Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Autor: Raymond, Xavier Saint

Kapitel: 5.2. Contre-exemple à l'unicité lorsque le rang de L est constant

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55077

et un $T > 0$ avec $b(y, T) \neq 0$ pour tout y tel que $|y| < \delta$ (sinon, changer t en $-t$). Prenons alors sur $\mathscr{V}$ les coordonnées (z, t) où z est l'abscisse curviligne associée au champ $b(y, T) \cdot \partial_y$; on notera z_0 l'abscisse de x_0. Il existe alors un $\alpha > 0$ tel que $K = [z_0-\alpha, z_0+\alpha] \times [-T, T]$ soit un voisinage compact de x_0 dans $\mathscr{V}$ contenu dans le voisinage précédent.

Dans ces conditions, tout point de K est dans le support de u; en effet, $(z_0, 0) = x_0 \in \operatorname{supp} u$ par hypothèse, puis étant donné $(z, t) \in K$, on obtient par l'utilisation répétée du théorème 5.1 avec tantôt X, tantôt Y, que

$$(z, t) = e^{(t-T)X} e^{(z-z_0)Y} e^{TX}(z_0, 0) \in \operatorname{supp} u \cap K .$$

Remarque. Le théorème de Bony (théorème 5.1 ci-dessus) permet aussi de démontrer des théorèmes d'unicité globale. A titre d'exemple, énonçons le résultat pour un problème mi-local, mi-global: dans

$$\Omega = \{(y, t) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 + t^2 < 2\},$$

considérons le champ

$$\begin{cases} L = \partial_y + ie^{\frac{1}{y+1}}\,\partial_t & \text{si} \quad y < -1, \\ L = \partial_y & \text{si} \quad y \geqslant -1. \end{cases}$$

Alors, pour tout voisinage ω de $(0, 0)$ et toute $u \in C^1(\Omega)$ solution du système

$$\begin{cases} (L+c_0)u(x) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \quad \text{et} \\ u(x) = 0 \quad \text{dans} \quad \omega_- = \{(y, t) \in \omega \mid t \leqslant 0\}, \end{cases}$$

la fonction u s'annule au voisinage de $(0, 0)$.

(On remarquera que ce problème ne possède pas la propriété d'unicité locale; en effet, dans $\omega = \{(y, t) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 + t^2 < 1\}$, la fonction

$$\begin{cases} u(y, t) = \exp\left(-\displaystyle\int_0^y c_0(z, t)\,dz - \frac{1}{t}\right) & \text{si} \quad t > 0, \\ u(y, t) = 0 \quad \text{si} \quad t \leqslant 0, \end{cases}$$

est C^∞, solution de $(L+c_0)u(x) = 0$ dans ω, et vérifie $\operatorname{supp} u = \omega_+ = \{(y, t) \in \omega \mid t \geqslant 0\}$).

5.2. Contre-exemple à l'unicité lorsque le rang de $\mathscr{L}$ est constant

Lorsque le rang de $\mathscr{L}$ est constant, le champ L vérifie la condition (R) d'après le théorème de Frobenius (cf. 1.2). Dans l'énoncé suivant, $\mathscr{V}$ désigne la variété intégrale de $\mathscr{L}$ passant par x_0.

THÉORÈME 5.3. *Supposons qu'il existe un voisinage* Ω *de* x_0 *tel que le rang de* $\mathscr{L}$ *soit constant dans* Ω *et que*

$$\mathscr{V} \cap \Omega \subset \Omega_+ = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}.$$

Alors il existe un voisinage ω *de* x_0, $u \in C^\infty(\omega)$ *et* $a \in C^\infty(\omega)$ *tels que*

$$(5.4)\quad \begin{cases} (L+c_0+a)u(x) = 0 \ \textit{dans}\ \omega, \\ \mathscr{V} \cap \omega \subset \operatorname{supp} u \subset \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}, \quad \textit{et} \\ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n,\ \partial_x^\alpha a(x_0) = 0 \ \ (a \ \textit{est « plate » en}\ x_0). \end{cases}$$

De plus, si $c_0 = 0$, *on peut choisir* $a = 0$.

