Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN RÉSULTAT DE TARSKI SUR LES ACTIONS MOYENNABLES DE GROUPES ET LES PARTITIONS PARADOXALES

Autor: de la Harpe, Pierre / Skandalis, Georges

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55082

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 32 (1986), p. 121-138

UN RÉSULTAT DE TARSKI SUR LES ACTIONS MOYENNABLES DE GROUPES ET LES PARTITIONS PARADOXALES

par Pierre DE LA HARPE et Georges SKANDALIS

Soit G un groupe agissant sur un ensemble non vide X. Une *translation par morceaux* associée à cette action est une bijection $\gamma: S \to T$ où S et T sont des parties de X, telle qu'il existe une partie finie $\{g_1, ..., g_k\}$ de G avec $\gamma x \in \{g_1 x, ..., g_k x\}$ pour tout $x \in S$. Nous notons $\mathfrak{G}$ l'ensemble de ces translations par morceaux: c'est un *pseudogroupe* au sens défini plus bas. On appelle *partition paradoxale* du G-ensemble X la donnée d'une partition $X = X_1 \coprod X_2$ et de bijections $\gamma_j: X \to X_j$ appartenant au pseudogroupe ($j=1, 2$). (Le signe $\coprod$ indique une réunion disjointe.) On appelle *moyenne invariante* sur le G-ensemble X une fonction $\mu: \mathfrak{P}(X) \to [0, 1]$ définie sur l'ensemble des parties de X et satisfaisant

$$\begin{aligned} &\mu(X) = 1\,, \\ &\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T) \quad \text{pour} \quad S, T \subset X \text{ avec } S \cap T = \emptyset\,, \\ &\mu(gS) = \mu(S) \quad \text{pour} \quad g \in G \text{ et } S \subset X\,. \end{aligned}$$

C'est l'évidence même qu'il ne peut exister à la fois une décomposition paradoxale de X et une moyenne invariante sur X. Mais on a plus précisément une alternative, ce qui est le résultat principal exposé dans ce travail.

THÉORÈME I. *Si le G-espace X ne possède pas de moyenne invariante, alors il admet une partition paradoxale.*

Particularisons à l'exemple où G agit sur $X = G$ par multiplication à gauche; dans ce cas, s'il existe une moyenne invariante, on dit que G est *moyennable.*

COROLLAIRE II. *Pour qu'un groupe G soit non moyennable, il faut et il suffit qu'il admette une partition paradoxale, c'est-à-dire qu'il existe*

$g_1, \ldots, g_k, g'_1, \ldots, g'_l \in G$ *et* $S_1, \ldots, S_k, S'_1, \ldots, S'_l \subset G$ *avec*

$$G = \coprod_{1 \leqslant i \leqslant k} S_i = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant l} S'_j = \left(\coprod_{1 \leqslant i \leqslant k} g_i S_i\right) \coprod \left(\coprod_{1 \leqslant j \leqslant l} g'_j S'_j\right).$$

Au vocabulaire près, le théorème apparaît avec le numéro 16.12 (ii) dans un livre mal connu de A. Tarski [T], reprenant des articles bien antérieurs (1929 et 1938, cités dans [T]). Mais nous avons trouvé difficile d'isoler dans [T] les idées essentielles pour la preuve. C'est ce qui nous a engagé à proposer ici une preuve du théorème I et de quelques variantes. Notre seul mérite éventuel est d'avoir rassemblé des arguments éparpillés dans la littérature, mais aucun de ceux-ci n'est original. Les ingrédients que nous utilisons sont

a) une invocation du théorème de Hahn-Banach (voir ci-dessous le théorème 1),

b) un lemme essentiel de Kuratowski (lemme 8),

c) des manipulations à la Cantor-Bernstein (lemme 5).

De c) et de l'existence de sous-groupes libres non abéliens dans le groupe $SO(3)$ des rotations de l'espace usuel (voir le supplément au § XI de [Hf]), on déduit facilement un second résultat (voir l'exemple 3 de notre section 5, ou l'agréable exposition [DE]). C'est un énoncé spectaculaire du *paradoxe de Hausdorff, Banach et Tarski:*

THÉORÈME III. *Etant donnés dans l'espace euclidien* $\mathbf{R}^3$ *une pomme* U *et la lune* V, *il existe un entier* n, *des partitions* $U = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant n} U_j$ *et* $V = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant n} V_j$, *et des déplacements euclidiens* $g_1, \ldots, g_n$ *de* $\mathbf{R}^3$ *avec* $g(U_j) = V_j$ *pour* $j = 1, \ldots, n$.

Nous voulons insister sur le fait suivant, concernant la partie non banale du corollaire II, à savoir qu'un groupe non moyennable admet une partition paradoxale: la preuve dans le cas particulier où G contient un sous-groupe libre non abélien résulte d'une très simple observation, mais la seule preuve que nous connaissons dans le cas général nécessite les trois ingrédients a), b), c) évoqués plus haut.

* * *

Plutôt que de nous restreindre d'entrée aux moyennes définies sur $\mathfrak{P}(X)$, nous préférons considérer d'abord X comme fourni avec une *algèbre* $\mathfrak{B}$ de parties de X (une algèbre est stable par réunions finies et par passage au complémentaire, et contient X). De plus, il est avantageux de considérer à priori un *pseudogroupe* $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$, comme défini dans la section 1. Le formalisme des pseudogroupes permet d'importantes simplifications d'écriture. Son avantage se voit aussi dans l'étude des sous-espaces (section 5): un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$ définit en effet canoniquement un pseudogroupe $\mathfrak{G}_U$ de transformations de $(U, \mathfrak{B}_U)$ avec

$$\mathfrak{G}_U = \{\gamma \in \mathfrak{G} \mid \gamma : S \to T \text{ avec } S \subset U \text{ et } T \subset U\}$$

et

$$\mathfrak{B}_U = \{S \in \mathfrak{B} \mid S \subset U\}.$$

Après une section consacrée aux définitions et aux notations, les trois sections suivantes étudient successivement les cas où

2) $\mathfrak{B}$ est une algèbre,

3) $\mathfrak{B}$ est une σ-algèbre,

4) $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}(X)$.

Pour le dernier cas, le théorème 11 résume une partie des résultats obtenus. La section 5 décrit quelques exemples classiques.

