Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN RÉSULTAT DE TARSKI SUR LES ACTIONS MOYENNABLES DE GROUPES ET LES PARTITIONS PARADOXALES

Autor: de la Harpe, Pierre / Skandalis, Georges

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55082

L'Enseignement Mathématique, t. 32 (1986), p. 121-138

UN RÉSULTAT DE TARSKI SUR LES ACTIONS MOYENNABLES DE GROUPES ET LES PARTITIONS PARADOXALES

par Pierre DE LA HARPE et Georges SKANDALIS

Soit G un groupe agissant sur un ensemble non vide X. Une *translation par morceaux* associée à cette action est une bijection $\gamma: S \to T$ où S et T sont des parties de X, telle qu'il existe une partie finie $\{g_1, ..., g_k\}$ de G avec $\gamma x \in \{g_1 x, ..., g_k x\}$ pour tout $x \in S$. Nous notons $\mathfrak{G}$ l'ensemble de ces translations par morceaux: c'est un *pseudogroupe* au sens défini plus bas. On appelle *partition paradoxale* du G-ensemble X la donnée d'une partition $X = X_1 \coprod X_2$ et de bijections $\gamma_j: X \to X_j$ appartenant au pseudogroupe $(j=1, 2)$. (Le signe $\coprod$ indique une réunion disjointe.) On appelle *moyenne invariante* sur le G-ensemble X une fonction $\mu: \mathfrak{P}(X) \to [0, 1]$ définie sur l'ensemble des parties de X et satisfaisant

$$\begin{aligned} &\mu(X) = 1\,, && \\ &\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T) \quad && \text{pour} \quad S, T \subset X \text{ avec } S \cap T = \emptyset\,, \\ &\mu(gS) = \mu(S) && \text{pour} \quad g \in G \text{ et } S \subset X\,. \end{aligned}$$

C'est l'évidence même qu'il ne peut exister à la fois une décomposition paradoxale de X et une moyenne invariante sur X. Mais on a plus précisément une alternative, ce qui est le résultat principal exposé dans ce travail.

THÉORÈME I. *Si le G-espace X ne possède pas de moyenne invariante, alors il admet une partition paradoxale.*

Particularisons à l'exemple où G agit sur $X = G$ par multiplication à gauche; dans ce cas, s'il existe une moyenne invariante, on dit que G est *moyennable.*

COROLLAIRE II. *Pour qu'un groupe G soit non moyennable, il faut et il suffit qu'il admette une partition paradoxale, c'est-à-dire qu'il existe*

$g_1, \ldots, g_k, g'_1, \ldots, g'_l \in G$ *et* $S_1, \ldots, S_k, S'_1, \ldots, S'_l \subset G$ *avec*

$$G = \coprod_{1 \leqslant i \leqslant k} S_i = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant l} S'_j = \Big(\coprod_{1 \leqslant i \leqslant k} g_i S_i \Big) \coprod \Big(\coprod_{1 \leqslant j \leqslant l} g'_j S'_j \Big).$$

Au vocabulaire près, le théorème apparaît avec le numéro 16.12 (ii) dans un livre mal connu de A. Tarski [T], reprenant des articles bien antérieurs (1929 et 1938, cités dans [T]). Mais nous avons trouvé difficile d'isoler dans [T] les idées essentielles pour la preuve. C'est ce qui nous a engagé à proposer ici une preuve du théorème I et de quelques variantes. Notre seul mérite éventuel est d'avoir rassemblé des arguments éparpillés dans la littérature, mais aucun de ceux-ci n'est original. Les ingrédients que nous utilisons sont

a) une invocation du théorème de Hahn-Banach (voir ci-dessous le théorème 1),

b) un lemme essentiel de Kuratowski (lemme 8),

c) des manipulations à la Cantor-Bernstein (lemme 5).

De c) et de l'existence de sous-groupes libres non abéliens dans le groupe $SO(3)$ des rotations de l'espace usuel (voir le supplément au § XI de [Hf]), on déduit facilement un second résultat (voir l'exemple 3 de notre section 5, ou l'agréable exposition [DE]). C'est un énoncé spectaculaire du *paradoxe de Hausdorff, Banach et Tarski:*

THÉORÈME III. *Etant donnés dans l'espace euclidien* $\mathbf{R}^3$ *une pomme* U *et la lune* V, *il existe un entier* n, *des partitions* $U = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant n} U_j$ *et* $V = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant n} V_j$, *et des déplacements euclidiens* $g_1, \ldots, g_n$ *de* $\mathbf{R}^3$ *avec* $g(U_j) = V_j$ *pour* $j = 1, \ldots, n$.

Nous voulons insister sur le fait suivant, concernant la partie non banale du corollaire II, à savoir qu'un groupe non moyennable admet une partition paradoxale: la preuve dans le cas particulier où G contient un sous-groupe libre non abélien résulte d'une très simple observation, mais la seule preuve que nous connaissons dans le cas général nécessite les trois ingrédients a), b), c) évoqués plus haut.

* * *

Plutôt que de nous restreindre d'entrée aux moyennes définies sur $\mathfrak{P}(X)$, nous préférons considérer d'abord X comme fourni avec une *algèbre* $\mathfrak{B}$ de parties de X (une algèbre est stable par réunions finies et par passage au complémentaire, et contient X). De plus, il est avantageux de considérer à priori un *pseudogroupe* $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$, comme défini dans la section 1. Le formalisme des pseudogroupes permet d'importantes simplifications d'écriture. Son avantage se voit aussi dans l'étude des sous-espaces (section 5): un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$ définit en effet canoniquement un pseudogroupe $\mathfrak{G}_U$ de transformations de $(U, \mathfrak{B}_U)$ avec

$$\mathfrak{G}_U = \{\gamma \in \mathfrak{G} \mid \gamma : S \to T \text{ avec } S \subset U \text{ et } T \subset U\}$$

et

$$\mathfrak{B}_U = \{S \in \mathfrak{B} \mid S \subset U\}.$$

Après une section consacrée aux définitions et aux notations, les trois sections suivantes étudient successivement les cas où

2) $\mathfrak{B}$ est une algèbre,

3) $\mathfrak{B}$ est une σ-algèbre,

4) $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}(X)$.

Pour le dernier cas, le théorème 11 résume une partie des résultats obtenus. La section 5 décrit quelques exemples classiques.

