

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 32 (1986)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REPRÉSENTATION DE GELFAND-GRAEV ET IDENTITÉS DE BARNES LE CAS DE GL_2 D'UN CORPS FINI
Autor: Helversen-Pasotto, Anna
Kapitel: §3. Description de A_α en termes de générateurs et relations
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-55078>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

i.e. les $e_\alpha, \alpha \in X$, forment un système d'idempotents, deux à deux orthogonaux, de somme 1. Chaque $e_\alpha, \alpha \in X$, est un idempotent central, i.e. e_α est dans le centre de l'algèbre du groupe. Posons

$$H = CU.$$

On définit un caractère $\alpha\lambda$ de H par

$$(\alpha\lambda)(cu) = \alpha(c)\lambda(u), \quad \text{pour } c \in C, u \in U.$$

Posons

$$V_\alpha = \text{Ind}_H^G(\alpha\lambda), \quad \text{pour tout } \alpha \in X;$$

cette représentation induite se réalise dans l'idéal à gauche $C[G]e_\alpha e_\lambda$ et l'on a

$$V = \bigoplus_{\alpha \in X} V_\alpha.$$

L'algèbre d'entrelacement A_α de V_α s'identifie à l'algèbre $e_\alpha e_\lambda C[G]e_\alpha e_\lambda$ qui est égale à $e_\lambda C[G]e_\alpha e_\lambda$, d'où

$$A = \bigoplus_{\alpha \in X} A_\alpha.$$

Dans la suite, on se fixe un caractère central α et l'on étudie l'algèbre A_α .

§ 3. DESCRIPTION DE A_α EN TERMES DE GÉNÉRATEURS ET RELATIONS

Posons $e = e_\theta$ avec $\theta = \alpha\lambda$, on a alors $A_\alpha = e C[G]e = \text{End}_G(\text{Ind}_H^G(\theta))$. Soit R un système de représentants des doubles classes de G suivant H . On sait que l'ensemble

$$B = \{ere \mid r \in R, ere \neq 0\}$$

forme une base de A_α en tant qu'espace vectoriel sur C . Pour $h, h' \in H, r \in R$, l'on a

$$e h r h' e = \theta(hh') ere.$$

Pour tout $g \in G$, on définit un caractère $g\theta$ de gHg^{-1} par $(g\theta)(x) = \theta(g^{-1}xg)$, si $x \in gHg^{-1}$. On sait que, pour tout $g \in G$, la condition $ege \neq 0$ équivaut à

$$\theta|_{H \cap gHg^{-1}} = g\theta|_{H \cap gHg^{-1}}.$$

Rappelons que

$$u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pour } b \in F^+, c(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ pour } a \in F^\times,$$

$U = \{u(b) \mid b \in F^+\}$ et $C = \{c(a) \mid a \in F^\times\}$ et introduisons, en plus, les notations suivantes:

$$d(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pour } a \in F^\times, D = \{d(a) \mid a \in F^\times\} \text{ et } z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a la décomposition de Bruhat

$$(1) \quad G = C U D \cup C U D z U$$

et on vérifie facilement qu'on a, parmi d'autres, les relations suivantes,

$$(2) \quad d(a) u(b) = u(ab) d(a), a \in F^\times, b \in F^+,$$

$$(3) \quad z u(a) z = c(a) d(-a^{-2}) u(-a) z u(a^{-1}), a \in F^\times,$$

qui nous servirons dans la suite.

La réunion de D et Dz forme un système de représentants des doubles classes de G suivant $H = CU$, comme on le remarque à l'aide de (1). On calcule

$$\begin{aligned} (d(a)\theta)(c u(b)) &= \theta(d(a^{-1}) c u(b) d(a)) \\ &= \theta(c u(a^{-1}b)), \text{ d'après (2),} \\ &= \alpha(c) \psi(a^{-1}b), \end{aligned}$$

pour $a \in F^\times, c \in C$ et $b \in F^+$. Or $d H d^{-1} = H$, pour tout $d \in D$ et le calcul précédent montre que, pour $d \in D$,

$$\theta|_H = d\theta|_H \text{ si et seulement si } d = 1.$$

Pour $d \in D$, on a donc $ede \neq 0$, si et seulement si $d = 1$. Examinons maintenant le cas d'un représentant $r \in Dz$; on a $r = d(a)z$, avec $a \in F^\times$, et

$$r H r^{-1} = d(a)z C U z d(a^{-1}) = C z U z = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a \in F^\times, b \in F^+ \right\},$$

d'où

$$H \cap r H r^{-1} = C.$$

Mais $\theta|_C = dz \theta|_C$ pour tout $d \in D$. On a donc $edze \neq 0$, pour tout $d \in D$. Posons $B = \{e\} \cup \{e d z e \mid d \in D\}$. Alors B est une base de l'espace vectoriel sous-jacent à A_α . En particulier, on a

$$\dim_{\mathbb{C}}(A_{\alpha}) = q \quad \text{et donc} \quad \dim_{\mathbb{C}}(A) = q(q-1);$$

cela correspond bien aux résultats plus généraux de [9] et [11].