Nous remercions E. Bédos qui nous a signalé le livre de Tarski, P. L. Aubert la thèse de Sherman sur la moyennabilité des groupes [Sh] et J. Berney d'autres précisions bibliographiques. Nous renvoyons à [BH] pour l'intérêt du théorème I relativement à la notion de *moyennabilité intérieure* pour un groupe discret.

1. Définitions et notations

On se donne un ensemble non vide X et une algèbre $\mathfrak{B}$ de parties de X.

Un *pseudogroupe* $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$ est un ensemble de bijections $\gamma : S \to T$, où $S, T \in \mathfrak{B}$, qui satisfait

i) l'identité $X \to X$ est dans $\mathfrak{G}$;

ii) si $\gamma : S \to T$ est dans $\mathfrak{G}$, l'inverse $\gamma^{-1} : T \to S$ l'est aussi;

iii) si $\gamma : S \to T$ et $\delta : T \to U$ sont dans $\mathfrak{G}$, le composé $\delta\gamma : S \to U$ est dans $\mathfrak{G}$;

iv) si $\gamma : S \to T$ est dans $\mathfrak{G}$ et si $S' \in \mathfrak{B}$ est contenu dans S, la restriction de γ à S' est dans $\mathfrak{G}$;

v) soient $S, T \in \mathfrak{B}$ et $\varphi : S \to T$ une bijection; s'il existe une partition *finie* $S = \coprod S_j$ avec $S_j \in \mathfrak{B}$, telle que chaque restriction $\varphi \mid S_j$ soit dans $\mathfrak{G}$, alors $\varphi \in \mathfrak{G}$.

La condition iv) exprime que $\mathfrak{G}$ est stable par *localisation* et v) par *recollement fini*. La donnée de $\mathfrak{G}$ contient celle de $\mathfrak{B}$ vu les conditions i) et iv).

Deux parties $S, T \in \mathfrak{B}$ sont *équivalentes* modulo $\mathfrak{G}$, ce qu'on note $S \equiv T \pmod{\mathfrak{G}}$, s'il existe dans $\mathfrak{G}$ une bijection de source S et de but T. Une partie $S \in \mathfrak{B}$ est *grande* s'il existe $T_1, ..., T_N \in \mathfrak{B}$, chaque T_j étant équivalent à une partie de S, avec $X = \cup T_j$; on obtiendrait la même définition (vu la propriété iv)) en exigeant de plus que les T_j soient disjoints deux à deux. (La partie S est grande si et seulement si X est S-borné au sens de [R1], [R2].) Nous disons que le pseudogroupe $\mathfrak{G}$ est *faiblement paradoxal* s'il existe dans $\mathfrak{G}$ deux bijections ayant X pour source qui sont de buts disjoints, ce que nous abrégeons par

$$2X \leqslant X \pmod{\mathfrak{G}}.$$

Nous disons aussi, parfois et abusivement, que l'espace $(X, \mathfrak{B})$ est faiblement paradoxal.

Pour tout entier $p \geqslant 1$, on note I_p l'ensemble $\{1, ..., p\}$ et $\mathfrak{C}_p$ le pseudogroupe de toutes les bijections entre sous-ensembles de I_p. On note X_p le produit direct $X \times I_p$, qu'on munit de l'algèbre produit $\mathfrak{B}_p = \mathfrak{B} \times \mathfrak{P}(I_p)$. Si $\mathfrak{G}$ est comme ci-dessus, le produit direct $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G} \times \mathfrak{C}_p$ est le pseudogroupe de transformations de $(X_p, \mathfrak{B}_p)$ engendré par les bijections

$$\begin{cases} S \times \{q\} \to T \times \{r\} \\ (x, q) \mapsto (\gamma x, r) \end{cases}.$$

où $\gamma : S \to T$ est dans $\mathfrak{G}$ et où q, r sont dans I_p. Nous disons que $\mathfrak{G}$ est *virtuellement paradoxal* s'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $\mathfrak{G}_p$ soit faiblement paradoxal. Notons ceci: lorsque $r \geqslant p$, on a $I_r \supset I_p$, et $(X_p, \mathfrak{B}_p)$ est un sous-espace de $(X_r, \mathfrak{B}_r)$ sur lequel $\mathfrak{G}_r$ induit précisément $\mathfrak{G}_p$. On vérifie plus bas que, si $\mathfrak{G}_p$ est faiblement paradoxal, alors il en est de même de $\mathfrak{G}_r$ pour tout $r \geqslant p$ (voir la remarque qui suit la proposition 3).

Le pseudogroupe $\mathfrak{G}$ est *moyennable* s'il existe une *moyenne* $\mathfrak{G}$-*invariante* sur $(X, \mathfrak{B})$, c'est-à-dire une application $\mu : \mathfrak{B} \to [0, 1]$ telle que

$$\mu(X) = 1\,,$$
$$\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T) \quad \text{pour} \quad S, T \in \mathfrak{B} \text{ avec } S \cap T = \emptyset\,,$$
$$\mu(T) = \mu(S) \quad \text{s'il existe } \gamma : S \to T \text{ dans } \mathfrak{G}\,.$$

Nous désignons par $l^\infty(X)$ l'espace de Banach des fonctions bornées à valeurs réelles sur X avec la norme de la convergence uniforme, et par $l^\infty(X, \mathfrak{B})$ l'adhérence dans $l^\infty(X)$ du sous-espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques des éléments de $\mathfrak{B}$. Alors $\mathfrak{G}$ est moyennable si et seulement s'il existe une forme linéaire positive normalisée $\mathfrak{G}$-invariante sur $l^\infty(X, \mathfrak{B})$, forme que nous notons aussi μ. (Rappel de vocabulaire: μ est positive si $\mu(f) \geqslant 0$ pour tout $f \in l^\infty(X, \mathfrak{B})$ à valeurs positives ou nulles, μ est normalisée si μ prend la valeur 1 sur la fonction constante de valeur 1, et μ est $\mathfrak{G}$-invariante si $\mu(f\gamma) = \mu(f)$ pour tout $\gamma : S \to T$ dans $\mathfrak{G}$ et pour tout $f \in l^\infty(X, \mathfrak{B})$ à support dans T.) Pour l'équivalence entre les deux définitions de moyennabilité, voir le théorème 20.30 de [HS].