Nous remercions E. Bédos qui nous a signalé le livre de Tarski, P. L. Aubert la thèse de Sherman sur la moyennabilité des groupes [Sh] et J. Berney d'autres précisions bibliographiques. Nous renvoyons à [BH] pour l'intérêt du théorème I relativement à la notion de *moyennabilité intérieure* pour un groupe discret.

1. Définitions et notations

On se donne un ensemble non vide X et une algèbre $\mathfrak{B}$ de parties de X.

Un *pseudogroupe* $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$ est un ensemble de bijections $\gamma : S \to T$, où $S, T \in \mathfrak{B}$, qui satisfait

i) l'identité $X \to X$ est dans $\mathfrak{G}$;

ii) si $\gamma : S \to T$ est dans $\mathfrak{G}$, l'inverse $\gamma^{-1} : T \to S$ l'est aussi;

iii) si $\gamma : S \to T$ et $\delta : T \to U$ sont dans $\mathfrak{G}$, le composé $\delta\gamma : S \to U$ est dans $\mathfrak{G}$;

iv) si $\gamma : S \to T$ est dans $\mathfrak{G}$ et si $S' \in \mathfrak{B}$ est contenu dans S, la restriction de γ à S' est dans $\mathfrak{G}$;

v) soient $S, T \in \mathfrak{B}$ et $\varphi : S \to T$ une bijection; s'il existe une partition *finie* $S = \coprod S_j$ avec $S_j \in \mathfrak{B}$, telle que chaque restriction $\varphi \mid S_j$ soit dans $\mathfrak{G}$, alors $\varphi \in \mathfrak{G}$.

La condition iv) exprime que $\mathfrak{G}$ est stable par *localisation* et v) par *recollement fini.* La donnée de $\mathfrak{G}$ contient celle de $\mathfrak{B}$ vu les conditions i) et iv).

Deux parties $S, T \in \mathfrak{B}$ sont *équivalentes* modulo $\mathfrak{G}$, ce qu'on note $S \equiv T \pmod{\mathfrak{G}}$, s'il existe dans $\mathfrak{G}$ une bijection de source S et de but T. Une partie $S \in \mathfrak{B}$ est *grande* s'il existe $T_1, \ldots, T_N \in \mathfrak{B}$, chaque T_j étant équivalent à une partie de S, avec $X = \cup T_j$; on obtiendrait la même définition (vu la propriété iv)) en exigeant de plus que les T_j soient disjoints deux à deux. (La partie S est grande si et seulement si X est S-borné au sens de [R1], [R2].) Nous disons que le pseudogroupe $\mathfrak{G}$ est *faiblement paradoxal* s'il existe dans $\mathfrak{G}$ deux bijections ayant X pour source qui sont de buts disjoints, ce que nous abrégeons par

$$2X \leqslant X \pmod{\mathfrak{G}}.$$

Nous disons aussi, parfois et abusivement, que l'espace $(X, \mathfrak{B})$ est faiblement paradoxal.

Pour tout entier $p \geqslant 1$, on note I_p l'ensemble $\{1, \ldots, p\}$ et $\mathfrak{C}_p$ le pseudogroupe de toutes les bijections entre sous-ensembles de I_p. On note X_p le produit direct $X \times I_p$, qu'on munit de l'algèbre produit $\mathfrak{B}_p = \mathfrak{B} \times \mathfrak{P}(I_p)$. Si $\mathfrak{G}$ est comme ci-dessus, le produit direct $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G} \times \mathfrak{C}_p$ est le pseudogroupe de transformations de $(X_p, \mathfrak{B}_p)$ engendré par les bijections

$$\begin{cases} S \times \{q\} \to T \times \{r\} \\ (x, q) \mapsto (\gamma x, r) \end{cases}$$

où $\gamma : S \to T$ est dans $\mathfrak{G}$ et où q, r sont dans I_p. Nous disons que $\mathfrak{G}$ est *virtuellement paradoxal* s'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $\mathfrak{G}_p$ soit faiblement paradoxal. Notons ceci: lorsque $r \geqslant p$, on a $I_r \supset I_p$, et $(X_p, \mathfrak{B}_p)$ est un sous-espace de $(X_r, \mathfrak{B}_r)$ sur lequel $\mathfrak{G}_r$ induit précisément $\mathfrak{G}_p$. On vérifie plus bas que, si $\mathfrak{G}_p$ est faiblement paradoxal, alors il en est de même de $\mathfrak{G}_r$ pour tout $r \geqslant p$ (voir la remarque qui suit la proposition 3).

Le pseudogroupe $\mathfrak{G}$ est *moyennable* s'il existe une *moyenne $\mathfrak{G}$-invariante* sur $(X, \mathfrak{B})$, c'est-à-dire une application $\mu : \mathfrak{B} \to [0, 1]$ telle que

$$\mu(X) = 1,$$
$$\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T) \quad \text{pour} \quad S, T \in \mathfrak{B} \text{ avec } S \cap T = \emptyset,$$
$$\mu(T) = \mu(S) \quad \text{s'il existe } \gamma: S \to T \text{ dans } \mathfrak{G}.$$

Nous désignons par $l^\infty(X)$ l'espace de Banach des fonctions bornées à valeurs réelles sur X avec la norme de la convergence uniforme, et par $l^\infty(X, \mathfrak{B})$ l'adhérence dans $l^\infty(X)$ du sous-espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques des éléments de $\mathfrak{B}$. Alors $\mathfrak{G}$ est moyennable si et seulement s'il existe une forme linéaire positive normalisée $\mathfrak{G}$-invariante sur $l^\infty(X, \mathfrak{B})$, forme que nous notons aussi μ. (Rappel de vocabulaire: μ est positive si $\mu(f) \geqslant 0$ pour tout $f \in l^\infty(X, \mathfrak{B})$ à valeurs positives ou nulles, μ est normalisée si μ prend la valeur 1 sur la fonction constante de valeur 1, et μ est $\mathfrak{G}$-invariante si $\mu(f\gamma) = \mu(f)$ pour tout $\gamma: S \to T$ dans $\mathfrak{G}$ et pour tout $f \in l^\infty(X, \mathfrak{B})$ à support dans T.) Pour l'équivalence entre les deux définitions de moyennabilité, voir le théorème 20.30 de [HS].

