir § 2). Pour tout $n \geqslant 1$, notons χ_n la fonction caractéristique de F_n, qui est un élément de trace nulle dans le facteur $\lambda(\Gamma)''$. Pour tout $g \in \Gamma$, il existe un entier n_g avec $gF_ng^{-1} = F_n$, donc tel que g et χ_n commutent dans $\lambda(\Gamma)''$, pour $n \geqslant n_g$. Par suite $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma (proposition 1.10 de [Di2]).

On peut sans doute encore montrer que $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma lorsque Γ est un groupe CCI satisfaisant la « condition de Følner forte » suivante :

(F_f) Il existe une suite $(F_n)_{n \geqslant 1}$ de sous-ensembles finis non vides de $\Gamma - \{1\}$ telle que, pour tout $g \in \Gamma$, il existe un entier n_g avec $gF_ng^{-1} = F_n$ pour $n \geqslant n_g$.

3) Pour d'autres relations entre la moyennabilité intérieure de Γ et les propriétés de $\lambda(\Gamma)''$, voir [Ch1].

§ 2. Conditions suffisantes

Rappelons qu'un groupe satisfait la *propriété T de Kazhdan* si la représentation triviale ε (de dimension 1) est isolée dans le dual unitaire du groupe, ou encore si toute représentation unitaire du groupe contenant faiblement ε contient nécessairement ε au sens fort (lemme 1 de [DK]). Rappelons aussi qu'un groupe Γ est dit *faiblement commutatif* si, pour toute partie finie F de Γ, il existe $g \neq 1$ dans Γ commutant aux éléments de F (c'est la condition (c) du lemme 6.1.1 de [MvN]). Un groupe $\Gamma \neq \{1\}$ de génération finie est faiblement commutatif si et seulement si son centre n'est pas réduit à un élément. Mais il existe des groupes CCI faiblement commutatifs; citons:

— Le groupe des permutations de $\mathbf{N}$ à supports finis, de même que son produit direct avec tout groupe CCI.

— La somme restreinte d'une famille infinie dénombrable de groupes CCI.

— Les groupes construits par McDuff [MD] pour exhiber une infinité non dénombrable de facteurs finis continus non isomorphes deux à deux.

Corollaire 2. *Pour qu'un groupe* Γ *soit intérieurement moyennable, il suffit qu'il vérifie l'une des conditions suivantes:*

(i) Γ *est moyennable.*

(ii) *Il existe dans* $\Gamma - \{1\}$ *une classe de conjugaison finie.*

(iii) Γ *est un produit direct* $\Gamma' \times \Gamma''$ *avec* Γ' *intérieurement moyennable et non réduit à* $\{1\}$.

(iv) *Il existe une suite exacte* $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$ *avec* Γ' *intérieurement moyennable et* Γ'' *moyennable.*

(v) Γ *possède une famille* $(\Gamma_i)_{i \in I}$ *de sous-groupes intérieurement moyennables, avec* $\Gamma = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$.

(vi) Γ *est faiblement commutatif.*

(vii) Γ *est* CCI *et le facteur* $\lambda(\Gamma)''$ *possède la propriété gamma.*

Preuve. La suffisance de (i) est standard (lemmes 1.1.1 et 1.1.3 de [Gr]), celle de (ii) est banale, et celle de (v) se montre comme pour le cas moyennable (théorème 1.2.7 de [Gr]).

Pour (iii), considérons une moyenne intérieurement invariante μ' sur Γ'. On définit une moyenne intérieurement invariante μ sur Γ en posant pour toute partie S de $\Gamma - \{1\}$:

$$S' = S \cap ((\Gamma' - \{1\}) \times \{1\})$$

$$\mu(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } S' = \emptyset, \\ \mu'(S') & \text{sinon}. \end{cases}$$

Supposons la condition (iv) vérifiée. Le groupe $\mathrm{Aut}(\Gamma')$ de tous les automorphismes de Γ' opère naturellement sur le convexe compact non vide C des moyennes intérieurement invariantes sur Γ', et l'action de tout automorphisme intérieur est banale par définition; par suite le quotient $\mathrm{Out}(\Gamma') = \mathrm{Aut}(\Gamma')/\mathrm{Int}(\Gamma')$ opère sur C. L'homomorphisme naturel $\Gamma'' \to \mathrm{Out}(\Gamma')$ associé à la suite exacte fournit donc une action affine de Γ'' sur C. Comme Γ'' est moyennable, l'action possède un point fixe μ qui est une moyenne intérieurement invariante sur Γ à support dans $\Gamma' - \{1\}$.