Etant donné un entier $p \geqslant 1$, on laisse au lecteur le soin de vérifier que $\mathfrak{G}$ est moyennable si et seulement si $\mathfrak{G}_p$ l'est. Plus généralement, si $\mathfrak{G}$ agit sur $(X, \mathfrak{B})$ et si $U \in \mathfrak{B}$ est une grande partie de X, alors $\mathfrak{G}$ est moyennable si et seulement si $\mathfrak{G}_U$ est moyennable. (Voir aussi la proposition 12.)

2. Paradoxes relatifs à une algèbre

On considère à nouveau un ensemble non vide X, une algèbre $\mathfrak{B}$ de parties de X, et un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$.

Théorème 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\mathfrak{G}$ *n'est pas moyennable;*

ii) $\mathfrak{G}$ *est virtuellement paradoxal.*

Preuve. S'il existe un entier $p \geqslant 1$ avec $\mathfrak{G}_p$ faiblement paradoxal, il est évident que $\mathfrak{G}_p$ n'est pas moyennable, et par suite $\mathfrak{G}$ n'est pas moyennable; donc ii) implique i).

Notons $d^\infty(X, \mathfrak{B})$ le sous-espace vectoriel de $l^\infty(X, \mathfrak{B})$ engendré par les différences $\chi - \chi\gamma$, avec $\gamma : S \to T$ dans $\mathfrak{G}$ et χ la fonction caractéristique de T. Notons C le cône convexe ouvert de $l^\infty(X, \mathfrak{B})$ formé des fonctions f

pour lesquelles $\inf_{x \in X} f(x) > 0$. Une moyenne $\mathfrak{G}$-invariante sur $(X, \mathfrak{B})$ est une forme linéaire continue μ sur $l^\infty(X, \mathfrak{B})$, telle que la restriction $\mu \mid d^\infty(X, \mathfrak{B})$ soit nulle et telle que la restriction $\mu \mid C$ soit à valeurs strictement positives. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, on en déduit que la condition i) est équivalente à $d^\infty(X, \mathfrak{B}) \cap C \neq \emptyset$. On suppose donc que $d^\infty(X, \mathfrak{B})$ rencontre C, et il s'agit de montrer que $\mathfrak{G}_p$ est faiblement paradoxal pour p assez grand.

Comme C est ouvert, il existe des éléments $\gamma_j : S_j \to T_j$ dans $\mathfrak{G}$ et des nombres rationnels n_j tels que la fonction

$$\sum_{j=1}^{m-1} n_j(\chi_j - \chi_j\gamma_j)$$

soit dans C, où χ_j désigne la fonction caractéristique de T_j. En remplaçant quand il le faut γ_j par γ_j^{-1}, on peut rendre chaque n_j positif. Quitte à multiplier la fonction par un entier convenable, on peut aussi supposer les n_j entiers et la fonction minorée par la constante 1. En répétant les γ_j, on peut enfin supposer tous les n_j égaux à 1. On a donc

$$1 + \sum_{j=1}^{n-1} \chi_j\gamma_j \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \chi_j$$

pour un entier n convenable. Notons $\chi'_j = 1 - \chi_j\gamma_j$ la fonction caractéristique de $X - S_j$ et ajoutons les χ'_j à l'inégalité précédente; comme $\chi_j \leqslant 1$ et $\chi'_j \leqslant 1$ on obtient

$$n \leqslant f = \sum_{j=1}^{n-1} (\chi_j + \chi'_j) \leqslant 2n - 2 .$$

On définit encore

$$R_f = \{(x, q) \in X_{2n-2} \mid q \leqslant f(x)\}$$

qui est dans $\mathfrak{B}_{2n-2}$ car c'est le sous-graphe de la fonction $\mathfrak{B}$-mesurable f, et on note $\pi_2 : R_f \to X$ la projection canonique. L'inégalité $n \leqslant f$ implique $X_n \subset R_f$.

Soit $\Phi : X_{n-1} \to X_{2n-2}$ l'application injective définie par

$$\Phi(x, j) = (\gamma_j x, 2j-1) \quad \text{si} \quad x \in S_j \quad \text{et} \quad \Phi(x, j) = (x, 2j) \quad \text{si} \quad x \notin S_j .$$

Notons U l'image de Φ et $\pi_1 : U \to X$ la projection canonique. Pour tout $y \in X$, le cardinal de $\pi_1^{-1}(y)$ est précisément $f(y)$. Vu le lemme qui suit, il existe $\Psi \in \mathfrak{G}_{2n-2}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & X_n \arrow[d, phantom, "\cap"] & \\
X_{2n-2} \supset X_{n-1} \arrow[r, "\Phi"] & U \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & R_f \arrow[d, "\pi_2"] & \subset X_{2n-2} \\
 & & X &
\end{tikzcd}$$

commute.

Soit γ la restriction à X_n de $\Phi^{-1}\Psi^{-1}$, qui est dans $\mathfrak{G}_n$. Soit $\gamma_1 \in \mathfrak{G}_n$ l'itéré γ^n de γ; on a $\gamma(X_n) \subset X_{n-1}$, de sorte que les ensembles $X_n - X_{n-1}$, $\gamma(X_n - X_{n-1}), \ldots, \gamma^{n-1}(X_n - X_{n-1}), \gamma^n(X_n)$, sont disjoints. Définissons $\gamma_2 \in \mathfrak{G}_n$ par $\gamma_2(x, q) = \gamma^{q-1}(x, n)$. Alors γ_1 et γ_2 ont des buts disjoints, et $\mathfrak{G}_n$ est bien faiblement paradoxal. □

L'existence de $\Psi \in \mathfrak{G}_{2n-2}$ invoquée dans la preuve se justifie comme suit:

LEMME 2. *On considère un entier* $p \geqslant 1$ *et deux parties* U_1, U_2 *de* X_p, *dans* $\mathfrak{B}_p$. *On note* $\pi_j : U_j \to X$ *la restriction à* U_j *de la projection canonique* $X_p = X \times I_p \to X (j = 1, 2)$, *et on note* $\mathfrak{C}_p$ *le pseudogroupe de transformations de* $(X_p, \mathfrak{B}_p)$ *engendré par les applications* $\mathrm{id}_X \times \sigma$ *où* σ *est une bijection de* I_p.