Etant donné un entier $p \geqslant 1$, on laisse au lecteur le soin de vérifier que $\mathfrak{G}$ est moyennable si et seulement si $\mathfrak{G}_p$ l'est. Plus généralement, si $\mathfrak{G}$ agit sur $(X, \mathfrak{B})$ et si $U \in \mathfrak{B}$ est une grande partie de X, alors $\mathfrak{G}$ est moyennable si et seulement si $\mathfrak{G}_U$ est moyennable. (Voir aussi la proposition 12.)

2. Paradoxes relatifs à une algèbre

On considère à nouveau un ensemble non vide X, une algèbre $\mathfrak{B}$ de parties de X, et un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$.

Théorème 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\mathfrak{G}$ *n'est pas moyennable;*

ii) $\mathfrak{G}$ *est virtuellement paradoxal.*

Preuve. S'il existe un entier $p \geqslant 1$ avec $\mathfrak{G}_p$ faiblement paradoxal, il est évident que $\mathfrak{G}_p$ n'est pas moyennable, et par suite $\mathfrak{G}$ n'est pas moyennable; donc ii) implique i).

Notons $d^\infty(X, \mathfrak{B})$ le sous-espace vectoriel de $l^\infty(X, \mathfrak{B})$ engendré par les différences $\chi - \chi\gamma$, avec $\gamma: S \to T$ dans $\mathfrak{G}$ et χ la fonction caractéristique de T. Notons C le cône convexe ouvert de $l^\infty(X, \mathfrak{B})$ formé des fonctions f

pour lesquelles $\inf_{x \in X} f(x) > 0$. Une moyenne $\mathfrak{G}$-invariante sur $(X, \mathfrak{B})$ est une forme linéaire continue μ sur $l^\infty(X, \mathfrak{B})$, telle que la restriction $\mu \mid d^\infty(X, \mathfrak{B})$ soit nulle et telle que la restriction $\mu \mid C$ soit à valeurs strictement positives. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, on en déduit que la condition i) est équivalente à $d^\infty(X, \mathfrak{B}) \cap C \neq \emptyset$. On suppose donc que $d^\infty(X, \mathfrak{B})$ rencontre C, et il s'agit de montrer que $\mathfrak{G}_p$ est faiblement paradoxal pour p assez grand.

Comme C est ouvert, il existe des éléments $\gamma_j : S_j \to T_j$ dans $\mathfrak{G}$ et des nombres rationnels n_j tels que la fonction

$$\sum_{j=1}^{m-1} n_j(\chi_j - \chi_j \gamma_j)$$

soit dans C, où χ_j désigne la fonction caractéristique de T_j. En remplaçant quand il le faut γ_j par γ_j^{-1}, on peut rendre chaque n_j positif. Quitte à multiplier la fonction par un entier convenable, on peut aussi supposer les n_j entiers et la fonction minorée par la constante 1. En répétant les γ_j, on peut enfin supposer tous les n_j égaux à 1. On a donc

$$1 + \sum_{j=1}^{n-1} \chi_j \gamma_j \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \chi_j$$

pour un entier n convenable. Notons $\chi'_j = 1 - \chi_j \gamma_j$ la fonction caractéristique de $X - S_j$ et ajoutons les χ'_j à l'inégalité précédente; comme $\chi_j \leqslant 1$ et $\chi'_j \leqslant 1$ on obtient

$$n \leqslant f = \sum_{j=1}^{n-1} (\chi_j + \chi'_j) \leqslant 2n - 2\,.$$

On définit encore

$$R_f = \{(x, q) \in X_{2n-2} \mid q \leqslant f(x)\}$$

qui est dans $\mathfrak{B}_{2n-2}$ car c'est le sous-graphe de la fonction $\mathfrak{B}$-mesurable f, et on note $\pi_2 : R_f \to X$ la projection canonique. L'inégalité $n \leqslant f$ implique $X_n \subset R_f$.

Soit $\Phi : X_{n-1} \to X_{2n-2}$ l'application injective définie par

$$\Phi(x, j) = (\gamma_j x, 2j-1) \quad \text{si} \quad x \in S_j \quad \text{et} \quad \Phi(x, j) = (x, 2j) \quad \text{si} \quad x \notin S_j\,.$$

Notons U l'image de Φ et $\pi_1 : U \to X$ la projection canonique. Pour tout $y \in X$, le cardinal de $\pi_1^{-1}(y)$ est précisément $f(y)$. Vu le lemme qui suit, il existe $\Psi \in \mathfrak{G}_{2n-2}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & & X_n \arrow[d, phantom, "\cap"] & \\
X_{2n-2} \arrow[r, phantom, "\supset"] & X_{n-1} \arrow[r, "\Phi"] & U \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & R_f \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dl, "\pi_2"] & X_{2n-2} \\
 & & X & &
\end{tikzcd}$$

commute.

Soit γ la restriction à X_n de $\Phi^{-1}\Psi^{-1}$, qui est dans $\mathfrak{G}_n$. Soit $\gamma_1 \in \mathfrak{G}_n$ l'itéré γ^n de γ; on a $\gamma(X_n) \subset X_{n-1}$, de sorte que les ensembles $X_n - X_{n-1}$, $\gamma(X_n - X_{n-1}), ..., \gamma^{n-1}(X_n - X_{n-1}), \gamma^n(X_n)$, sont disjoints. Définissons $\gamma_2 \in \mathfrak{G}_n$ par $\gamma_2(x, q) = \gamma^{q-1}(x, n)$. Alors γ_1 et γ_2 ont des buts disjoints, et $\mathfrak{G}_n$ est bien faiblement paradoxal. □

L'existence de $\Psi \in \mathfrak{G}_{2n-2}$ invoquée dans la preuve se justifie comme suit:

LEMME 2. *On considère un entier* $p \geqslant 1$ *et deux parties* U_1, U_2 *de* X_p, *dans* $\mathfrak{B}_p$. *On note* $\pi_j\colon U_j \to X$ *la restriction à* U_j *de la projection canonique* $X_p = X \times I_p \to X (j=1, 2)$, *et on note* $\mathfrak{C}_p$ *le pseudogroupe de transformations de* $(X_p, \mathfrak{B}_p)$ *engendré par les applications* $\mathrm{id}_X \times \sigma$ *où* σ *est une bijection de* I_p.

