

3. Paradoxes relatifs à une -algèbre

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$X - R, \gamma(X - R), \dots, \gamma^{N-1}(X - R), \gamma^N(X)$ sont disjoints deux à deux. Posons $\gamma' = \gamma^N$, et soit γ'' la bijection de source X qui coïncide avec $\gamma^{j-1}(\delta_j)^{-1}$ sur T_j pour $j = 1, \dots, N$. Comme les buts de γ' et γ'' sont disjoints, \mathfrak{G} est faiblement paradoxal. \square

Soient r et p des entiers avec $r \geq p \geq 1$. Comme nous l'avons déjà affirmé, il résulte de la proposition 3 que, si \mathfrak{G}_p est faiblement paradoxal, alors \mathfrak{G}_r l'est aussi. Plus généralement, soit \mathfrak{G} un pseudogroupe de transformations de (X, \mathfrak{B}) et soit $U \in \mathfrak{B}$ une grande partie de X ; si \mathfrak{G}_U est faiblement paradoxal, alors \mathfrak{G} l'est aussi.

3. PARADOXES RELATIFS À UNE σ -ALGÈBRE

Un pseudogroupe \mathfrak{G} de transformations de (X, \mathfrak{B}) , comme à la section 2, est dit *fortement paradoxal* s'il existe X_1, X_2 avec $X = X_1 \coprod X_2$ et $X_j \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$ ($j=1, 2$), ce que nous abrégeons par $2X \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$.

PROPOSITION 4. *On suppose que \mathfrak{B} est une σ -algèbre. Alors \mathfrak{G} est faiblement paradoxal si et seulement si \mathfrak{G} est fortement paradoxal.*

Insistons sur le fait que \mathfrak{G} est bien un pseudogroupe au sens précédent: la condition v) de la section 1 concerne toujours des recollements finis, même si \mathfrak{B} est stable par réunions infinies dénombrables.

LEMME 5. *S'il existe $T, T' \in \mathfrak{B}$ avec $T \cap T' = \emptyset$ et $\gamma: X \rightarrow T$ dans \mathfrak{G} , alors il existe $\gamma'': X \rightarrow X - T'$ dans \mathfrak{G} .*

Preuve. Posons $U = \bigcup_{k \geq 0} \gamma^k(T')$, de sorte que $\gamma(U) = U - T'$. On définit $\gamma'' \in \mathfrak{G}$ de source X par $\gamma'x = x$ si $x \in X - U$ et $\gamma''x = \gamma x$ si $x \in U$. Le but de γ'' est $(X - U) \cup \gamma(U) = X - T'$. \square

Preuve de la proposition. Supposons \mathfrak{G} faiblement paradoxal: il existe deux éléments $\gamma: X \rightarrow T$ et $\gamma': X \rightarrow T'$ de \mathfrak{G} avec $T \cap T' = \emptyset$. Alors γ' et l'élément γ'' du lemme 5 sont des bijections dans \mathfrak{G} ayant X pour source et dont les buts forment une partition de X . \square

Lorsque \mathfrak{B} est une σ -algèbre, on peut donc dire sans ambiguïté que \mathfrak{G} est *paradoxal* s'il l'est faiblement ou/et fortement. La condition ii) du théorème 1 peut s'écrire: \mathfrak{G}_p est paradoxal pour p assez grand.

REMARQUE 6. *Le lemme 5 est équivalent à l'énoncé suivant, plus classique, du type Cantor-Bernstein:*

S'il existe $\delta: S \rightarrow R$ et $\delta': S' \rightarrow R'$ dans \mathfrak{G} avec $R \subset S'$ et $R' \subset S$, alors $S' \equiv S \pmod{\mathfrak{G}}$.

Preuve. Posons $\gamma = \delta'\delta: S \rightarrow T$ et $T' = S - R'$; on a $T \subset R' \subset S$. Par le lemme 5 (appliqué dans S), il existe dans \mathfrak{G} un élément $\gamma'': S \rightarrow R'$. Par suite $(\delta')^{-1}\gamma'': S \rightarrow S'$ est une équivalence dans \mathfrak{G} . \square

COROLLAIRE 7. *On suppose que \mathfrak{B} est une σ -algèbre. Soient $U, V, U', V' \in \mathfrak{B}$ des grandes parties avec $U \subset U'$ et $V \subset V'$. Si \mathfrak{G}_U et \mathfrak{G}_V sont paradoxaux, alors $U' \equiv V' \pmod{\mathfrak{G}}$.*

Preuve. Il suffit de montrer que $U' \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$. Comme U est grand, il existe un entier N et une bijection $\alpha: X \times \{1\} \rightarrow U_1$ dans \mathfrak{G}_N avec $U_1 \subset U \times I_N$. Comme \mathfrak{G}_U est paradoxal, il existe $\beta: U \times I_N \rightarrow U \times \{1\}$ dans \mathfrak{G}_N . La composition de α et β fournit une bijection $\gamma: X \rightarrow T$ de \mathfrak{G} avec $T \subset U \subset U'$. On conclut en utilisant le lemme 5 (avec $T' = X - U'$). \square

Notons que nous aurions pu formuler ce corollaire sans introduire U et V , car U est grand dans U' , et par suite $\mathfrak{G}_{U'}$ est paradoxal vu la dernière remarque de la section 2. Mais l'énoncé choisi correspond mieux à l'utilisation en vue, pour l'exemple 3 de la section 5.

4. PARADOXES RELATIFS À L'ALGÈBRE DE TOUTES LES PARTIES

On se donne un ensemble X et un pseudogroupe \mathfrak{G} de transformations de X , ou plus précisément de $(X, \mathfrak{P}(X))$. L'outil nouveau est un lemme de Kuratowski [K].

LEMME 8. *On se donne un ensemble X , deux partitions $X = S \coprod T = U \coprod V$, ainsi que deux bijections $\varphi: S \rightarrow T$ et $\psi: U \rightarrow V$. Alors il existe deux partitions*