Si les cardinaux de $\pi_1^{-1}(x)$ *et* $\pi_2^{-1}(x)$ *sont égaux pour tout* $x \in X$, *alors il existe* $\Psi \in \mathfrak{C}_p$ *tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & U_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

commute.

Preuve. Il suffit de montrer le lemme lorsque U_2 est tel que $(x, q) \in U_2$ implique $(x, t) \in U_2$ pour $t = 1, 2, \ldots, q$ (cas d'un sous-graphe). Toute bijection $U_1 \to U_2$ faisant commuter le diagramme peut s'écrire $(x, q) \mapsto (x, r(x, q))$. Il en existe une, unique, pour laquelle toutes les fonctions $q \mapsto r(x, q)$ sont croissantes, x étant dans l'image de π_1; on la note Ψ.

Pour tout $t \in \{1, \ldots, p\}$, l'ensemble $S_t = \{x \in X \mid (x, t) \in U_1\}$ est dans $\mathfrak{B}$, donc sa fonction caractéristique χ_t est $\mathfrak{B}$-mesurable. Comme $r(x, q) = \sum_{1 \leqslant t \leqslant q} \chi_t(x)$, la fonction r est $\mathfrak{B}_p$-mesurable. Par suite l'application Ψ est $\mathfrak{B}_p$-mesurable.

Etant donnés $q, s \in I_p$, l'ensemble

$$A_{q,s} = \{x \in X \mid (x, q) \in U_1 \text{ et } \Psi(x, q) = (x, s)\}$$

est donc dans $\mathfrak{B}$. Si $x \in A_{q,s}$, alors $\Psi(x, q) = (x, s)$. Ceci étant vrai pour toute paire (q, s), il en résulte que $\Psi \in \mathfrak{C}_p$. □

Le critère suivant peut faciliter la vérification qu'un pseudogroupe donné est faiblement (ou virtuellement) paradoxal. Il est du même type que, par exemple, le théorème 2.7 de [Sh].

PROPOSITION 3. *Si* $\mathfrak{G}$ *est un pseudogroupe de transformations d'un espace* $(X, \mathfrak{B})$, *les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\mathfrak{G}$ *est faiblement paradoxal.*

ii) *Il existe un entier* $n \geqslant 2$ *et des parties* $S_1, ..., S_{n-1}, S_n, T_1, ..., T_{n-1}$ *dans* $\mathfrak{B}$ *avec*
— *les* S_j *sont disjoints deux à deux*
— S_n *est grand*
— T_k *est équivalent à une partie de* $S_k (k=1, ..., n-1)$
— $\left(\coprod_{1 \leqslant j \leqslant n} S_j\right) \subset \left(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n-1} T_k\right)$.

iii) *Il existe* $\gamma: X \to R$ *dans* $\mathfrak{G}$ *tel que* $X - R$ *soit grand.*

Preuve. L'implication i) ⇒ ii) est banale (avec $n=2$, $T=X$ et S_1, S_2 les buts des bijections de la définition).

Si ii) est vrai, on peut supposer de plus les T_k disjoints deux à deux: sinon, on considère

$$T'_1 = T_1, T'_2 = T_2 - T_1, ..., T'_{n-1} = T_{n-1} - (T_1 \cup ... \cup T_{n-2}).$$

Supposons la condition ii) vérifiée, avec les T_k disjoints deux à deux. Posons $T = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n-1} T_k$, et choisissons dans $\mathfrak{G}$ une bijection α de source T et de but $S' \subset \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant n-1} S_j$, obtenue en recollant des éléments $T_j \to S'_j \subset S_j$. Posons $R = S' \cup (X - T)$, et notons $\gamma: X \to R$ la bijection qui coïncide avec α sur T et avec l'identité sur $X - T$. La condition iii) est vérifiée, car $X - R$ contient la grande partie S_n.

Supposons enfin la condition iii) vérifiée. Comme $X - R$ est grand, il existe dans $\mathfrak{G}$ des éléments $\delta_j: S_j \to T_j$ avec $S_j \subset X - R$ et les T_j disjoints deux à deux $(j=1, ..., N)$, tels que $X = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant N} T_j$. Les ensembles

$X - R, \gamma(X-R), ..., \gamma^{N-1}(X-R), \gamma^N(X)$ sont disjoints deux à deux. Posons $\gamma' = \gamma^N$, et soit γ'' la bijection de source X qui coïncide avec $\gamma^{j-1}(\delta_j)^{-1}$ sur T_j pour $j = 1, ..., N$. Comme les buts de γ' et γ'' sont disjoints, $\mathfrak{G}$ est faiblement paradoxal. □

Soient r et p des entiers avec $r \geqslant p \geqslant 1$. Comme nous l'avons déjà affirmé, il résulte de la proposition 3 que, si $\mathfrak{G}_p$ est faiblement paradoxal, alors $\mathfrak{G}_r$ l'est aussi. Plus généralement, soit $\mathfrak{G}$ un pseudogroupe de transformations de $(X, \mathfrak{B})$ et soit $U \in \mathfrak{B}$ une grande partie de X; si $\mathfrak{G}_U$ est faiblement paradoxal, alors $\mathfrak{G}$ l'est aussi.

3. Paradoxes relatifs à une σ-algèbre

Un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$, comme à la section 2, est dit *fortement paradoxal* s'il existe X_1, X_2 avec $X = X_1 \coprod X_2$ et $X_j \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$ $(j=1, 2)$, ce que nous abrégeons par $2X \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$.

Proposition 4. *On suppose que* $\mathfrak{B}$ *est une σ-algèbre. Alors* $\mathfrak{G}$ *est faiblement paradoxal si et seulement si* $\mathfrak{G}$ *est fortement paradoxal.*

Insistons sur le fait que $\mathfrak{G}$ est bien un pseudogroupe au sens précédent: la condition v) de la section 1 concerne toujours des recollements finis, même si $\mathfrak{B}$ est stable par réunions infinies dénombrables.

Lemme 5. *S'il existe* $T, T' \in \mathfrak{B}$ *avec* $T \cap T' = \emptyset$ *et* $\gamma: X \to T$ *dans* $\mathfrak{G}$, *alors il existe* $\gamma'': X \to X - T'$ *dans* $\mathfrak{G}$.