Si les cardinaux de $\pi_1^{-1}(x)$ *et* $\pi_2^{-1}(x)$ *sont égaux pour tout* $x \in X$, *alors il existe* $\Psi \in \mathfrak{C}_p$ *tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & U_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\
X &
\end{tikzcd}$$

commute.

Preuve. Il suffit de montrer le lemme lorsque U_2 est tel que $(x, q) \in U_2$ implique $(x, t) \in U_2$ pour $t = 1, 2, ..., q$ (cas d'un sous-graphe). Toute bijection $U_1 \to U_2$ faisant commuter le diagramme peut s'écrire $(x, q) \mapsto (x, r(x, q))$. Il en existe une, unique, pour laquelle toutes les fonctions $q \mapsto r(x, q)$ sont croissantes, x étant dans l'image de π_1; on la note Ψ.

Pour tout $t \in \{1, ..., p\}$, l'ensemble $S_t = \{x \in X \mid (x, t) \in U_1\}$ est dans $\mathfrak{B}$, donc sa fonction caractéristique χ_t est $\mathfrak{B}$-mesurable. Comme $r(x, q) = \sum_{1 \leqslant t \leqslant q} \chi_t(x)$, la fonction r est $\mathfrak{B}_p$-mesurable. Par suite l'application Ψ est $\mathfrak{B}_p$-mesurable.

Etant donnés $q, s \in I_p$, l'ensemble

$$A_{q,s} = \{x \in X \mid (x, q) \in U_1 \text{ et } \Psi(x, q) = (x, s)\}$$

est donc dans $\mathfrak{B}$. Si $x \in A_{q,s}$, alors $\Psi(x, q) = (x, s)$. Ceci étant vrai pour toute paire (q, s), il en résulte que $\Psi \in \mathfrak{C}_p$. □

Le critère suivant peut faciliter la vérification qu'un pseudogroupe donné est faiblement (ou virtuellement) paradoxal. Il est du même type que, par exemple, le théorème 2.7 de [Sh].

PROPOSITION 3. *Si* $\mathfrak{G}$ *est un pseudogroupe de transformations d'un espace* $(X, \mathfrak{B})$, *les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\mathfrak{G}$ *est faiblement paradoxal.*

ii) *Il existe un entier* $n \geq 2$ *et des parties* $S_1, \dots, S_{n-1}, S_n, T_1, \dots, T_{n-1}$ *dans* $\mathfrak{B}$ *avec*
   — *les* S_j *sont disjoints deux à deux*
   — S_n *est grand*
   — T_k *est équivalent à une partie de* $S_k (k=1, \dots, n-1)$
   — $\left(\coprod_{1 \leq j \leq n} S_j \right) \subset \left(\bigcup_{1 \leq k \leq n-1} T_k \right)$.

iii) *Il existe* $\gamma: X \to R$ *dans* $\mathfrak{G}$ *tel que* $X - R$ *soit grand.*

Preuve. L'implication i) ⇒ ii) est banale (avec $n=2$, $T=X$ et S_1, S_2 les buts des bijections de la définition).

Si ii) est vrai, on peut supposer de plus les T_k disjoints deux à deux: sinon, on considère

$$T'_1 = T_1, T'_2 = T_2 - T_1, \dots, T'_{n-1} = T_{n-1} - (T_1 \cup \dots \cup T_{n-2}).$$

Supposons la condition ii) vérifiée, avec les T_k disjoints deux à deux. Posons $T = \bigcup_{1 \leq k \leq n-1} T_k$, et choisissons dans $\mathfrak{G}$ une bijection α de source T et de but $S' \subset \bigcup_{1 \leq j \leq n-1} S_j$, obtenue en recollant des éléments $T_j \to S'_j \subset S_j$. Posons $R = S' \cup (X - T)$, et notons $\gamma: X \to R$ la bijection qui coïncide avec α sur T et avec l'identité sur $X - T$. La condition iii) est vérifiée, car $X - R$ contient la grande partie S_n.

Supposons enfin la condition iii) vérifiée. Comme $X - R$ est grand, il existe dans $\mathfrak{G}$ des éléments $\delta_j: S_j \to T_j$ avec $S_j \subset X - R$ et les T_j disjoints deux à deux ($j=1, \dots, N$), tels que $X = \coprod_{1 \leq j \leq N} T_j$. Les ensembles

$X - R, \gamma(X-R), ..., \gamma^{N-1}(X-R), \gamma^N(X)$ sont disjoints deux à deux. Posons $\gamma' = \gamma^N$, et soit γ'' la bijection de source X qui coïncide avec $\gamma^{j-1}(\delta_j)^{-1}$ sur T_j pour $j = 1, ..., N$. Comme les buts de γ' et γ'' sont disjoints, $\mathfrak{G}$ est faiblement paradoxal. □

Soient r et p des entiers avec $r \geqslant p \geqslant 1$. Comme nous l'avons déjà affirmé, il résulte de la proposition 3 que, si $\mathfrak{G}_p$ est faiblement paradoxal, alors $\mathfrak{G}_r$ l'est aussi. Plus généralement, soit $\mathfrak{G}$ un pseudogroupe de transformations de $(X, \mathfrak{B})$ et soit $U \in \mathfrak{B}$ une grande partie de X; si $\mathfrak{G}_U$ est faiblement paradoxal, alors $\mathfrak{G}$ l'est aussi.

3. Paradoxes relatifs à une σ-algèbre

Un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$, comme à la section 2, est dit *fortement paradoxal* s'il existe X_1, X_2 avec $X = X_1 \coprod X_2$ et $X_j \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$ $(j=1, 2)$, ce que nous abrégeons par $2X \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$.

Proposition 4. *On suppose que $\mathfrak{B}$ est une σ-algèbre. Alors $\mathfrak{G}$ est faiblement paradoxal si et seulement si $\mathfrak{G}$ est fortement paradoxal.*

Insistons sur le fait que $\mathfrak{G}$ est bien un pseudogroupe au sens précédent: la condition v) de la section 1 concerne toujours des recollements finis, même si $\mathfrak{B}$ est stable par réunions infinies dénombrables.

