Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Autor: Raymond, Xavier Saint

Kapitel: 3.3. Unicité en dimension deux sous la condition (R)

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55077

$$\int e^{-2\tau\psi} e^{2\operatorname{Re}\int c} |v|^2 \leqslant \frac{8}{\tau} \int e^{-2\tau\psi} e^{2\operatorname{Re}\int c} |\partial_t v + ib\partial_y v + cv| \, |\partial_y v + c_1 v|$$

$$+ 8 \int e^{-2\tau\psi} e^{2\operatorname{Re}\int c} |\partial_t v + ib\partial_y v + cv| \, |(\partial_y\psi + i(t_0+\alpha-t))v| \, .$$

Il existe donc une constante C telle que pour toute $v \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec supp $v \subset K_{\varepsilon_0}$ et tout $\tau \geqslant \tau_0$,

$$\int e^{-2\tau\psi} |v|^2 \leqslant C \int e^{-2\tau\psi} |\partial_t v + ib\partial_y v + cv| \left(|\partial_y v + c_1 v| + |v|\right) . \tag{3.5}$$

3.3. Unicité en dimension deux sous la condition (R)

Nous continuons en donnant une version faible du théorème 1.2 sous la condition (R) lorsque l'espace est $\mathbf{R}^2$.

Théorème 3.4. *Supposons que* $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x_0) = 2$ *en un point* $x_0 \in \mathbf{R}^2$. *Si le problème est non caractéristique (en x_0), alors pour tout voisinage* ω *de* x_0 *et toute* $u \in C^1(\omega)$ *solution du système*

$$\left\{ \begin{array}{l} (L+c_0)u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega \quad \textit{et} \\ u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\} \, , \end{array} \right. \tag{3.6}$$

la fonction u *s'annule au voisinage de* x_0.

Démonstration. D'après le lemme 1.3, nous pouvons prendre sur $\mathbf{R}^2$ des coordonnées (y, t) telles que:

1. $x_0 = (0, 0)$,

2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$,

3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t)\,\partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

Si $b(0, 0) \neq 0$, nous sommes dans le cas elliptique et le résultat découle du théorème 3.1. Sinon, par l'hypothèse $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x_0) = 2$, il existe $k > 0$ tel que $\partial_t^k b(0, 0) \neq 0$ tandis que $\partial_t^j b(0, 0) = 0$ pour $j < k$. Alors, par le théorème de préparation de Malgrange (cf. Hörmander [11, th. 7.5.5]), il existe, pour $(y, t) \in]-Y, Y[\times]-T, T[$ avec $Y > 0$ et $T > 0$, une factorisation

$$b(y, t) = a(y, t)\left(t^k + a_{k-1}(y)t^{k-1} + \ldots + a_0(y)\right)$$

avec $a, a_0, \ldots, a_{k-1}$ des fonctions C^∞ à valeurs réelles telles que $a(y, t) \neq 0$ dans $]-Y, Y[\times]-T, T[$, et $a_j(0) = 0$ pour $j = 0, \ldots, k-1$. Nous allons maintenant découper le domaine $]-Y, Y[\times]-T, T[$ en petits morceaux pour pouvoir appliquer le lemme 3.3; ce découpage nous est donné par le lemme suivant:

LEMME 3.5. *Dans la situation décrite ci-dessus, il existe une suite d'intervalles ouverts disjoints* $(I_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *dont la réunion est dense dans* $]-Y, Y[$, *et pour chaque* $i \in \mathbf{N}$, *un nombre fini de fonctions* C^∞ $\theta_{i,j}: I_i \to \mathbf{R}$ *tels que pour tout* $y \in I_i$:

1. $j_1 < j_2 \Rightarrow \theta_{i,j_1}(y) < \theta_{i,j_2}(y)$,

2. $b(y, t) = 0 \Leftrightarrow \exists j$ *tel que* $t = \theta_{i,j}(y)$.

Démonstration du lemme. Avec les notations précédentes, posons

$$P(y, t) = t^k + a_{k-1}(y)t^{k-1} + \ldots + a_0(y)$$

qui est un polynôme en t à coefficients réels et réguliers en y.

Soit $\mathcal{O}_k$ l'ouvert de $]-Y, Y[$ tel que $P(y, t)$ possède k racines complexes distinctes en t pour $y \in \mathcal{O}_k$; notons $\mathcal{O}'_k$ l'intérieur du complémentaire de $\mathcal{O}_k$ dans $]-Y, Y[$. Si $\mathcal{O}'_k$ est vide, c'est que $\mathcal{O}_k$ est dense dans $]-Y, Y[$ et nous arrêtons là notre construction; sinon $P(y, t)$ possède au plus $k-1$ racines complexes distinctes en t pour $y \in \mathcal{O}'_k$. Nous définissons alors $\mathcal{O}_{k-1}$ comme l'ouvert de $\mathcal{O}'_k$ tel que $P(y, t)$ possède exactement $k-1$ racines complexes distinctes en t pour $y \in \mathcal{O}_{k-1}$, puis $\mathcal{O}'_{k-1}$ comme l'intérieur du complémentaire de $\mathcal{O}_{k-1}$ dans $\mathcal{O}'_k$. Et ainsi de suite; l'ouvert $\bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{O}_j$ est alors dense dans $]-Y, Y[$. Nous appelons $(I_i)_{i\in\mathbf{N}}$ les composantes connexes des ouverts $\mathcal{O}_j$.