Preuve. Posons $U = \bigcup_{k \geqslant 0} \gamma^k(T')$, de sorte que $\gamma(U) = U - T'$. On définit $\gamma'' \in \mathfrak{G}$ de source X par $\gamma' x = x$ si $x \in X - U$ et $\gamma'' x = \gamma x$ si $x \in U$. Le but de γ'' est $(X-U) \cup \gamma(U) = X - T'$. □

Preuve de la proposition. Supposons $\mathfrak{G}$ faiblement paradoxal: il existe deux éléments $\gamma: X \to T$ et $\gamma': X \to T'$ de $\mathfrak{G}$ avec $T \cap T' = \emptyset$. Alors γ' et l'élément γ'' du lemme 5 sont des bijections dans $\mathfrak{G}$ ayant X pour source et dont les buts forment une partition de X. □

Lorsque $\mathfrak{B}$ est une σ-algèbre, on peut donc dire sans ambiguïté que $\mathfrak{G}$ est *paradoxal* s'il l'est faiblement ou/et fortement. La condition ii) du théorème 1 peut s'écrire: $\mathfrak{G}_p$ est paradoxal pour p assez grand.

REMARQUE 6. *Le lemme 5 est équivalent à l'énoncé suivant, plus classique, du type Cantor-Bernstein:*

S'il existe $\delta: S \to R$ *et* $\delta': S' \to R'$ *dans* $\mathfrak{G}$ *avec* $R \subset S'$ *et* $R' \subset S$, *alors* $S' \equiv S \pmod{\mathfrak{G}}$.

Preuve. Posons $\gamma = \delta'\delta: S \to T$ et $T' = S - R'$; on a $T \subset R' \subset S$. Par le lemme 5 (appliqué dans S), il existe dans $\mathfrak{G}$ un élément $\gamma'': S \to R'$. Par suite $(\delta')^{-1}\gamma'': S \to S'$ est une équivalence dans $\mathfrak{G}$. □

COROLLAIRE 7. *On suppose que* $\mathfrak{B}$ *est une* σ-*algèbre. Soient* $U, V, U', V' \in \mathfrak{B}$ *des grandes parties avec* $U \subset U'$ *et* $V \subset V'$. *Si* $\mathfrak{G}_U$ *et* $\mathfrak{G}_V$ *sont paradoxaux, alors* $U' \equiv V' \pmod{\mathfrak{G}}$.

Preuve. Il suffit de montrer que $U' \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$. Comme U est grand, il existe un entier N et une bijection $\alpha: X \times \{1\} \to U_1$ dans $\mathfrak{G}_N$ avec $U_1 \subset U \times I_N$. Comme $\mathfrak{G}_U$ est paradoxal, il existe $\beta: U \times I_N \to U \times \{1\}$ dans $\mathfrak{G}_N$. La composition de α et β fournit une bijection $\gamma: X \to T$ de $\mathfrak{G}$ avec $T \subset U \subset U'$. On conclut en utilisant le lemme 5 (avec $T' = X - U'$). □

Notons que nous aurions pu formuler ce corollaire sans introduire U et V, car U est grand dans U', et par suite $\mathfrak{G}_{U'}$ est paradoxal vu la dernière remarque de la section 2. Mais l'énoncé choisi correspond mieux à l'utilisation en vue, pour l'exemple 3 de la section 5.

4. PARADOXES RELATIFS À L'ALGÈBRE DE TOUTES LES PARTIES

On se donne un ensemble X et un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de X, ou plus précisément de $(X, \mathfrak{P}(X))$. L'outil nouveau est un lemme de Kuratowski [K].

LEMME 8. *On se donne un ensemble* X, *deux partitions* $X = S \coprod T = U \coprod V$, *ainsi que deux bijections* $\varphi: S \to T$ *et* $\psi: U \to V$. *Alors il existe deux partitions*

$$S = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant 4} S_j, \quad V = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant 4} V_j,$$

avec

$$V_1 = S_1, \quad V_2 = \varphi(S_2), \quad V_3 = \psi(S_3), \quad V_4 = \psi\varphi(S_4).$$

Preuve. Considérons la bijection de X sur X qui coïncide avec φ sur S et avec φ^{-1} sur T; c'est une transformation de X sans point fixe et d'ordre 2, que nous notons encore φ. On étend de même ψ. Si $G = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) * (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ désigne le groupe diédral infini, φ et ψ définissent une action de G sur X.

Soit G_0 le sous-groupe de G engendré par $\psi\varphi$, qui est cyclique infini et normal dans G; soit $Y = X/G_0$ l'espace des orbites. Alors φ et ψ induisent sur Y la même transformation, que nous notons ρ et qui satisfait $\rho^2 = \mathrm{id}_Y$. Cette transformation est sans point fixe: sinon, il existerait $x \in X$ et $n \in \mathbf{Z}$ avec $\varphi(x) = (\psi\varphi)^n(x)$; or $\varphi(\psi\varphi)^n$ est conjugué soit à φ (si n est pair) soit à ψ (si n est impair), donc n'a pas de point fixe par hypothèse sur φ et ψ. Vu l'axiome du choix, il existe une partition $Y = Y' \coprod Y''$ telle que ρ échange Y' et Y''. Si $X = X' \coprod X''$ est la partition image inverse par la projection canonique $X \to Y$, alors X' et X'' sont échangés par φ et par ψ.

La bijection $\alpha: S \to X'$ définie par $\alpha(x) \in \{x, \varphi(x)\}$ montre que S et X' sont équivalents modulo le pseudogroupe engendré par φ, ce que nous écrivons $S \equiv X' \pmod{\varphi}$. De même $X' \equiv V \pmod{\psi}$. Par suite $S \equiv V \pmod{G}$. Plus précisément, on pose

$$S_1 = S \cap X' \cap V = V_1$$

$$S_2 = S \cap X'' \cap \varphi(V) \qquad V_2 = T \cap X' \cap V$$

$$S_3 = S \cap X' \cap U \qquad V_3 = \psi(S) \cap X'' \cap V$$

$$S_4 = S \cap X'' \cap \varphi(U) \qquad V_4 = \psi(T) \cap X'' \cap V$$

et on obtient l'affirmation du lemme. □

Remarques.

1) Le nombre 4 apparaissant dans le lemme 8 est le minimum possible [U].