Lemme 5. *S'il existe $T, T' \in \mathfrak{B}$ avec $T \cap T' = \emptyset$ et $\gamma: X \to T$ dans $\mathfrak{G}$, alors il existe $\gamma'': X \to X - T'$ dans $\mathfrak{G}$.*

Preuve. Posons $U = \bigcup_{k \geqslant 0} \gamma^k(T')$, de sorte que $\gamma(U) = U - T'$. On définit $\gamma'' \in \mathfrak{G}$ de source X par $\gamma'x = x$ si $x \in X - U$ et $\gamma''x = \gamma x$ si $x \in U$. Le but de γ'' est $(X-U) \cup \gamma(U) = X - T'$. □

Preuve de la proposition. Supposons $\mathfrak{G}$ faiblement paradoxal: il existe deux éléments $\gamma: X \to T$ et $\gamma': X \to T'$ de $\mathfrak{G}$ avec $T \cap T' = \emptyset$. Alors γ' et l'élément γ'' du lemme 5 sont des bijections dans $\mathfrak{G}$ ayant X pour source et dont les buts forment une partition de X. □

Lorsque $\mathfrak{B}$ est une σ-algèbre, on peut donc dire sans ambiguïté que $\mathfrak{G}$ est *paradoxal* s'il l'est faiblement ou/et fortement. La condition ii) du théorème 1 peut s'écrire: $\mathfrak{G}_p$ est paradoxal pour p assez grand.

REMARQUE 6. *Le lemme 5 est équivalent à l'énoncé suivant, plus classique, du type Cantor-Bernstein:*

S'il existe $\delta: S \to R$ *et* $\delta': S' \to R'$ *dans* $\mathfrak{G}$ *avec* $R \subset S'$ *et* $R' \subset S$, *alors* $S' \equiv S \pmod{\mathfrak{G}}$.

Preuve. Posons $\gamma = \delta'\delta: S \to T$ et $T' = S - R'$; on a $T \subset R' \subset S$. Par le lemme 5 (appliqué dans S), il existe dans $\mathfrak{G}$ un élément $\gamma'': S \to R'$. Par suite $(\delta')^{-1}\gamma'': S \to S'$ est une équivalence dans $\mathfrak{G}$. □

COROLLAIRE 7. *On suppose que* $\mathfrak{B}$ *est une* σ*-algèbre. Soient* $U, V, U', V' \in \mathfrak{B}$ *des grandes parties avec* $U \subset U'$ *et* $V \subset V'$. *Si* $\mathfrak{G}_U$ *et* $\mathfrak{G}_V$ *sont paradoxaux, alors* $U' \equiv V' \pmod{\mathfrak{G}}$.

Preuve. Il suffit de montrer que $U' \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$. Comme U est grand, il existe un entier N et une bijection $\alpha: X \times \{1\} \to U_1$ dans $\mathfrak{G}_N$ avec $U_1 \subset U \times I_N$. Comme $\mathfrak{G}_U$ est paradoxal, il existe $\beta: U \times I_N \to U \times \{1\}$ dans $\mathfrak{G}_N$. La composition de α et β fournit une bijection $\gamma: X \to T$ de $\mathfrak{G}$ avec $T \subset U \subset U'$. On conclut en utilisant le lemme 5 (avec $T' = X - U'$). □

Notons que nous aurions pu formuler ce corollaire sans introduire U et V, car U est grand dans U', et par suite $\mathfrak{G}_{U'}$ est paradoxal vu la dernière remarque de la section 2. Mais l'énoncé choisi correspond mieux à l'utilisation en vue, pour l'exemple 3 de la section 5.

4. PARADOXES RELATIFS À L'ALGÈBRE DE TOUTES LES PARTIES

On se donne un ensemble X et un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de X, ou plus précisément de $(X, \mathfrak{P}(X))$. L'outil nouveau est un lemme de Kuratowski [K].

LEMME 8. *On se donne un ensemble* X, *deux partitions* $X = S \coprod T = U \coprod V$, *ainsi que deux bijections* $\varphi: S \to T$ *et* $\psi: U \to V$. *Alors il existe deux partitions*

$$S = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant 4} S_j, \quad V = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant 4} V_j,$$

avec

$$V_1 = S_1, \quad V_2 = \varphi(S_2), \quad V_3 = \psi(S_3), \quad V_4 = \psi\varphi(S_4).$$

Preuve. Considérons la bijection de X sur X qui coïncide avec φ sur S et avec φ^{-1} sur T; c'est une transformation de X sans point fixe et d'ordre 2, que nous notons encore φ. On étend de même ψ. Si $G = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) * (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ désigne le groupe diédral infini, φ et ψ définissent une action de G sur X.

Soit G_0 le sous-groupe de G engendré par $\psi\varphi$, qui est cyclique infini et normal dans G; soit $Y = X/G_0$ l'espace des orbites. Alors φ et ψ induisent sur Y la même transformation, que nous notons ρ et qui satisfait $\rho^2 = \mathrm{id}_Y$. Cette transformation est sans point fixe: sinon, il existerait $x \in X$ et $n \in \mathbf{Z}$ avec $\varphi(x) = (\psi\varphi)^n(x)$; or $\varphi(\psi\varphi)^n$ est conjugué soit à φ (si n est pair) soit à ψ (si n est impair), donc n'a pas de point fixe par hypothèse sur φ et ψ. Vu l'axiome du choix, il existe une partition $Y = Y' \coprod Y''$ telle que ρ échange Y' et Y''. Si $X = X' \coprod X''$ est la partition image inverse par la projection canonique $X \to Y$, alors X' et X'' sont échangés par φ et par ψ.

La bijection $\alpha : S \to X'$ définie par $\alpha(x) \in \{x, \varphi(x)\}$ montre que S et X' sont équivalents modulo le pseudogroupe engendré par φ, ce que nous écrivons $S \equiv X' \pmod{\varphi}$. De même $X' \equiv V \pmod{\psi}$. Par suite $S \equiv V \pmod{G}$. Plus précisément, on pose

$$S_1 = S \cap X' \cap V = V_1$$

$$\begin{aligned} S_2 &= S \cap X'' \cap \varphi(V) & V_2 &= T \cap X' \cap V \\ S_3 &= S \cap X' \cap U & V_3 &= \psi(S) \cap X'' \cap V \\ S_4 &= S \cap X'' \cap \varphi(U) & V_4 &= \psi(T) \cap X'' \cap V \end{aligned}$$

et on obtient l'affirmation du lemme. □

Remarques.

