

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 32 (1986)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REPRÉSENTATION DE GELFAND-GRAEV ET IDENTITÉS DE BARNES LE CAS DE GL_2 D'UN CORPS FINI
Autor: Helvesen-Pasotto, Anna
Kapitel: §5. Calcul de la trace de l'algèbre A_α
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-55078>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

(v) pour Λ_1, Λ_2 caractères de F_2^\times , on a

$$(q+1)^{-1} \sum_{\Lambda} G_2(\Lambda_1 \Lambda) G_2(\Lambda_2 \Lambda) \\ = \frac{g(\lambda_1) g(\lambda_2) G_2(\Lambda_1 \Lambda_2)}{g(\lambda_1 \lambda_2)} + q(q-1) \delta(\lambda_1 \lambda_2) \lambda_1(-1) (\Lambda_1 \Lambda_2) (\varepsilon_0),$$

ici λ_1 (resp. λ_2) dénote la restriction de Λ_1 (resp. Λ_2) à F^\times , l'on somme sur les caractères Λ de F_2^\times dont la restriction à F^\times soit triviale, ε_0 désigne un élément de F_2^\times tel que $\varepsilon_0^{q-1} = -1$.

Les cinq identités sont des cas particuliers d'une identité plus générale qui fait l'objet du théorème 2 de notre publication [4]. La démonstration se base sur l'étude de certaines algèbres commutatives de degré 4 sur F et fait intervenir le groupe symétrique des permutations de quatre éléments ainsi que le groupe diédral D_4 du carré. L'identité générale s'énonce pour chaque $\sigma \in D_4$, mais elle ne dépend que de la classe de conjugaison de σ . Les cinq classes de conjugaison de D_4 fournissent les cinq identités de Barnes.

Dans la suite de cet article nous calculons la trace de l'algèbre A_α (§ 5) et nous utilisons les identités de Barnes (i) et (iv) pour exhiber les homomorphismes d'algèbres de A_α dans \mathbf{C} indépendamment de la table des caractères (§ 6). La comparaison de leur somme avec la trace montre que la liste des homomorphismes est complète et sans répétitions.

§ 5. CALCUL DE LA TRACE DE L'ALGÈBRE A_α

On note T_α la trace de l'algèbre A_α , $\alpha \in X$ fixé. Soit B la base de A_α formée par l'unité et les $b(\gamma)$, avec $\gamma \in X$; pour $b \in B$ et $a \in A_\alpha$, on définit le coefficient $\langle b' | a \rangle$ dans \mathbf{C} par la condition suivante:

$$a = \sum_{b \in B} \langle b' | a \rangle b;$$

on a, pour tout $a \in A_\alpha$,

$$T_\alpha(a) = \sum_{b \in B} \langle b' | ab \rangle.$$

On obtient

$$T_\alpha(1) = \dim_{\mathbf{C}}(A_\alpha) = q$$

et

$$T_\alpha(b(\gamma_1)) = \sum_{\gamma_2} \langle b(\gamma_2)' | b(\gamma_1) b(\gamma_2) \rangle$$

puisque $\langle 1' | b(\gamma) \rangle = 0$, pour tout $\gamma \in X$. D'après (5), l'on calcule

$$\begin{aligned} \langle b(\gamma_2)' | b(\gamma_1) b(\gamma_2) \rangle &= q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1) (-1) g(\alpha\gamma_1\gamma_2) g(\gamma_1\gamma_2^{-1}) g(\gamma_2\gamma_2^{-1}) \\ &= -q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1) (-1) g(\alpha\gamma_1\gamma_2) g(\gamma_1\gamma_2^{-1}), \end{aligned}$$

pour $\gamma_1, \gamma_2 \in X$, d'où

$$T_\alpha(b(\gamma_1)) = -q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1) (-1) \sum_{\gamma_2} g(\alpha\gamma_1\gamma_2) g(\gamma_1\gamma_2^{-1}),$$

ici l'on somme sur $\gamma_2 \in X$ et γ_1 est dans X . On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME 2. *La trace T_α de l'algèbre A_α prend les valeurs suivantes sur les générateurs: $T_\alpha(1) = q$ et*

$$(6) \quad T_\alpha(b(\gamma)) = -q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma) (-1) \sum_{\beta_1 \beta_2 = \alpha\gamma^2} g(\beta_1) g(\beta_2),$$

ici γ, β_1 et β_2 désignent des éléments de X .

LEMME 2. *Pour $\beta \in X$, on a*

$$(7) \quad (q-1)^{-1} \sum_{\beta_1 \beta_2 = \beta} g(\beta_1) g(\beta_2) = \sum_a e(2a) \beta(a),$$

avec $\beta_1, \beta_2 \in X$ et $a \in F^\times$.

C'est un cas particulier du lemme 5, (b) qu'on démontrera au § 5. Plus explicitement, on obtient

$$(q-1)^{-1} \sum_{\beta_1 \beta_2 = \beta} g(\beta_1) g(\beta_2) = \begin{cases} (q-1) \delta(\beta), & \text{si } 2 = 0 \text{ dans } F, \\ \beta \left(\frac{1}{2} \right) g(\beta), & \text{sinon.} \end{cases}$$

COROLLAIRE 1. *On a explicitement*

$$(8) \quad T_\alpha(b(\gamma)) = \begin{cases} -q^{-1} \gamma(-1) \delta(\alpha\gamma^2), & \text{si la caractéristique de } F \text{ est } 2, \\ -q^{-1} (q-1)^{-1}(\alpha\gamma) (-1) (\alpha^{-1}\gamma^{-2}) (2) g(\alpha\gamma^2), & \text{sinon.} \end{cases}$$