L'élément e est l'unité de l'algèbre A_{α} , dans la suite on le désignera aussi par 1; pour tout $a \in F^{\times}$, on pose

$$b(a) = e d(a) z e.$$

On définit le symbole de Kronecker δ pour $a \in F^{\times}$ par

$$\delta(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1, \\ 0 & \text{si } a \neq 1. \end{cases}$$

PROPOSITION 1. *L'unité et les éléments $b(a)$, avec $a \in F^{\times}$, forment une base de l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre A_{α} . La structure d'algèbre s'exprime par la relation suivante:*

$$(4) \quad \begin{aligned} & b(a_1)b(a_2) \\ &= q^{-1} \delta(a_1 a_2^{-1}) \alpha(a_1) + q^{-1} \sum_a \psi(a(a_1 + a_2) - a^{-1}) \alpha(a^{-1}) b(-a^2 a_1 a_2), \end{aligned}$$

où l'on somme sur tous les $a \in F^{\times}$ et où $a_1, a_2 \in F^{\times}$.

En effet, on a, pour $a_1, a_2 \in F^{\times}$,

$$\begin{aligned} b(a_1)b(a_2) &= ed(a_1)ze ed(a_2)ze = ed(a_1)ze_{\lambda}d(a_2)ze \\ &= q^{-1} \sum_b ed(a_1)z\psi(-b)u(b)d(a_2)ze \quad (b \in F_q^+) \\ &= q^{-1} ec(a_2)d(a_1 a_2^{-1})e + q^{-1} \sum_a \psi(-a) ed(a_1)zu(a)d(a_2)ze, \end{aligned}$$

$a \in F^{\times}$. Mais $c(a_2)e_{\alpha} = \alpha(a_2)e_{\alpha}$ et

$$d(a_1)zu(a)d(a_2)z = c(a)u(a^{-1}a_1)d(-a^2 a_1 a_2)zu(a^{-1}a_2);$$

d'après (2) et (3). Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & b(a_1)b(a_2) \\ &= q^{-1} \delta(a_1^{-1} a_2) \alpha(a_1) + q^{-1} \sum_a \psi(-a + a^{-1}(a_1 + a_2)) \alpha(a) ed(-a^{-2} a_1 a_2) ze \\ &= q^{-1} \delta(a_1^{-1} a_2) \alpha(a_1) + q^{-1} \sum_a \psi(a(a_1 + a_2) - a^{-1}) \alpha(a^{-1}) b(-a^2 a_1 a_2), \end{aligned}$$

où l'on somme sur $a \in F^{\times}$.

C.Q.F.D.

On remarque en particulier que l'algèbre A est commutative, ce qui correspond bien à la théorie générale, c.f. [9], [11].

Par une « transformation de Mellin », on introduit de nouveaux générateurs $b(\gamma)$ de A_α : on pose

$$b(\gamma) = (q-1)^{-1} \sum_a \gamma(a)b(a), \quad a \in F^\times, \gamma \in X.$$

On a la formule d'inversion

$$b(a) = \sum_\gamma \gamma(a^{-1}) b(\gamma)$$

où l'on somme sur $\gamma \in X$.

La relation (4) se transforme de la manière suivante:

$$\begin{aligned} & b(\gamma_1)(\gamma_2) \\ &= (q-1)^{-2} \sum_{a_1, a_2} \gamma_1(a_1)\gamma_2(a_2) b(a_1)b(a_2), \quad a_1, a_2 \in F^\times, \\ &= q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_a (\alpha\gamma_1\gamma_2)(a) \\ &+ q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, a_2} \psi(a(a_1+a_2)-a^{-1})\alpha(a^{-1})\gamma_1(a_1)\gamma_2(a_2)b(-a^2a_1a_2) \\ &= q^{-1}(q-1)^{-1} \delta(\alpha\gamma_1\gamma_2) \\ &+ q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, a_2, \gamma} \psi(a(a_1+a_2)-a^{-1})\alpha(a^{-1})\gamma_1(a_1)\gamma_2(a_2)\gamma(-a^{-2}a_1^{-1}a_2^{-1})b(\gamma) \\ &= q^{-1}(q-1)^{-1} \delta(\alpha\gamma_1\gamma_2) \\ &+ q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, a_2, \gamma} \psi(a_1+a_2+a) (\alpha\gamma\gamma_1\gamma_2)(-1) \\ &\quad (\alpha\gamma_1\gamma_2)(a) (\gamma_1\gamma^{-1})(a_1) (\gamma_2\gamma^{-1})(a_2)b(\gamma) \\ &= q^{-1}(q-1)^{-1} \delta(\alpha\gamma_1\gamma_2) \\ &+ q^{-1}(q-1)^{-2} (\alpha\gamma_1\gamma_2)(-1)g(\alpha\gamma_1\gamma_2) \sum_\gamma \gamma(-1)g(\gamma_1\gamma^{-1})g(\gamma_2\gamma^{-1})b(\gamma); \end{aligned}$$

ici l'on somme sur $a, a_1, a_2 \in F^\times$ et $\gamma \in X$. Le symbole de Kronecker δ est défini, pour $\beta \in X$, par

$$\delta(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = 1, \\ 0 & \text{si } \beta \neq 1. \end{cases}$$

La somme de Gauss $g(\beta)$ est définie, pour tout $\beta \in X$, par

$$g(\beta) = \sum_a \psi(a) \beta(a), \quad a \in F^\times.$$

Le résultat des calculs ci-dessus s'énonce maintenant sous la forme suivante:

THÉORÈME 1. *L'unité et les éléments $b(\gamma)$, avec $\gamma \in X$, forment une base de l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre A_α . La structure d'algèbre s'exprime par la relation suivante :*

$$(5) \quad b(\gamma_1) b(\gamma_2) = q^{-1}(q-1)^{-1} \delta(\alpha\gamma_1 \gamma_2) \\ + q^{-1}(q-1)^{-2} (\alpha\gamma_1\gamma_2) (-1) g(\alpha\gamma_1\gamma_2) \sum_{\gamma} \gamma(-1) g(\gamma_1\gamma^{-1}) g(\gamma_2\gamma^{-1}) b(\gamma)$$

pour $\gamma_1, \gamma_2 \in X$; on somme sur $\gamma \in X$.

§ 4. RAPPEL DE LA TABLE DES CARACTÈRES DE G

CALCUL DES VALEURS DES CARACTÈRES DE G SUR LES GÉNÉRATEURS DE A_α

Les caractères sont en « dualité » avec les classes de conjugaison. Correspondant aux quatre « types » de telles classes, il y a quatre « séries » de caractères. Toute la situation se résume dans le tableau suivant :

| | | caractères | χ_μ^1 | χ_μ^q | $\chi_{\mu, \nu}$ | χ_Λ |
|---|-------------------------------------|---|--------------|--------------|--|---|
| classes de conjugaison | | para- mètres | $\mu \in X$ | $\mu \in X$ | $\mu, \nu \in X$ $\mu \neq \nu$ modulo $(\mu, \nu) \sim (\nu, \mu)$ | $\Lambda \in Y$ modulo $\Lambda \sim \Lambda^q$ |
| repré- sentant | diviseurs élémentaires | | | | | |
| $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ | $X-a$ $X-a$ | $a \in F^\times$ | $\mu^2(a)$ | $q \mu^2(a)$ | $(q+1) \mu\nu(a)$ | $(q-1) \Lambda(a)$ |
| $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$ | 1 $(X-a)^2$ | $a \in F^\times$ | $\mu^2(a)$ | 0 | $\mu\nu(a)$ | $-\Lambda(a)$ |
| $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ | 1 $(X-a)(X-d)$ | $a, d \in F^\times$ $a \neq d$ modulo $(a, d) \sim (d, a)$ | $\mu(ad)$ | $\mu(ad)$ | $\mu(a) \nu(d)$ $+ \mu(d) \nu(a)$ | 0 |
| $\begin{pmatrix} 0 & N(x) \\ -1 & \text{Tr}(x) \end{pmatrix}$ | 1 $X^2 - \text{Tr}(x)X + N(x)$ | $x \in E^\times$ $x \notin F^\times$ modulo $x \sim x^q$ | $\mu(N(x))$ | $-\mu(N(x))$ | 0 | $-(\Lambda + \Lambda^q)(x)$ |