1) Le nombre 4 apparaissant dans le lemme 8 est le minimum possible [U].

2) La preuve ci-dessus est une variante de celle de Kuratowski. Le lemme résulte d'un travail de König datant de 1916; voir le § 5 de [Kö].

3) La preuve montre ceci: étant données deux actions sans point fixe du groupe à deux éléments sur X, il existe un domaine fondamental *commun*

$$X' = S_1 \cup \varphi(S_2) \cup S_3 \cup \varphi(S_4) = V_1 \cup V_2 \cup \psi^{-1}(V_3) \cup \psi^{-1}(V_4)$$

L'analogue mesurable de l'affirmation de la remarque 3 n'est pas correct, comme le montre l'exemple suivant.

On considère le cercle unité $\mathbf{S}^1$ du plan complexe et deux réflexions φ, ψ de $\mathbf{S}^1$ relatives à deux diamètres dont l'angle est un multiple irrationnel de π. Soit X l'espace $\mathbf{S}^1$ privé de l'ensemble dénombrable constitué par les points fixes des transformations $((\varphi\psi)^n\varphi)_{n\in\mathbf{Z}}$; on munit X de la σ-algèbre des ensembles mesurables au sens de Lebesgue. Il n'existe pas de sous-ensemble mesurable $X' \subset X$ qui soit un domaine fondamental pour $\{\mathrm{id}_X, \varphi\}$ et $\{\mathrm{id}_X, \psi\}$: en effet, un tel X' serait invariant par la transformation ergodique $\psi\varphi$, ce qui est absurde, car φ et ψ préservent la mesure de Lebesgue.

PROPOSITION 9. *Si* $\mathfrak{G}$ *est un pseudogroupe de transformations de* X *relatif à la* σ*-algèbre de toutes les parties, alors* $\mathfrak{G}$ *est virtuellement paradoxal si et seulement si* $\mathfrak{G}$ *est paradoxal.*

Preuve. On suppose $\mathfrak{G}$ virtuellement paradoxal, c'est-à-dire $\mathfrak{G}_p$ paradoxal pour un entier convenable p. En remplaçant au besoin p par un entier plus grand, on se ramène au cas d'une puissance de 2. Modulo une induction évidente, il suffit donc de considérer le cas $p = 2$.

L'hypothèse que X_2 est paradoxal signifie qu'il existe une partition $X_2 = U \coprod V$ avec $U \equiv X_2 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{G}_2)$ et $V \equiv X_2 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{G}_2)$. En posant $S = X \times \{1\}$ et $T = X \times \{2\}$, on obtient évidemment $X_2 = S \coprod T$ avec $S \equiv T \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{G}_2)$. Le lemme 8 montre que $S \equiv V \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{G}_2)$, donc que $X_2 \equiv X \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{G}_2)$. Cette dernière équivalence signifie précisément que X est paradoxal. □

Notons que notre proposition 9 résulte immédiatement du théorème 11 et du corollaire 12 de [BT].

COROLLAIRE 10. *Soit* $\mathfrak{G}$ *comme à la proposition 9. Si* $\mathfrak{G}$ *est paradoxal, deux grandes parties* S, S' *de* X *sont toujours équivalentes modulo* $\mathfrak{G}$.

Preuve. Vu le corollaire 7, il suffit de montrer que $\mathfrak{G}_S$ est paradoxal pour toute grande partie S de X.

Comme S est grand, il existe un entier N tel que $X \times \{1\}$ soit équivalent modulo $\mathfrak{G}_N$ à une partie de $S \times I_N = S_N$. Comme $\mathfrak{G}$ est paradoxal, $\mathfrak{G}_{S_N}$ l'est aussi (dernière remarque de la section 2); en d'autres termes, $\mathfrak{G}_S$ est virtuellement paradoxal. La proposition 9 montre que $\mathfrak{G}_S$ est paradoxal. □

On a donc:

THÉORÈME 11. *Soit* $\mathfrak{G}$ *un pseudogroupe de transformations d'un ensemble non vide* X, *relatif à l'algèbre* $\mathfrak{P}(X)$ *de toutes les parties de* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\mathfrak{G}$ *n'est pas moyennable.*

ii) *Il existe un entier* $n \geqslant 2$ *et des parties* $S_1, ..., S_{n-1}, S_n, T_1, ..., T_{n-1}$ *de* X *avec*
— *les* S_j *sont équivalents deux à deux,*
— S_n *est grand,*
— T_k *est équivalent à une partie de* $S_k (k=1, ..., n-1)$,
— $\left(\coprod_{1 \leqslant j \leqslant n} S_j\right) \subset \left(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n-1} T_k\right)$.

iii) $\mathfrak{G}$ *est (fortement) paradoxal: il existe une partition* $X = X_1 \coprod X_2$ *avec* $X_j \equiv X (\mathrm{mod}\ \mathfrak{G})$.

De plus, si ces conditions sont satisfaites, alors deux grandes parties quelconques de X *sont équivalentes modulo* $\mathfrak{G}$.

On connaît d'autres conditions équivalentes: voir par exemple [R1] pour des conditions à la Følner. Voir aussi le corollaire 3.5 de [R2]: toute action d'un groupe de génération finie et de croissance sous-exponentielle est moyennable.

5. UN DÉVELOPPEMENT ET QUELQUES EXEMPLES CLASSIQUES

Soit $\mathfrak{G}$ un pseudogroupe de transformations d'un espace $(X, \mathfrak{B})$ donné avec un sous-ensemble non vide $U \in \mathfrak{B}$. (Le cas étudié plus haut correspond à $U = X$.) Rappelons que nous notons $\mathfrak{G}_U$ le pseudogroupe de transformations de $(U, \mathfrak{B}_U)$ défini par $\mathfrak{G}$. On appelle *moyenne invariante* pour le système $(X, U, \mathfrak{B}, \mathfrak{G})$ une fonction $\mu : \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ telle que

$$\mu(U) = 1,$$

$$\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T) \quad \text{pour} \quad S, T \in \mathfrak{B} \text{ avec } S \cap T = \emptyset,$$

$$\mu(T) = \mu(S) \quad \text{s'il existe} \quad \gamma : S \to T \text{ dans } \mathfrak{G}.$$

La notion est due à von Neumann [vN].

