3.5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2 SOUS LA CONDITION (P)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

duisons les paraboles P_τ d'équations $\psi(z, t) = \tau$. Nous obtenons ainsi un point (z_1, t_1) du support de la trace de u sur $\mathscr{V}$ tel que $u = 0$ dans $\{(z, t) \in \mathscr{V} \mid \psi(z, t) \leqslant \psi(z_1, t_1)\}$. Or le problème (pour ψ) est non caractéristique en (z_1, t_1) et $\operatorname{rg} \mathscr{L}(z_1, t_1) = 2$ puisque nous sommes sur une variété intégrale de $\mathscr{L}$ de dimension 2. Nous pouvons donc appliquer le théorème 3.4 pour conclure que u est nulle au voisinage de (z_1, t_1) sur $\mathscr{V}$, ce qui contredit le fait que (z_1, t_1) est un point du support de la trace de u sur $\mathscr{V}$.

Nous avons donc obtenu que $u = 0$ dans $v \times]-T, T[$.

3.5. Démonstration du théorème 1.2 sous la condition (P)

Comme le problème est non caractéristique, nous pouvons faire usage du lemme 1.3 pour trouver des coordonnées locales $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$, un voisinage v de 0 dans $\mathbf{R}^{n-1}$ et un nombre $T > 0$ tels que

1. $x_0 = (0, 0)$,
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$,
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ dans $v \times]-T, T[$ à un facteur non nul près,
4. $v \times]-T, T[\subset \omega \cap \Omega$.

Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (1.2) et supposons qu'il existe $(y_0, t_0) \in v \times]0, T[$ tel que $u(y_0, t_0) \neq 0$. Si on avait $b(y_0, t) = 0$ pour tout $t \in]0, t_0[$, l'équation se réduirait à une équation différentielle ordinaire, ce qui conduirait à une contradiction.

Il existe donc $t_1 \in]0, t_0[$ tel que $b(y_0, t_1) \neq 0$. Il existe aussi tout un voisinage de y_0 tel que $b(y, t_1) \neq 0$ pour y dans ce voisinage, par continuité, et le vecteur

$$d(y) = b(y, t_1) / | b(y, t_1) |$$

est bien défini et régulier au voisinage de y_0; par conséquent, le champ réel $d(y) \cdot \partial_y$ admet en y_0 une courbe intégrale que nous noterons γ.

Comme la condition (P) est vérifiée dans $v \times]0, T[$, nous avons $b(y, t) = | b(y, t) | d(y)$ pour tout $(y, t) \in \gamma \times]0, T[$, et donc le champ L est tangent à $\gamma \times]0, T[$; nous pouvons désormais nous restreindre à $\gamma \times]-T, T[$ qui contient le point (y_0, t_0) où u ne s'annule pas et sur lequel nous prenons comme coordonnées le couple (z, t) où z est l'abscisse curviligne sur γ associée au champ $d(y) \cdot \partial_y$; z_0 désignera l'abscisse du point (y_0, t_0).

Par continuité, il existe un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que le problème restreint à $\gamma \times]-T, T[$ se présente de la façon suivante:

1. $\mathscr{V} =]z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon[\times]-T, T[\subset\gamma\times]-T, T[$;
2. $u(z, t_0) \neq 0$ pour $z \in]z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon[$;
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(z, t)\,\partial_z + c(z, t)$ dans $\mathscr{V}_+ =]z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon[\times[0, T[$;
4. $b(z, t) \geqslant 0$ dans $\mathscr{V}_+$ (par la condition (P)).

Comme dans la démonstration du théorème 3.4, introduisons la fonction $\psi(z, t) = t + t_0(z-z_0)^2\,\varepsilon^{-2}$ et les paraboles P_τ d'équations $\psi(z, t) = \tau$. Nous obtenons ainsi un point (z_2, t_2) du support de la trace de u sur $\mathscr{V}_+$ tel que $t_2 < t_0$ et $u = 0$ dans $\{(z, t) \in \mathscr{V} \mid \psi(z, t) \leqslant \psi(z_2, t_2)\}$.

Comme tout à l'heure, si on avait $b(z_2, t) = 0$ pour tout $t \in]t_2, T[$, on prouverait que $u(z_2, t_0) = 0$ ce qui contredit le point 2 ci-dessus. Il existe donc $t_3 \in]t_2, T[$ tel que $b(z_2, t_3) > 0$. Nous distinguons alors deux cas de figure:

1. Si $t_2 > 0$, posons $\theta(z) = t_2 + t_0\left(\dfrac{z_2-z_0}{\varepsilon}\right)^2 - t_0\left(\dfrac{z-z_0}{\varepsilon}\right)^2$ (en sorte que $t \geqslant \theta(z) \Leftrightarrow \psi(z, t) \geqslant \psi(z_2, t_2)$). Nous pouvons alors trouver un voisinage convexe w de (z_2, t_2) contenant (z_2, t_3) (où $b>0$) tel que b soit positive dans $w_+ = \{(z, t) \in w \mid t \geqslant \theta(z)\}$ et $u = 0$ dans $w_- = \{(z, t) \in w \mid t \leqslant \theta(z)\}$. Par le lemme 3.3 nous en déduisons que $u = 0$ au voisinage de (z_2, t_2) ce qui contredit le fait que (z_2, t_2) est un point du support de la trace de u sur $\mathscr{V}_+$.

2. Si $t_2 = 0$, posons $\theta(z) = 0$. Nous pouvons alors trouver un voisinage convexe w de (z_2, t_2) possédant les mêmes propriétés que dans le cas précédent, d'où la même conclusion.

Chapitre 4: Etude d'un modèle dans $\mathbf{R}^2$

Lorsque nous supprimons les hypothèses « techniques », le théorème 1.2 devient faux; c'est ce que montre l'un des premiers contre-exemples à l'unicité de Cauchy historiquement construits: le contre-exemple de Cohen [8]. Plutôt que d'en répéter la construction, que le lecteur trouvera par exemple dans Hörmander [9, th. 8.9.2], nous avons préféré étudier de façon assez précise un modèle dans $\mathbf{R}^2$ (ce qui assure que $\operatorname{rg} \mathscr{L} \leqslant 2$) qui fournit des contre-exemples où le champ L est complètement explicite; c'est l'objet de ce chapitre.