2) La preuve ci-dessus est une variante de celle de Kuratowski. Le lemme résulte d'un travail de König datant de 1916; voir le § 5 de [Kö].

3) La preuve montre ceci: étant données deux actions sans point fixe du groupe à deux éléments sur X, il existe un domaine fondamental *commun*

$$X' = S_1 \cup \varphi(S_2) \cup S_3 \cup \varphi(S_4) = V_1 \cup V_2 \cup \psi^{-1}(V_3) \cup \psi^{-1}(V_4)$$

L'analogue mesurable de l'affirmation de la remarque 3 n'est pas correct, comme le montre l'exemple suivant.

On considère le cercle unité $\mathbf{S}^1$ du plan complexe et deux réflexions φ, ψ de $\mathbf{S}^1$ relatives à deux diamètres dont l'angle est un multiple irrationnel de π. Soit X l'espace $\mathbf{S}^1$ privé de l'ensemble dénombrable constitué par les points fixes des transformations $((\varphi\psi)^n\varphi)_{n\in\mathbf{Z}}$; on munit X de la σ-algèbre des ensembles mesurables au sens de Lebesgue. Il n'existe pas de sous-ensemble mesurable $X' \subset X$ qui soit un domaine fondamental pour $\{\mathrm{id}_X, \varphi\}$ et $\{\mathrm{id}_X, \psi\}$: en effet, un tel X' serait invariant par la transformation ergodique $\psi\varphi$, ce qui est absurde, car φ et ψ préservent la mesure de Lebesgue.

PROPOSITION 9. *Si $\mathfrak{G}$ est un pseudogroupe de transformations de X relatif à la σ-algèbre de toutes les parties, alors $\mathfrak{G}$ est virtuellement paradoxal si et seulement si $\mathfrak{G}$ est paradoxal.*

Preuve. On suppose $\mathfrak{G}$ virtuellement paradoxal, c'est-à-dire $\mathfrak{G}_p$ paradoxal pour un entier convenable p. En remplaçant au besoin p par un entier plus grand, on se ramène au cas d'une puissance de 2. Modulo une induction évidente, il suffit donc de considérer le cas $p = 2$.

L'hypothèse que X_2 est paradoxal signifie qu'il existe une partition $X_2 = U \coprod V$ avec $U \equiv X_2 \pmod{\mathfrak{G}_2}$ et $V \equiv X_2 \pmod{\mathfrak{G}_2}$. En posant $S = X \times \{1\}$ et $T = X \times \{2\}$, on obtient évidemment $X_2 = S \coprod T$ avec $S \equiv T \pmod{\mathfrak{G}_2}$. Le lemme 8 montre que $S \equiv V \pmod{\mathfrak{G}_2}$, donc que $X_2 \equiv X \pmod{\mathfrak{G}_2}$. Cette dernière équivalence signifie précisément que X est paradoxal. □

Notons que notre proposition 9 résulte immédiatement du théorème 11 et du corollaire 12 de [BT].

COROLLAIRE 10. *Soit $\mathfrak{G}$ comme à la proposition 9. Si $\mathfrak{G}$ est paradoxal, deux grandes parties S, S' de X sont toujours équivalentes modulo $\mathfrak{G}$.*

Preuve. Vu le corollaire 7, il suffit de montrer que $\mathfrak{G}_S$ est paradoxal pour toute grande partie S de X.

Comme S est grand, il existe un entier N tel que $X \times \{1\}$ soit équivalent modulo $\mathfrak{G}_N$ à une partie de $S \times I_N = S_N$. Comme $\mathfrak{G}$ est paradoxal, $\mathfrak{G}_{S_N}$ l'est aussi (dernière remarque de la section 2); en d'autres termes, $\mathfrak{G}_S$ est virtuellement paradoxal. La proposition 9 montre que $\mathfrak{G}_S$ est paradoxal. □

On a donc:

THÉORÈME 11. *Soit* $\mathfrak{G}$ *un pseudogroupe de transformations d'un ensemble non vide* X, *relatif à l'algèbre* $\mathfrak{P}(X)$ *de toutes les parties de* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\mathfrak{G}$ *n'est pas moyennable.*

ii) *Il existe un entier* $n \geqslant 2$ *et des parties* $S_1, \ldots, S_{n-1}, S_n, T_1, \ldots, T_{n-1}$ *de* X *avec*
— *les* S_j *sont équivalents deux à deux,*
— S_n *est grand,*
— T_k *est équivalent à une partie de* $S_k (k=1, \ldots, n-1)$,
— $\left(\coprod_{1 \leqslant j \leqslant n} S_j \right) \subset \left(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n-1} T_k \right)$.

iii) $\mathfrak{G}$ *est (fortement) paradoxal: il existe une partition* $X = X_1 \coprod X_2$ *avec* $X_j \equiv X (\mathrm{mod}\ \mathfrak{G})$.

De plus, si ces conditions sont satisfaites, alors deux grandes parties quelconques de X *sont équivalentes modulo* $\mathfrak{G}$.

On connaît d'autres conditions équivalentes: voir par exemple [R1] pour des conditions à la Følner. Voir aussi le corollaire 3.5 de [R2]: toute action d'un groupe de génération finie et de croissance sous-exponentielle est moyennable.

5. UN DÉVELOPPEMENT ET QUELQUES EXEMPLES CLASSIQUES

Soit $\mathfrak{G}$ un pseudogroupe de transformations d'un espace $(X, \mathfrak{B})$ donné avec un sous-ensemble non vide $U \in \mathfrak{B}$. (Le cas étudié plus haut correspond à $U = X$.) Rappelons que nous notons $\mathfrak{G}_U$ le pseudogroupe de transformations de $(U, \mathfrak{B}_U)$ défini par $\mathfrak{G}$. On appelle *moyenne invariante* pour le système $(X, U, \mathfrak{B}, \mathfrak{G})$ une fonction $\mu: \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ telle que

$$\mu(U) = 1,$$
$$\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T) \quad \text{pour} \quad S, T \in \mathfrak{B} \text{ avec } S \cap T = \emptyset,$$
$$\mu(T) = \mu(S) \quad \text{s'il existe} \quad \gamma: S \to T \text{ dans } \mathfrak{G}.$$

La notion est due à von Neumann [vN].