Nous avons déjà discuté la suffisance de (vii) à la fin du § 1, et celle de (vi) en résulte par le lemme 6.1.1 de [MvN]. On peut aussi observer que tout groupe dénombrable faiblement commutatif possède une suite de Følner $(F_n)_{n\geqslant 1}$ comme à la condition (F) du théorème 1, avec de plus $|F_n| = 1$ pour tout $n \geqslant 1$. □

La condition (vi) permet notamment de retrouver l'exemple du théorème 3 de [CC], qui est la somme restreinte d'une famille infinie dénombrable de groupes libres non abéliens. (C'est un exemple de groupe intérieurement moyennable dont la C^*-algèbre réduite est simple à trace unique.)

COROLLAIRE 3. *Pour qu'un groupe* Γ *soit non intérieurement moyennable, il suffit qu'il vérifie l'une des conditions suivantes:*

(i) Γ *est* CCI *et satisfait la propriété* T.

(ii) *Il existe une suite exacte* $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$ *avec* Γ' *et* Γ'' *non intérieurement moyennables.*

(iii) Γ *possède un sous-groupe libre non abélien* $\mathbf{F}$ *tel que le centralisateur* $I_g = \{f \in \mathbf{F} \mid gf = fg\}$ *est abélien pour tout* $g \in \Gamma$ *avec* $g \neq 1$.

Preuve. Supposons la condition (i) vérifiée et considérons la représentation β de Γ dans $l^2(\Gamma)\Theta\mathbf{C}\delta$: elle ne contient pas fortement ε, car Γ est CCI; elle ne contient donc pas non plus faiblement ε, car Γ a la propriété T. On a donc la négation de la condition (R) du théorème 1.

Pour (ii), montrons la contraposée, et supposons donc qu'il existe une moyenne intérieurement invariante μ sur $\Gamma - \{1\}$. Si le support de μ rencontre $\Gamma' - \{1\}$, le groupe Γ' est intérieurement moyennable. Sinon, on définit une moyenne intérieurement invariante μ'' sur Γ'' en posant $\mu''(S) = \mu(\pi^{-1}(S))$ pour tout $S \subset \Gamma''$, où π désigne la surjection de Γ sur Γ''.

Pour (iii), nous renvoyons à l'exemple 2 de la section 5 dans [HaS]. □

La suffisance de (i) est due à Connes, Akemann et Walter [AW]; c'est aussi un cas particulier du théorème 2 de [LR]. La suffisance de (iii) est due à Akemann; elle est utilisée pour l'exemple 5 de [Ak], qui est un produit semi-direct de $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ et d'un groupe libre non abélien sur deux générateurs. (C'est un exemple de groupe non intérieurement moyennable dont la C^*-algèbre réduite n'est pas simple et possède plusieurs traces; pour d'autres exemples, voir le théorème 4 de [CC], et le produit semi-direct de $\mathbf{Z}^3$ et $SL(3, \mathbf{Z})$ considéré ci-dessous. Notons encore que tout groupe moyennable non trivial est intérieurement moyennable avec C^*-algèbre réduite non simple; enfin, les groupes du § 3 ci-dessous sont non intérieurement moyennables et ont des C^*-algèbres réduites simples à trace unique. La réponse à la question (1) de la section 2 de [Ha] est donc aussi négative que possible.)

EXEMPLES AVEC PRODUITS SEMI-DIRECTS

On considère un produit semi-direct Γ donné sous la forme d'une extension scindée

$$1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1 \, .$$

Lorsque le produit est direct, les corollaires 2 et 3 montrent que Γ est intérieurement moyennable si et seulement si l'un au moins des groupes Γ', Γ'' l'est. La situation pour les produits semi-directs est différente.

