Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REPRÉSENTATION DE GELFAND-GRAEV ET IDENTITÉS DE BARNES LE CAS DE GL2 D'UN CORPS FINI

Autor: Helversen-Pasotto, Anna

Kapitel: §6. HOMOMORPHISMES D'ALGÈBRES DE A DANS C

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55078

§ 6. Homomorphismes d'algèbres de A dans $\mathbf{C}$

On pose $H_1 := F \times F$ et $H_2 := F_{q^2}$. On note $H_i^\times$ le groupe multiplicatif de l'algèbre H_i, pour $i = 1, 2$, et l'on pose $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = -1$, c'est-à-dire qu'on associe le signe ε_i à l'algèbre H_i. Pour $x \in H_1$, $x = (x_1, x_2)$ avec $x_1, x_2 \in F_q$, on pose $\bar{x} := (x_2, x_1)$; pour $x \in H_2$, on pose $\bar{x} := x^q$; on associe ainsi à chaque $x \in H_i$ le conjugé $\bar{x}$ de x, pour $i = 1, 2$. On définit la norme N (resp. la trace T) de H_i sur F_q par $\mathrm{N}x := x\bar{x}$ (resp. $Tx := x + \bar{x}$), pour $i = 1, 2$. Pour un caractère multiplicatif β de F, le composé de β avec la norme de H_i sur F définit un caractère β^* du groupe multiplicatif $H_i^\times$, pour $i = 1, 2$. On plonge F dans H_1 en appliquant $a \in F$ sur $(a, a) \in H_1$, on plonge F dans H_2 en tant que seul sous-corps à q éléments; pour un caractère ϕ de $H_i^\times$, on note ϕ_* la restriction de ϕ à $F_q^\times$, pour $i = 1, 2$. On définit la somme de Gauss d'un caractère ϕ du groupe multiplicatif $H_i^\times$ par

$$G(\phi) := \sum_x \psi(T(x))\,\phi(x) \qquad \text{avec} \qquad x \in H_i^\times,\, i = 1, 2\,.$$

Proposition 3. *Soient* $i = 1, 2$ *et* ϕ *un caractère de* $H_i^\times$ *tel que* $\phi_* = \alpha$. *Il existe alors un homomorphisme de* $\mathbf{C}$*-algèbres* $\hat{\phi}$ *de* A_α *dans* $\mathbf{C}$ *tel que*

$$\hat{\phi}(b(\gamma)) = \varepsilon_i\, q^{-1}(q-1)^{-1}(\alpha\gamma)(-1)\, G(\gamma^*\phi)\,, \tag{9}$$

pour tout $\gamma \in X$.

La preuve de l'existence d'un tel homomorphisme consiste en la vérification de la relation:

$$\hat{\phi}(b(\gamma_1))\,\hat{\phi}(b(\gamma_2)) = \hat{\phi}(b(\gamma_1)b(\gamma_2))\,,$$

pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in X$. D'après (5) ceci équivaut à l'identité suivante:

$$\begin{aligned} q^{-2}(q-1)^{-2}(\gamma_1\gamma_2)(-1)\, G(\gamma_1^*\phi)\, G(\gamma_2^*\phi) &= q^{-1}(q-1)^{-1}\,\delta(\alpha\gamma_1\gamma_2) \\ + \varepsilon_i\, q^{-2}(q-1)^{-3}(\gamma_1\gamma_2)(-1)\, g(\alpha\gamma_1\gamma_2) &\sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\, g(\gamma_2\gamma^{-1})\, G(\gamma^*\phi)\,, \end{aligned}$$

pour $\gamma_1, \gamma_2 \in X$;
cette identité est équivalente à

$$\frac{G(\gamma_1^*\phi)\, G(\gamma_2^*\phi)}{g(\alpha\gamma_1\gamma_2)} + q(q-1)\,\delta(\alpha\gamma_1\gamma_2)\,\alpha(-1)$$
$$= \varepsilon_i(q-1)^{-1} \sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\, g(\gamma_2\gamma^{-1})\, G(\gamma^*\phi), \qquad \text{pour} \qquad \gamma_1, \gamma_2 \in X\,;$$

l'on somme sur $\gamma \in X$.

Cette dernière est un cas particulier du théorème 1 de [5], le cas de $H_1 = F \times F$ correspond à l'identité (i) et le cas de $H_2 = F_{q^2}$ correspond à l'identité (iv) du théorème 2 de [5]. Une démonstration détaillée est indiquée en [4].

La démonstration de la proposition (3) est ainsi achevée.

Nous nous proposons maintenant de démontrer que tout homomorphisme d'algèbres de A_α dans $\mathbf{C}$ est de la forme $\hat{\phi}$ avec un caractère multiplicatif ϕ de H_i, $i = 1$ ou 2.