PROPOSITION 12. *On reprend les notations ci-dessus. Pour qu'il existe une moyenne invariante pour* $(X, U, \mathfrak{B}, \mathfrak{G})$, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{G}_U$ *soit moyennable.*

Preuve. Supposons qu'il existe une moyenne $\mu : \mathfrak{B}_U \to [0, 1]$ invariante par $\mathfrak{G}_U$. Soit $S \in \mathfrak{B}$; s'il existe une $\mathfrak{B}$-partition $S = \coprod_{1 \leq j \leq n} S_j$, des sous-ensembles $U_1, ..., U_n$ de U et des éléments $\gamma_j : S_j \to U_j$ dans $\mathfrak{G}$ pour $j = 1, ..., n$, on pose $\mu_X(S) = \sum_{j=1}^{n} \mu(U_j)$; dans le cas contraire, on pose $\mu_X(S) = \infty$. On vérifie que $\mu_X : \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ est une moyenne invariante pour $(X, U, \mathfrak{B}, \mathfrak{G})$.

L'implication réciproque est (encore plus) banale. □

Avec les notations de la preuve, on peut remarquer que $\mu_X(X) < \infty$ si et seulement si la partie U est grande dans X.

Terminons en décrivant quelques exemples bien connus d'espaces paradoxaux.

Exemple 1 : groupes libres agissant librement

On considère le groupe libre non abélien $\mathbf{F}_2$ à deux générateurs a et b, qui agit sur lui-même par multiplication à gauche. Grâce à la proposition 3, on s'assure que l'espace obtenu est paradoxal (au sens faible) en considérant le sous-ensemble S de $\mathbf{F}_2$, constitué par les mots réduits de la forme $a^n w$ avec $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, w quelconque : en effet S, bS, b^2S sont disjoints deux à deux, et $S \cup aS = \mathbf{F}_2$.

On peut vérifier la paradoxalité forte sans l'aide de la proposition 4. Notons X_1 le sous-ensemble de $\mathbf{F}_2$ contenant les puissances a^n de a (où $n \in \mathbf{Z}$) et les mots réduits de la forme $a^n w$ avec $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, $w \neq \emptyset$. Le complémentaire X_2 de X_1 consiste en les mots réduits de la forme $b^n w$ avec $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, w quelconque. On peut définir (presque comme dans [C]) deux bijections $\varphi_j : \mathbf{F}_2 \to X_j (j = 1, 2)$

$$\varphi_1(g) = \begin{cases} g & \text{si } g = a^n \text{ avec } n \in \mathbf{Z} \\ & \text{ou } g = a^n w \text{ avec } n > 0, \\ a^{-1}g & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$\varphi_2(g) = \begin{cases} g & \text{si } g = b^n w \text{ avec } n > 0, \\ & \\ b^{-1}g & \text{sinon}, \end{cases}$$

qui montrent que le $\mathbf{F}_2$-espace $\mathbf{F}_2$ est fortement paradoxal.

Il en résulte que le groupe $\mathbf{F}_2$ n'est pas moyennable.

Plus généralement, tout ensemble X sur lequel $\mathbf{F}_2$ agit librement est paradoxal (voir [vN], page 82). En effet, on peut choisir un domaine fondamental $T \subset X$ pour l'action, de sorte que X et $\mathbf{F}_2 \times T$ sont isomorphes en tant que $\mathbf{F}_2$-espaces (avec $\mathbf{F}_2$ agissant par multiplications à gauche sur le premier facteur de $\mathbf{F}_2 \times T$, et trivialement sur le second). Par suite, à tout paradoxe dans $\mathbf{F}_2$ constitué de bijections $\gamma_j : \mathbf{F}_2 \to T_j (j=1, 2)$, on peut associer un paradoxe dans $\mathbf{F}_2 \times T$ constitué des bijections $\gamma_j \times \mathrm{id}_T (j=1, 2)$.

Comme exemples d'actions libres de $\mathbf{F}_2$, citons:

1) La multiplication à gauche dans un sur-groupe de $\mathbf{F}_2$.
2) Les actions de $\mathbf{F}_2$ sur les sphères $\mathbf{S}^{2n+1} (n \geqslant 1)$ construites par Deligne et Sullivan [DS].

Exemple 2: groupes libres agissant avec isotropies abéliennes

Considérons d'abord l'action de $\mathbf{F}_2$ sur $\mathbf{F}_2 - \{1\}$ par automorphismes intérieurs. L'espace obtenu est paradoxal: en effet, si S est l'ensemble des mots réduits non vides de la forme $a^k w a^l$ avec $k, l \in \mathbf{Z}$ et $k, l \neq 0$, alors

1) $S \cup aSa^{-1} \cup a^{-1}Sa = \mathbf{F}_2 - \{1\}$,
2) $b^j S b^{-j} \cap b^k S b^{-k} = \emptyset$, $\quad j, k \in \mathbf{Z}$, $\quad j \neq k$.

Notons qu'on a de plus $S^{-1} = S$. Vu 1) et 2), il n'existe pas de moyenne invariante sur $\mathbf{F}_2 - \{1\}$: on dit que $\mathbf{F}_2$ n'est pas *intérieurement moyennable.*

Plus généralement, tout ensemble Z, sur lequel $\mathbf{F}_2$ agit de telle sorte que les groupes d'isotropie sont abéliens, est paradoxal. Notons $I(z)$ le groupe d'isotropie d'un point $z \in Z$ pour une telle action, et posons

$$X = \{z \in Z \mid I(z) = \{1\}\}, \qquad Y = Z - X.$$

Vu l'exemple 1, il suffit de vérifier que le $\mathbf{F}_2$-espace Y est paradoxal. Pour tout $y \in Y$, le groupe $I(y)$ est infini cyclique; on en choisit un générateur $c(y)$.

Notons que

$$c(gy) \in \{gc(y)g^{-1}, gc(y)^{-1}g^{-1}\}$$

pour tout $g \in \mathbf{F}_2$ et pour tout $y \in Y$. Posons

$$U = \{y \in Y \mid c(y) \in S\}.$$

Les parties aU, U, $a^{-1}U$ recouvrent Y par 1) et les parties $b^j U$ sont disjointes deux à deux ($j \in \mathbf{Z}$) par 2). Donc Y est paradoxal par une application immédiate de la proposition 3.