Dans chaque intervalle I_i, les racines en t de $P(y, t)$ sont de multiplicité constante, et par le théorème des fonctions implicites, elles sont donc fonctions C^∞ de y; de plus, P étant à coefficients réels, θ est racine si et seulement si $\bar{\theta}$ est racine, et donc, toujours à cause de la multiplicité constante, les racines réelles et distinctes restent réelles et distinctes quand y décrit I_i. Ces racines réelles sont donc représentées par des fonctions C^∞ $\theta_{i,j}: I_i \to \mathbf{R}$ vérifiant 1. et 2.

Démonstration du théorème 3.4 (fin). Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (3.6). Supposons qu'elle soit non nulle en un point de $]-Y, Y[\times]0, T[$; alors elle est non nulle dans tout un voisinage de ce point, et donc il existe un point $(y_0, t_0) \in \operatorname{supp} u$ avec $y_0 \in I_i$ pour un $i \in \mathbf{N}$. L'intervalle I_i étant ouvert, il existe aussi $\varepsilon > 0$ tel que $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subset I_i$.

Posons $\psi(y, t) = t + t_0(y - y_0)^2\varepsilon^{-2}$ et considérons les paraboles P_τ d'équations $\psi(y, t) = \tau$. La fonction u est nulle en dessous de la parabole P_0 puisque $P_0 \subset \{t \leqslant 0\}$, mais P_{t_0} coupe le support de u et $P_{t_0} \cap \{t \geqslant 0\} \subset I_i \times [0, T[$. Par compacité, il existe donc un point $(y_1, t_1) \in \operatorname{supp} u \cap (I_i \times [0, T[)$ tel que $u = 0$ dans $\{(y, t) \in \omega \mid \psi(y, t) \leqslant \psi(y_1, t_1)\}$. Nous distinguerons alors deux cas:

1. Si $b(y_1, t_1) \neq 0$, le problème est elliptique en (y_1, t_1) et $d\psi(y_1, t_1) \neq 0$; donc par le théorème 3.1, $u = 0$ au voisinage de (y_1, t_1) ce qui contredit le fait que $(y_1, t_1) \in \operatorname{supp} u$.

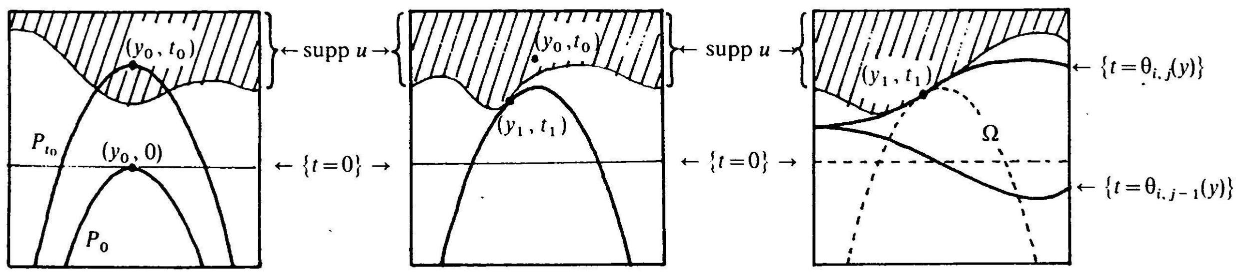
2. Si $b(y_1, t_1) = 0$, par le lemme 3.5 il existe j tel que $t_1 = \theta_{i,j}(y_1)$. En outre, le lemme 3.5 permet d'affirmer que

α. $\Omega = \{(y, t) \in I_i \times \mathbf{R} \mid \theta_{i,j-1}(y) < t < \theta_{i,j}(y)\}$ est un ouvert connexe;

β. b ne s'annule pas dans Ω, donc L est elliptique dans Ω.

Comme u s'annule dans $\{(y, t) \in \omega \mid \psi(y, t) < \psi(y_1, t_1)\}$, elle s'annule dans l'intersection de ce domaine avec Ω, qui est une partie ouverte non vide de Ω. Par le corollaire 3.2, u est nulle dans Ω.

De même, la fonction b ne s'annule pas dans $\{(y, t) \in I_i \times \mathbf{R} \mid \theta_{i,j}(y) < t < \theta_{i,j+1}(y)\}$, et on peut donc supposer, quitte à changer y en $-y$, que b est strictement positive dans ce domaine. Il existe donc un voisinage convexe w de (y_1, t_1) tel que b soit positive sur $w_+ = \{(y, t) \in w \mid t \geqslant \theta_{i,j}(y)\}$, strictement positive en un point $(y_1, t_2) \in w_+$, et tel que $u = 0$ dans $w_- = \{(y, t) \in w \mid t \leqslant \theta_{i,j}(y)\}$. Tout cela nous permet alors d'utiliser le lemme 3.3 au point (y_1, t_1): nous obtenons $u = 0$ au voisinage de (y_1, t_1), ce qui contredit le fait que $(y_1, t_1) \in \operatorname{supp} u$.



Les paraboles P_0 et P_{t_0}. Cas 1. Cas 2.

FIGURE 3.2.
Les paraboles P_τ.