LEMME 3. *Soient* $m \geqslant 0$ *un entier et* R *la* $\mathbf{C}$*-algèbre* $\mathbf{C}^m$. *Pour* $1 \leqslant i \leqslant m$, *soit* p_i *la projection de* R *sur* $\mathbf{C}$ *donnée par* $p_i(x) := x_i$, *pour* $x \in R$, $x = (x_1, ..., x_m)$. *On a les propriétés suivantes:*

(a) *Chaque* p_i *est un homomorphisme de* $\mathbf{C}$*-algèbres, pour* $1 \leqslant i \leqslant m$.

(b) *Tout homomorphisme de* $\mathbf{C}$*-algèbres de* R *dans* $\mathbf{C}$ *est un des* p_i *avec* $1 \leqslant i \leqslant m$.

(c) *La somme des* p_i *est égale à la trace* Tr *de* R *sur* $\mathbf{C}$, *c'est-à-dire que* $p_1 + ... + p_m = \mathrm{Tr}$.

(d) *Si* $H = (h_j)_{j \in J}$ *est une famille d'homomorphismes de* $\mathbf{C}$*-algèbres* $h_j : R \to \mathbf{C}$ *telle que* $\sum_{j \in J} h_j = n\,\mathrm{Tr}$, *alors* H *contient tout homomorphisme d'algèbres de* R *dans* $\mathbf{C}$ *exactement* n *fois, pour* $n > 0$ *entier.*

Seul le point (d) nécessite une vérification. D'après (b), on sait que chaque $h_j (j \in J)$ est un des projecteurs $p_i (1 \leqslant i \leqslant m)$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, soit n_i le nombre de fois où la projection p_i intervient dans la famille H et soit e_i l'élément de R tel que $p_i(e_i) = 1$ et $p_k(e_i) = 0$ pour tout $k \neq i$ avec $1 \leqslant k \leqslant m$. On trouve

$$n_i = \sum_{k=1}^{m} n_k\, p_k(e_i) = \sum_{j \in J} h_j(e_i) = n\,\mathrm{Tr}\,(e_i) = n\,,$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$. La famille H contient donc tout homomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres de R dans C exactement n fois. C.Q.F.D.

LEMME 4 (Poisson). *Soit* H *un groupe abélien fini et soit* H' *un sous-groupe de* H. *Etant donné un caractère* χ *de* H', *on note* $C(\chi)$ *l'ensemble des caractères* ψ *de* H *tels que la restriction de* ψ *à* H' *soit égale à* χ. *On a alors, pour tout* $x \in H$,

$$(\operatorname{card} C(\chi))^{-1} \sum_{\psi \in C(\chi)} \psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \notin H', \\ \chi(x), & \text{si} \quad x \in H'. \end{cases}$$

La preuve du lemme de Poisson est classique; nous l'appliquons maintenant au groupe multiplicatif $H_i^\times$ de l'algèbre H_i pour $i = 1, 2$. Soit toujours α un caractère fixé de $F^\times$; notons $C_i(\alpha)$ l'ensemble des caractères ϕ de $H_i^\times$ tels que la restriction ϕ_* de ϕ à $F_q^\times$ soit égale à α. On obtient:

LEMME 5. *On a, pour* $i = 1, 2$,

(a) $\operatorname{card} C_i(\alpha) = q - \varepsilon_i$,

(b) $(\operatorname{card} C_i(\alpha))^{-1} \sum_{\phi \in C_i(\alpha)} G(\phi) = \sum_a e(2a)\, \alpha(a), \quad a \in F_q^\times$.

En effet, on a $\operatorname{card} C_i(\alpha) = (\operatorname{card} F^\times)^{-1} \operatorname{card} H_i^\times$ et donc $\operatorname{card} C_1(\alpha) = q - 1$ et $\operatorname{card} C_2(\alpha) = q + 1$, d'où l'assertion (a).

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}(\operatorname{card} C_i(\alpha))^{-1} \sum_{\phi \in C_i(\alpha)} G(\phi) &= (\operatorname{card} C_i(\alpha))^{-1} \sum_{x \in H_i^\times} \psi(Tx) \sum_{\phi \in C_i(\alpha)} \phi(x) \\ &= \sum_a \psi(2a)\, \alpha(a), \quad a \in F_q^\times,\end{aligned}$$

d'après le lemme 4, d'où (b).