Mentionnons avant l'exemple 3 deux autres exemples d'actions de $\mathbf{F}_2$ à isotropies abéliennes

1) Le sous-groupe de $SL(2, \mathbf{Z})$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est isomorphe à $\mathbf{F}_2$ (exemple 1 de [He]), donc $\mathbf{F}_2$ agit naturellement sur $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ moins l'origine. Cette action est paradoxale.

2) Soient G un groupe et H un sous-groupe libre non abélien de G. On suppose que le centralisateur $I_g = \{h \in H \mid gh = hg\}$ est abélien pour tout $g \in G$ avec $g \neq 1$. Alors l'action de H sur $G - \{1\}$ par automorphismes intérieurs est paradoxale.

Nous avons retrouvé ainsi la proposition 4 et l'exemple 5 de [Ak]: le groupe G de 2) n'est pas intérieurement moyennable, et en particulier le produit semi-direct de $\mathbf{F}_2$ par $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ défini par l'action de 1) n'est pas intérieurement moyennable.

Exemple 3 : déplacements euclidiens d'un domaine du système solaire

On se donne un ouvert borné E de l'univers, contenant la lune et une pomme.

Soit B une boule de E de centre b. Dans l'action sur $B - \{b\}$ du groupe des rotations $SO(3)$, tous les groupes d'isotropie sont abéliens. Or $SO(3)$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{F}_2$ (voir [Hf], ou [He]). Donc $B - \{b\}$ est paradoxal pour $SO(3)$.

Si $\mathfrak{G}$ désigne le pseudogroupe des déplacements euclidiens de E, toute partie $X \subset E$ d'intérieur non vide contient une grande partie $B - \{b\}$. Deux parties de E d'intérieurs non vides sont donc $\mathfrak{G}$-équivalentes par le corollaire 7: c'est le théorème III de l'introduction. Observons que, des sections précédentes, nous n'avons utilisé que la proposition. 3, le lemme 5 et le corollaire 7, qui sont indépendants du reste.

La même situation prévaut sur une sphère: la surface de mon jardin est équivalente à celle de Rome modulo le (pseudo)groupe des rotations, contrairement à l'opinion qui apparaît à la page 18 de [GU]. En revanche, le pseudogroupe des déplacements d'un ouvert borné du plan euclidien est moyennable. Nous ignorons s'il a jamais été fait usage d'un argument basé sur ces faits dans la controverse sur la rotondité de la terre.

Remarque. Dans les exemples qui précèdent, l'existence de paradoxes est liée à la présence de groupes libres non abéliens.

Considérons plus particulièrement un groupe G, agissant sur lui-même par multiplication à gauche. La question suivante apparaît implicitement dans [vN] et explicitement dans [K2]: l'existence d'un sous-groupe de G isomorphe à $\mathbf{F}_2$ est-elle équivalente à l'existence d'une décomposition paradoxale du G-espace G (i.e. à la non moyennabilité de G)?

La réponse semble être non: il existe des groupes paradoxaux (i.e. non moyennables) sans sous-groupe libre. C'est par exemple le cas des groupes de Burnside $B(2, p)$ pour p impair et p assez grand, où $B(2, p)$ est le quotient du groupe libre $\mathbf{F}_2$ par les relations $(w^p = 1)_{w \in \mathbf{F}_2}$: voir [O] et [Ad].

RÉFÉRENCES

[Ad] ADYAN, S. I. Random walks on free periodic groups. *Math. USSR Izvestiya 21 (3)* (1983), 425-434.

[Ak] AKEMANN, C. A. Operator algebras associated with Fuchsian groups. *Houston J. Math. 7* (1981), 295-301.

[BT] BANACH, S. et A. TARSKI. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fund. Math. 6* (1924), 244-277.

[BH] BÉDOS, E. et P. DE LA HARPE. Moyennabilité intérieure des groupes. *L'Enseignement Math. 32* (1986), 139-157.

[C] CONNES, A. Non commutative differential geometry. Chapter I. The Chern character in K-homology. *Publications Math. IHES N° 62* (1985), 41-144.

[DS] DELIGNE, P. and D. SULLIVAN. Division algebras and the Hausdorff-Banach-Tarski Paradox. *L'Enseignement Math. 29* (1983), 145-150.

[DE] DUBINS, L. E. et M. EMERY. Le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski. *Gazette des Mathématiciens 12* (1979), 71-76.

[GU] GOSCINNY et UDERZO. *Astérix chez les Bretons.* Dargaud 1966.

[Hf] HAUSDORFF, F. *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit 1914.

[He] DE LA HARPE, P. Free groups in linear groups. *L'Enseignement Math. 29* (1983), 129-144.

[HS] HEWITT, E. and K. STROMBERG. *Real and abstract analysis.* Springer 1965.

[Ke] KESTEN, H. Symmetric random walks on groups. *Trans. Amer. Math. Soc. 22* (1959), 336-354.

[K] KURATOWSKI, C. Une propriété des correspondances biunivoques. *Fund. Math. 6* (1924), 240-243.

[Kö] KÖNIG, D. Sur les correspondances multivoques des ensembles. *Fund. Math. 8* (1926), 114-134.

[O] OL'SHANSKII, A. Yu. On the problem of the existence of an invariant mean on a group. *Russian Math. Surveys 35 (4)* (1980), 180-181.

[R1] ROSENBLATT, J. M. A generalization of Følner's condition. *Math. Scand. 33* (1973), 153-170.

[R2] —— Invariant measures and growth conditions. *Trans. Amer. Math. Soc. 193* (1974), 33-53.

[Sh] SHERMAN, J. A new characterization of amenable groups. *Trans. Amer. Math. Soc. 254* (1979), 365-389.

[T] TARSKI, A. *Cardinal algebras.* Oxford Univ. Press 1949.

[U] ULAM, S. Remark on the generalised Bernstein's theorem. *Fund. Math. 13* (1929), 281-283.

[vN] VON NEUMANN, J. Zur allgemeinen Theorie des Masses. *Fund. Math. 13* (1929), 73-116.

(Reçu le 22 janvier 1985)

Pierre de la Harpe

Université de Genève
Section de Mathématiques
C.P. 240
CH - 1211 Genève 24

Georges Skandalis

Université P. et M. Curie
Laboratoire de mathématiques fondamentales
4, place Jussieu
F - 75230 Paris Cedex 05