Pour tout $n \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$, notons $\mathbf{F}_n$ le groupe non abélien libre à n générateurs. Ce groupe n'est pas intérieurement moyennable. (C'est le lemme 6.2.2 de [MvN]; voir aussi la section 5 de [HaS] et le § 3 ci-dessous.) Soit $\pi : \mathbf{F}_2 \to \mathbf{Z}$ une surjection. Son noyau est isomorphe à $\mathbf{F}_\infty$, d'où un produit semi-direct

$$1 \to \mathbf{F}_\infty \to \mathbf{F}_2 \to \mathbf{Z} \to 1 \qquad \text{(A)}$$

avec $\Gamma' = \mathbf{F}_\infty$ et $\Gamma = \mathbf{F}_2$ non intérieurement moyennables, bien que $\Gamma'' = \mathbf{Z}$ soit moyennable.

Nous avons déjà fait allusion à un produit semi-direct de $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ et $\mathbf{F}_2$ pour lequel Γ' est moyennable alors que Γ et Γ'' ne sont pas intérieurement moyennables. Avant de décrire un second exemple, montrons:

LEMME 4. *Les produits semi-directs*

$$G = SL(3, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^3 \quad \textit{et} \quad \Gamma = SL(3, \mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^3$$

possèdent la propriété T de Kazhdan.

Preuve. Soit $\rho: G \to U(H)$ une représentation unitaire contenant faiblement la représentation triviale $\varepsilon: G \to U(\mathbf{C}) = \mathbf{S}^1$. Alors la restriction π de ρ à $SL(3, \mathbf{R})$ contient faiblement la représentation triviale de $SL(3, \mathbf{R})$. Ce groupe possédant la propriété T [DK], il existe un vecteur unité $\xi \in H$ avec $\pi(h)\xi = \xi$ pour tout $h \in SL(3, \mathbf{R})$. Notons $f: G \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $f(g) = (\rho(g)\xi \mid \xi)$, qui vaut 1 sur $SL(3, \mathbf{R})$. On a $f(hgh^{-1}) = f(g)$ pour tout $h \in SL(3, \mathbf{R})$ et pour tout $g \in G$. Comme l'action de $SL(3, \mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^3$ possède un orbite dense (le complémentaire de l'origine), il en résulte que f est constante sur G, donc que ρ contient fortement ε. Ainsi G possède la propriété T.

Comme Γ est de covolume fini dans G, il possède aussi la propriété T. $\square$

Le lemme 4 fournit un nouvel exemple de produit semi-direct

$$1 \to \mathbf{Z}^3 \to SL(3, \mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^3 \to SL(3, \mathbf{Z}) \to 1 \qquad \text{(B)}$$

avec noyau moyennable et les deux autres groupes non intérieurement moyennables.

En posant enfin

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \mathbf{F}_\infty \times \mathbf{Z}^3, \\ \Gamma &= \mathbf{F}_2 \times \left(SL(3, \mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^3\right), \\ \Gamma'' &= \mathbf{Z} \times SL(3, \mathbf{Z}), \end{aligned}$$

on obtient par produit direct à partir de (A) et (B) une extension scindée

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \Gamma' \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & \Gamma'' \arrow[r] \arrow[l, bend left] & 1 \end{tikzcd}$$

où Γ' et Γ'' sont intérieurement moyennables et où Γ ne l'est pas. On trouve d'autres résultats sur la moyennabilité intérieure des produits semi-directs dans [Ch2].

Soit Γ' un sous-groupe d'indice fini d'un groupe Γ. Quelles sont les relations entre la moyennabilité intérieure de Γ' et celle de Γ? (Voir ajout.)

§ 3. Exemples de groupes non intérieurement moyennables

Le corollaire 3 (i) fournit à volonté des groupes non intérieurement moyennables qui apparaissent naturellement en géométrie.

En effet, soit G un groupe de Lie réel connexe semi-simple à centre trivial dont chaque composante simple est de rang réel au moins 2, et soit Γ