PROPOSITION 4. *La somme des homomorphismes* $\hat{\phi}: A_\alpha \to \mathbf{C}$ *avec* $\phi \in C_1(\alpha) \cup C_2(\alpha)$ *est égale à* $2\, T_\alpha$ *(deux fois la trace de* A_α*).*

En effet, on remarque tout d'abord qu'on a bien

$$\sum_{\phi \in C_1(\alpha) \cup C_2(\alpha)} \hat{\phi}(1) = \operatorname{card} C_1(\alpha) + \operatorname{card} C_2(\alpha) = 2q = 2\, T_\alpha(1).$$

Soit maintenant $\gamma \in X$; on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{\phi \in C_i(\alpha)} \hat{\phi}(b(\gamma)) &= \varepsilon_i\, q^{-1}(q-1)^{-1}(\alpha\gamma)(-1) \sum_{\phi \in C_i(\alpha)} G(\gamma^*\phi) \\ &= \varepsilon_i\, q^{-1}(q-1)^{-1}(\alpha\gamma)(-1) \sum_{\psi \in C_i(\alpha\gamma^2)} G(\psi) \\ &= \varepsilon_i\, q^{-1}(q-1)^{-1}(q-\varepsilon_i)\,(\alpha\gamma)(-1) \sum_a e(2a)\,(\alpha\gamma^2)(a), \quad a \in F_q^\times;\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{\phi \in C_1(\alpha) \cup C_2(\alpha)} \hat{\phi}(b(\gamma)) = -2q^{-1}(q-1)^{-1}(\alpha\gamma)(-1) \sum_{a} e(2a)(\alpha\gamma^2)(a), \quad a \in F_q^{\times},$$
$$= 2\, T_\alpha(b(\gamma)),$$

d'après (6) et (7) (théorème 2 et lemme 2). C.Q.F.D.

Pour tout caractère ϕ de $H_i^{\times}$, on définit le caractère conjugué $\bar{\phi}$ de H_i par $\bar{\phi}(x) := \phi(\bar{x})$, pour tout $x \in H_i^{\times}$, $i = 1, 2$.

Soit ϕ un caractère multiplicatif de H_i, $i = 1, 2$: on remarque que $\phi = \bar{\phi}$ si et seulement s'il existe $\beta \in X$, tel que $\beta^* = \phi$.

Pour tout $\phi \in C_1(\alpha) \cup C_2(\alpha)$, on a $\hat{\phi} = \hat{\bar{\phi}}$, puisque $G(\gamma^*\phi) = G(\gamma^*\bar{\phi})$, pour tout $\gamma \in X$.

D'autre part, soit $\beta \in X$ et soit ϕ_i le composé de β avec la norme de $H_i^{\times}$ sur $F^{\times}$, pour $i = 1, 2$. On a alors $\phi_i \in C_i(\beta^2)$ et

$$\varepsilon_1\, G(\gamma^*\phi_1) = \varepsilon_2\, G(\gamma^*\phi_2),$$

pour tout $\gamma \in X$; ici l'on applique le théorème de Hasse et Davenport, c.f. [3], qui dit, dans ce cas:

$$G(\gamma^*\phi_2) = -g(\gamma\beta)^2.$$

Il s'ensuit que les homomorphismes $\hat{\phi}_1$ et $\hat{\phi}_2$ sont égaux.

Vu le lemme 3, (d) et la proposition 4, il s'ensuit maintenant le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Tout homomorphisme de* **C***-algèbres de* A_α *dans* **C** *est de la forme* $\hat{\phi}$ *avec* ϕ *dans* $C_1(\alpha) \cup C_2(\alpha)$. *Pour* $i = 1, 2$ *et* $\phi, \psi \in C_i(\alpha)$, *on a* $\hat{\phi} = \hat{\psi}$ *si et seulement si* $\phi = \psi$ *ou* $\phi = \bar{\psi}$. *Pour* $\phi_1 \in C_1(\alpha)$ *et* $\phi_2 \in C_2(\alpha)$, *on a* $\hat{\phi}_1 = \hat{\phi}_2$ *si et seulement s'il existe un caractère* β *de* $F^{\times}$ *tel que* ϕ_1 *(resp.* ϕ_2*) soit le composé de* β *avec la norme de* $F \times F$ *(resp.* F_{q^2}*) sur* F.

RÉFÉRENCES

[1] CHANG, B. Decomposition of Gelfand-Graev characters of $GL_3(q)$. *Commun. Algebra 4* (1976), 375-401.

[2] CURTIS, C. W. and T. V. FOSSUM. On Centralizer Rings and Characters of Representations of Finite Groups. *Math. Zeitschr. 107* (1968), 402-406.

[3] DAVENPORT, H. und H. HASSE. Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktion in gewissen zyklischen Fällen. *J. Reine u. Angew. Math. 172* (1935), 151-182.