Démonstration. Le rang de $\mathscr{L}$ étant constant, on peut trouver des coordonnées locales dans un voisinage ω de x_0 qui redressent les variétés intégrales de $\mathscr{L}$, ou plus précisément, des coordonnées $x = (x', x'', x_n)$ avec $x' = (x_1, \ldots, x_r)$ et $x'' = (x_{r+1}, \ldots, x_{n-1})$, telles que:

1. $x_0 = (0, 0, 0)$.
2. $d\varphi(x_0) = (0, 0, 1)$.
3. Les variétés intégrales de $\mathscr{L}$ ont pour équations $x'' = Cte$, $x_n = Cte$ (en particulier, $\mathscr{V}$ a pour équation $x'' = 0$, $x_n = 0$).

Dans ce qui va suivre, nous aurons éventuellement besoin de réduire le voisinage ω. Le nombre d'étapes étant fini, et les propriétés obtenues restant vraies si on réduit le voisinage, nous utiliserons toujours la même lettre ω sans préciser les modifications de ce dernier.

Comme L reste tangent aux variétés intégrales de $\mathscr{L}$, nous avons $L\psi(x) = 0$ dans ω si $\psi(x) = x_n^3 - |x''|^2$. Posons

$$(5.5)\quad \begin{cases} u_0(x) = \exp\left(-1/\psi(x)\right) \quad \text{si} \quad x \in \omega \quad \text{et} \quad \psi(x) > 0, \quad \text{et} \\ u_0(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \omega \quad \text{et} \quad \psi(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

Alors $u_0 \in C^\infty(\omega)$, $Lu_0(x) = 0$ dans ω et $\mathscr{V} \cap \omega \subset \operatorname{supp} u_0$ puisque $u_0(x', 0, \varepsilon) > 0$ pour tout x' et tout $\varepsilon > 0$ tels que $(x', 0, \varepsilon) \in \omega$. Pour voir que $\operatorname{supp} u_0 \subset \omega_+$, il faut exprimer φ dans les coordonnées (x', x'', x_n).

Par le théorème des fonctions implicites (cf. le point 2 ci-dessus), il existe une fonction $\varphi_0 \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ telle que $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)$ équivaut dans ω à $x_n + \varphi_0(x', x'') \geqslant 0$. L'hypothèse sur $\mathscr{V}$ du théorème nous indique que $\varphi_0(x', 0) \geqslant 0$ dans ω (cf. le point 3 ci-dessus), donc par développement de Taylor en x'' à l'ordre zéro, $\varphi_0(x', x'') \geqslant -C|x''|$ dans ω pour une constante $C < \infty (C > 0)$. Si donc on a choisi ω assez petit pour que $|x''| < C^{-3}$ dans ω,

$$u_0(x) \neq 0 \Rightarrow \psi(x) > 0 \Rightarrow x_n > |x''|^{2/3} \Rightarrow x_n + \varphi_0(x', x'') > 0 \Rightarrow \varphi(x) \geqslant 0$$

d'où supp $u_0 \subset \omega_+$.

Nous avons donc donné une solution du problème (5.4) lorsque $c_0 = 0$. Sinon, le champ L étant non dégénéré, choisissons (lemme 1.3) des coordonnées (y, t) telles que

1. $x_0 = (0, 0)$.
2. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

Pour tout $j \in \mathbf{N}$, posons alors

$$b_j(y) = \partial_t^j b(y, 0) \qquad \text{et} \qquad c_j(y) = \partial_t^j c(y, 0)\,,$$

puis par récurrence,

$$(5.6) \qquad \begin{cases} v_0(y) = 0, \\ v_{j+1}(y) = -\sum_{k=0}^{j} C_j^k b_k(y) \cdot \partial_y v_{j-k}(y) - c_j(y) \qquad \text{pour} \quad j \geqslant 0\,. \end{cases}$$

Par le théorème de Borel (cf. Hörmander [11, th. 1.2.6]), il existe une fonction $v \in C^\infty(\omega)$ telle que $\partial_t^j v(y, 0) = v_j(y)$. Par (5.6), nous obtenons que la fonction

$$a(y, t) = -\left(\partial_t v(y, t) + ib(y, t) \cdot \partial_y v(y, t) + c(y, t)\right)$$

est plate en (0, 0).

