

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	32 (1986)
<b>Heft:</b>	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	LES SURFACES EUCLIDIENNES À SINGULARITÉS CONIQUES
<b>Autor:</b>	Troyanov, Marc
<b>Kapitel:</b>	§3. Un peu de géométrie globale
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-55079">https://doi.org/10.5169/seals-55079</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## § 3. UN PEU DE GÉOMÉTRIE GLOBALE

On appelle géodésique d'une s.e.s.c. toute courbe minimisant la longueur entre deux quelconques de ses points assez proches.

Il est évident qu'une géodésique d'une s.e.s.c. correspond (dans toute carte) à un segment de droite euclidienne qui peut, le cas échéant, être brisée en un point singulier; elle y forme alors un angle  $\geq \pi$ . En particulier une géodésique ne passe jamais par une singularité conique dont la courbure concentrée est positive (car l'angle total est  $< 2\pi$ ).

**PROPOSITION 1.** *Soit  $S$  une s.e.s.c. complète.*

- i) *Si  $p, q \in S$  il existe une géodésique de longueur  $d(p; q)$  reliant  $p$  à  $q$ .*
- ii) *Toute classe d'homotopie peut être représentée par une géodésique de longueur minimale.*

Cette proposition est vraie dans le cas beaucoup plus général des « Espaces de longueurs » (cf. [4], page 6, pour une preuve).

**PROPOSITION 2.** *Toute s.e.s.c. compacte admet une triangulation géodésique telle que chaque point singulier soit un sommet et chaque arête soit incidente à deux faces différentes.*

(On appellera « normale » une telle triangulation, l'existence de triangulations normales montre que l'exemple 1 du § 2 est, en fait, le cas général.)

*Preuve.* Soit  $\{U_\alpha\}$  un recouvrement de  $S$  par des ouverts isométriques à un disque du plan euclidien ou du cône standard. Choisissons  $F_\alpha \subset U_\alpha$  un fermé dont le bord est une ligne polygonale et opérons ce choix de sorte que les  $F_\alpha$  recouvrent encore  $S$ . Si  $F_\alpha \cap F_\beta$  n'est pas vide, c'est un fermé dont le bord est polygonal; il est donc possible de trianguler les  $F_\alpha$  de façon que toutes les intersections  $F_\alpha \cap F_\beta$  non vides soient des réunions de triangles. Il ne reste qu'à subdiviser cette triangulation pour obtenir la triangulation voulue.

**PROPOSITION 3 (Formule de Gauss-Bonnet).** *Si  $S$  est une s.e.s.c. compacte (sans bord) avec singularités en  $x_1, x_2, \dots, x_n$  d'angle  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  alors*

$$\sum_i k_i = 2\pi\chi(S) \text{ (où } k_i = 2\pi - \theta_i\text{).}$$

*Preuve.* Choisissons une triangulation normale  $T$ . Si  $q$  est un sommet de  $T$ , posons

$$\theta_q = \begin{cases} \theta_i & \text{si } q = x_i \\ 2\pi & \text{si } q \text{ est un point régulier.} \end{cases}$$

Posons également  $k_q = 2\pi - \theta_q$ .

Soient  $a; b; c$  respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de  $T$ . Comme  $T$  est une triangulation, on a  $2b = 3c$  donc

$$2\pi\chi(S) = 2\pi a - 2\pi b + 2\pi c = 2\pi a - \pi c.$$

Chaque triangle est un triangle euclidien, donc

$$\pi b = \sum \theta_q$$

(la somme étant prise sur l'ensemble des sommets de  $T$ ). On a donc

$$2\pi\chi(S) = 2\pi a - \sum_q \theta_q = \sum_q (2\pi - \theta_q) = \sum_i (2\pi - \theta_i) = \sum_i k_i.$$

**COROLLAIRE 1.** *Si  $S$  est une s.e.s.c. homéomorphe à la sphère  $S^2$ , alors il existe au moins trois singularités de courbure concentrée positive.*

*Preuve.*  $k_i$  est strictement inférieur à 2, donc s'il existe moins de trois singularités à courbure positive, on a

$$\sum_i k_i < 4\pi = 2\pi\chi(S).$$

**COROLLAIRE 2.** *Si  $S$  est une s.e.s.c. dont toutes les singularités ont une courbure concentrée négative, alors une géodésique minimale reliant deux points  $p, q \in S$  est unique dans sa classe d'homotopie relative.*

*Preuve.* Quitte à passer au revêtement universel, on peut supposer  $S$  simplement connexe. S'il existait deux géodésiques reliant  $p$  à  $q$ , elles borderaient un (ou plusieurs) disque à bord polygonal dont au plus deux angles sont inférieurs à  $\pi$ . En recollant deux exemplaires de ce disque sur leur bord on obtiendrait une s.e.s.c. homéomorphe à  $S^2$  avec moins de trois points coniques à courbure concentrée positive.