Proposition 12. *On reprend les notations ci-dessus. Pour qu'il existe une moyenne invariante pour* $(X, U, \mathfrak{B}, \mathfrak{G})$, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{G}_U$ *soit moyennable.*

Preuve. Supposons qu'il existe une moyenne $\mu : \mathfrak{B}_U \to [0, 1]$ invariante par $\mathfrak{G}_U$. Soit $S \in \mathfrak{B}$; s'il existe une $\mathfrak{B}$-partition $S = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant n} S_j$, des sous-ensembles $U_1, \dots, U_n$ de U et des éléments $\gamma_j : S_j \to U_j$ dans $\mathfrak{G}$ pour $j = 1, \dots, n$, on pose $\mu_X(S) = \sum_{j=1}^{n} \mu(U_j)$; dans le cas contraire, on pose $\mu_X(S) = \infty$. On vérifie que $\mu_X : \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ est une moyenne invariante pour $(X, U, \mathfrak{B}, \mathfrak{G})$.

L'implication réciproque est (encore plus) banale. □

Avec les notations de la preuve, on peut remarquer que $\mu_X(X) < \infty$ si et seulement si la partie U est grande dans X.

Terminons en décrivant quelques exemples bien connus d'espaces paradoxaux.

Exemple 1 : groupes libres agissant librement

On considère le groupe libre non abélien $\mathbf{F}_2$ à deux générateurs a et b, qui agit sur lui-même par multiplication à gauche. Grâce à la proposition 3, on s'assure que l'espace obtenu est paradoxal (au sens faible) en considérant le sous-ensemble S de $\mathbf{F}_2$, constitué par les mots réduits de la forme $a^n w$ avec $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, w quelconque: en effet S, bS, $b^2 S$ sont disjoints deux à deux, et $S \cup aS = \mathbf{F}_2$.

On peut vérifier la paradoxalité forte sans l'aide de la proposition 4. Notons X_1 le sous-ensemble de $\mathbf{F}_2$ contenant les puissances a^n de a (où $n \in \mathbf{Z}$) et les mots réduits de la forme $a^n w$ avec $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, $w \neq \emptyset$. Le complémentaire X_2 de X_1 consiste en les mots réduits de la forme $b^n w$ avec $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, w quelconque. On peut définir (presque comme dans [C]) deux bijections $\varphi_j : \mathbf{F}_2 \to X_j (j=1, 2)$

$$\varphi_1(g) = \begin{cases} g & \text{si } g = a^n \text{ avec } n \in \mathbf{Z} \\ & \text{ou } g = a^n w \text{ avec } n > 0, \\ a^{-1} g & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$\varphi_2(g) = \begin{cases} g & \text{si } g = b^n w \text{ avec } n > 0, \\ & \\ b^{-1} g & \text{sinon}, \end{cases}$$

qui montrent que le $\mathbf{F}_2$-espace $\mathbf{F}_2$ est fortement paradoxal.

Il en résulte que le groupe $\mathbf{F}_2$ n'est pas moyennable.

Plus généralement, tout ensemble X sur lequel $\mathbf{F}_2$ agit librement est paradoxal (voir [vN], page 82). En effet, on peut choisir un domaine fondamental $T \subset X$ pour l'action, de sorte que X et $\mathbf{F}_2 \times T$ sont isomorphes en tant que $\mathbf{F}_2$-espaces (avec $\mathbf{F}_2$ agissant par multiplications à gauche sur le premier facteur de $\mathbf{F}_2 \times T$, et trivialement sur le second). Par suite, à tout paradoxe dans $\mathbf{F}_2$ constitué de bijections $\gamma_j\colon \mathbf{F}_2 \to T_j (j=1,2)$, on peut associer un paradoxe dans $\mathbf{F}_2 \times T$ constitué des bijections $\gamma_j \times \mathrm{id}_T (j=1,2)$.

Comme exemples d'actions libres de $\mathbf{F}_2$, citons:

1) La multiplication à gauche dans un sur-groupe de $\mathbf{F}_2$.
2) Les actions de $\mathbf{F}_2$ sur les sphères $\mathbf{S}^{2n+1} (n \geqslant 1)$ construites par Deligne et Sullivan [DS].

Exemple 2: groupes libres agissant avec isotropies abéliennes

Considérons d'abord l'action de $\mathbf{F}_2$ sur $\mathbf{F}_2 - \{1\}$ par automorphismes intérieurs. L'espace obtenu est paradoxal: en effet, si S est l'ensemble des mots réduits non vides de la forme $a^k w a^l$ avec $k, l \in \mathbf{Z}$ et $k, l \neq 0$, alors

1) $S \cup aSa^{-1} \cup a^{-1}Sa = \mathbf{F}_2 - \{1\}$,
2) $b^j S b^{-j} \cap b^k S b^{-k} = \emptyset, \quad j, k \in \mathbf{Z}, \quad j \neq k$.

Notons qu'on a de plus $S^{-1} = S$. Vu 1) et 2), il n'existe pas de moyenne invariante sur $\mathbf{F}_2 - \{1\}$: on dit que $\mathbf{F}_2$ n'est pas *intérieurement moyennable.*

Plus généralement, tout ensemble Z, sur lequel $\mathbf{F}_2$ agit de telle sorte que les groupes d'isotropie sont abéliens, est paradoxal. Notons $I(z)$ le groupe d'isotropie d'un point $z \in Z$ pour une telle action, et posons

$$X = \{z \in Z \mid I(z) = \{1\}\}, \qquad Y = Z - X.$$

Vu l'exemple 1, il suffit de vérifier que le $\mathbf{F}_2$-espace Y est paradoxal. Pour tout $y \in Y$, le groupe $I(y)$ est infini cyclique; on en choisit un générateur $c(y)$.

Notons que

$$c(gy) \in \{gc(y)g^{-1}, gc(y)^{-1}g^{-1}\}$$

pour tout $g \in \mathbf{F}_2$ et pour tout $y \in Y$. Posons

$$U = \{y \in Y \mid c(y) \in S\}.$$

Les parties $aU, U, a^{-1}U$ recouvrent Y par 1) et les parties b^jU sont disjointes deux à deux ($j \in \mathbf{Z}$) par 2). Donc Y est paradoxal par une application immédiate de la proposition 3.