La fonction $u(x) = e^{v(x)} u_0(x)$, où u_0 est donnée par (5.5) et v par ce qui précède est alors solution du problème (5.4).

Remarques. 1) Pour une discussion du rôle du terme d'ordre zéro, on se reportera au chapitre suivant.

2) On notera que par les théorèmes 5.2 et 5.3 nous avons complètement élucidé la question de l'unicité pour les problèmes caractéristiques de rang constant. En effet, distinguons les deux situations suivantes:

α — Le rang de $\mathscr{L}$ est inférieur ou égal à 2. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait unicité (pour toute perturbation a plate en x_0) est alors que la variété intégrale de $\mathscr{L}$ passant par x_0 ne reste pas localement dans $\{\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}$ (c'est nécessaire par le théorème 5.3, et suffisant par le théorème 5.2).

β — Le rang de $\mathscr{L}$ est supérieur ou égal à 3. Alors il n'y a jamais unicité « stable ». En effet, deux cas peuvent se produire: s'il existe des points arbitrairement proches de x_0 dans $S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)\}$ où le problème n'est pas caractéristique, nous pouvons appliquer le théorème 1.1; si le problème est caractéristique en tous les points de S, c'est que la variété intégrale de $\mathscr{L}$ passant par x_0 reste localement dans S, et nous pouvons appliquer le théorème 5.3.

Chapitre 6: Rôle du terme d'ordre zéro

Aux théorèmes 1.1, 2.2, 4.2 et 5.3, nous avons dû modifier le terme d'ordre zéro pour montrer qu'il n'y avait pas unicité de Cauchy. Il est alors naturel de se demander si de tels problèmes possèdent tout de même la propriété d'unicité pour certains termes d'ordre zéro. La réponse à cette question est positive comme nous le verrons ci-dessous.

Cependant, le rôle du terme d'ordre zéro est encore mal connu. Nous nous bornerons ici à énoncer deux remarques qui suggèrent la nature des conditions à imposer. La première d'entre elles (théorème 6.1) est dûe à Lewy [15].

Avant d'énoncer le premier théorème, rappelons que la résolubilité locale d'un champ complexe non dégénéré a été étudiée par Nirenberg et Trèves [17], et que sous les hypothèses du théorème 2.2, ainsi que sous les hypothèses du théorème 5.3 si rg $\mathscr{L} \geqslant 3$, le champ L n'est localement résoluble en aucun point d'un voisinage de x_0; de même, les hypothèses des théorèmes 1.1 et 4.2 entraînent qu'il existe de nombreux points voisins de x_0 où L n'est pas localement résoluble. Il en résulte qu'il existe des fonctions C^∞ c telles que l'équation $Lv - c = 0$ ne possède pas de solution v au voisinage de ces points.

Théorème 6.1. *Soit* $\mathscr{N}_j(c_0)$ *l'ensemble des points de* $\mathbf{R}^n$ *au voisinage desquels l'équation* $Lv(x) + c_0(x) = 0$ *ne possède pas de solution* $v \in C^j$. *S'il existe un voisinage* Ω *de* x_0 *tel que*

$$\overline{\mathscr{N}_j(c_0)} \supset \Omega_+ = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\},$$

alors pour tout voisinage ω *de* x_0 *et toute* $u \in C^j(\omega)$ *solution du système*

$$(6.1) \qquad \begin{cases} (L+c_0)u(x) = 0 & \text{dans } \omega \text{ et} \\ u(x) = 0 & \text{dans } \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}, \end{cases}$$

la fonction u *s'annule au voisinage de* x_0.