Mentionnons avant l'exemple 3 deux autres exemples d'actions de $\mathbf{F}_2$ à isotropies abéliennes

1) Le sous-groupe de $SL(2, \mathbf{Z})$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est isomorphe à $\mathbf{F}_2$ (exemple 1 de [He]), donc $\mathbf{F}_2$ agit naturellement sur $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ moins l'origine. Cette action est paradoxale.

2) Soient G un groupe et H un sous-groupe libre non abélien de G. On suppose que le centralisateur $I_g = \{h \in H \mid gh = hg\}$ est abélien pour tout $g \in G$ avec $g \neq 1$. Alors l'action de H sur $G - \{1\}$ par automorphismes intérieurs est paradoxale.

Nous avons retrouvé ainsi la proposition 4 et l'exemple 5 de [Ak]: le groupe G de 2) n'est pas intérieurement moyennable, et en particulier le produit semi-direct de $\mathbf{F}_2$ par $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ défini par l'action de 1) n'est pas intérieurement moyennable.

Exemple 3: déplacements euclidiens d'un domaine du système solaire

On se donne un ouvert borné E de l'univers, contenant la lune et une pomme.

Soit B une boule de E de centre b. Dans l'action sur $B - \{b\}$ du groupe des rotations $SO(3)$, tous les groupes d'isotropie sont abéliens. Or $SO(3)$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{F}_2$ (voir [Hf], ou [He]). Donc $B - \{b\}$ est paradoxal pour $SO(3)$.

Si $\mathfrak{G}$ désigne le pseudogroupe des déplacements euclidiens de E, toute partie $X \subset E$ d'intérieur non vide contient une grande partie $B - \{b\}$. Deux parties de E d'intérieurs non vides sont donc $\mathfrak{G}$-équivalentes par le corollaire 7: c'est le théorème III de l'introduction. Observons que, des sections précédentes, nous n'avons utilisé que la proposition. 3, le lemme 5 et le corollaire 7, qui sont indépendants du reste.

La même situation prévaut sur une sphère: la surface de mon jardin est équivalente à celle de Rome modulo le (pseudo)groupe des rotations, contrairement à l'opinion qui apparaît à la page 18 de [GU]. En revanche, le pseudogroupe des déplacements d'un ouvert borné du plan euclidien est moyennable. Nous ignorons s'il a jamais été fait usage d'un argument basé sur ces faits dans la controverse sur la rotondité de la terre.

Remarque. Dans les exemples qui précèdent, l'existence de paradoxes est liée à la présence de groupes libres non abéliens.

Considérons plus particulièrement un groupe G, agissant sur lui-même par multiplication à gauche. La question suivante apparaît implicitement dans [vN] et explicitement dans [K2]: l'existence d'un sous-groupe de G isomorphe à $\mathbf{F}_2$ est-elle équivalente à l'existence d'une décomposition paradoxale du G-espace G (i.e. à la non moyennabilité de G)?

La réponse semble être non: il existe des groupes paradoxaux (i.e. non moyennables) sans sous-groupe libre. C'est par exemple le cas des groupes de Burnside $B(2, p)$ pour p impair et p assez grand, où $B(2, p)$ est le quotient du groupe libre $\mathbf{F}_2$ par les relations $(w^p = 1)_{w \in \mathbf{F}_2}$: voir [O] et [Ad].

RÉFÉRENCES

[Ad] Adyan, S. I. Random walks on free periodic groups. *Math. USSR Izvestiya 21 (3)* (1983), 425-434.

[Ak] Akemann, C. A. Operator algebras associated with Fuchsian groups. *Houston J. Math. 7* (1981), 295-301.

[BT] Banach, S. et A. Tarski. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fund. Math. 6* (1924), 244-277.

[BH] Bédos, E. et P. de la Harpe. Moyennabilité intérieure des groupes. *L'Enseignement Math. 32* (1986), 139-157.

[C] Connes, A. Non commutative differential geometry. Chapter I. The Chern character in K-homology. *Publications Math. IHES N° 62* (1985), 41-144.

[DS] Deligne, P. and D. Sullivan. Division algebras and the Hausdorff-Banach-Tarski Paradox. *L'Enseignement Math. 29* (1983), 145-150.

[DE] Dubins, L. E. et M. Emery. Le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski. *Gazette des Mathématiciens 12* (1979), 71-76.

[GU] Goscinny et Uderzo. *Astérix chez les Bretons.* Dargaud 1966.

[Hf] Hausdorff, F. *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit 1914.

[He] de la Harpe, P. Free groups in linear groups. *L'Enseignement Math. 29* (1983), 129-144.

[HS] Hewitt, E. and K. Stromberg. *Real and abstract analysis.* Springer 1965.

[Ke] Kesten, H. Symmetric random walks on groups. *Trans. Amer. Math. Soc. 22* (1959), 336-354.

[K] Kuratowski, C. Une propriété des correspondances biunivoques. *Fund. Math. 6* (1924), 240-243.

[Kö] König, D. Sur les correspondances multivoques des ensembles. *Fund. Math. 8* (1926), 114-134.

[O] Ol'shanskii, A. Yu. On the problem of the existence of an invariant mean on a group. *Russian Math. Surveys 35 (4)* (1980), 180-181.

[R1] Rosenblatt, J. M. A generalization of Følner's condition. *Math. Scand. 33* (1973), 153-170.

[R2] —— Invariant measures and growth conditions. *Trans. Amer. Math. Soc. 193* (1974), 33-53.

[Sh] Sherman, J. A new characterization of amenable groups. *Trans. Amer. Math. Soc. 254* (1979), 365-389.

[T] Tarski, A. *Cardinal algebras.* Oxford Univ. Press 1949.

[U] Ulam, S. Remark on the generalised Bernstein's theorem. *Fund. Math. 13* (1929), 281-283.

[vN] von Neumann, J. Zur allgemeinen Theorie des Masses. *Fund. Math. 13* (1929), 73-116.

(Reçu le 22 janvier 1985)

Pierre de la Harpe

Université de Genève
Section de Mathématiques
C.P. 240
CH - 1211 Genève 24

Georges Skandalis

Université P. et M. Curie
Laboratoire de mathématiques fondamentales
4, place Jussieu
F - 75230 Paris Cedex 05