**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 32 (1986)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU

PREMIER ORDRE

Autor: Raymond, Xavier Saint

Kapitel: 3.2. Un lemme technique

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-55077

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 01.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

un point  $x_1 \in B(x_0, \delta/2)$  tel que  $x_1 \notin F$ . Soit alors  $\varepsilon = \sup \{r \mid B(x_1, r) \cap F = \emptyset\}$ ; on a  $0 < \varepsilon \le \delta/2$  puisque F est fermé et que  $x_0 \in F$ , donc  $B(x_1, \varepsilon) \subset B(x_0, \delta) \subset \Omega$ . De plus, par compacité il existe  $x_2 \in F \cap \overline{B(x_1, \varepsilon)}$ . Soit  $\varphi(x) = |x - x_1|^2$ ; alors u est nulle dans  $\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \le \varepsilon^2\}$   $= \overline{B(x_1, \varepsilon)}$  puisque  $B(x_1, \varepsilon) \cap F = \emptyset$  par définition de  $\varepsilon$ ; or le problème est elliptique en  $x_2$  et  $d\varphi(x_2) = 2(x_2 - x_1) \neq 0$ , donc par le théorème 3.1, u = 0 au voisinage de  $x_2$ , ce qui contredit le fait que  $x_2 \in F = \sup u$ .

Cette contradiction prouve que le support de u est à la fois ouvert et fermé. Mais supp  $u \neq \Omega$  puisque  $\omega \neq \emptyset$  est contenu dans le complémentaire de ce support. Comme  $\Omega$  est connexe, c'est que supp  $u = \emptyset$ .

## 3.2. Un lemme technique

Pour préparer la démonstration du théorème 1.2, nous donnons maintenant un résultat d'unicité dans  $\mathbb{R}^2$  copié sur le résultat précédent, mais sous des hypothèses plus faibles.

Lemme 3.3. Soient  $\theta: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  et  $b: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$  deux fonctions  $C^{\infty}$ . Supposons qu'il existe un voisinage convexe  $\omega$  de  $(y_0, \theta(y_0))$  tel que b soit positive sur  $\omega_+ = \{(y, t) \in \omega \mid t \geqslant \theta(y)\}$  et  $b(y_0, t_0) > 0$  pour un  $t_0$  tel que  $(y_0, t_0) \in \omega_+$ . Alors pour toute  $u \in C^1(\omega)$  solution du système

(3.3) 
$$\begin{cases} \partial_t u + ib \, \partial_y u + cu = 0 \quad dans \quad \omega, \quad et \\ u = 0 \quad dans \quad \omega_- = \{(y, t) \in \omega \mid t \leq \theta(y)\} \end{cases}$$

la fonction u s'annule au voisinage de  $(y_0, \theta(y_0))$ .

Démonstration. Elle sera très semblable à celle du théorème 3.1. Pour commencer, nous allons choisir un poids  $\psi$  fabriqué de telle manière que l'opérateur n=N/b soit encore bien défini.

Si  $b(y_0, \theta(y_0)) > 0$ , nous sommes dans le cas elliptique, et le résultat découle du théorème 3.1; nous supposerons donc tout au long de cette démonstration que  $b(y_0, \theta(y_0)) = 0$ . Le  $t_0$  de l'hypothèse vérifie donc  $t_0 > \theta(y_0)$ , et il existe un voisinage de  $(y_0, t_0)$  contenu dans  $\omega_+$  tel que  $b \ge \delta > 0$  dans ce voisinage (et nous supposerons  $\delta \le 1$  dans la suite); nous pouvons même choisir ce voisinage de la forme

$$]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[\times]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[.$$

Nous posons alors

(3.4) 
$$\psi(y, t) = (y - y_0)^2 + \int_{\theta(y)}^t b(y, s) (t_0 + \alpha - s) ds.$$

Alors, pour tout  $0 < \varepsilon \le \alpha^2 \delta$ ,  $K_{\varepsilon} = \{x \in \omega_+ \mid \psi(x) \le \varepsilon\}$  est un compact tel que  $x_0$  soit un point intérieur de  $K_{\varepsilon} \cup \omega_-$ , ce qui nous permettra de déduire l'unicité de l'inégalité de Carleman (3.5) comme dans la démonstration du théorème 3.1.

Soit  $0 < \varepsilon_0 \le \alpha^2 \delta$  que nous fixerons plus loin. En vue d'écrire  $w = v \exp\left(-\tau \psi + \int_{t_0}^t c(y, s) ds\right)$ , posons

$$L_{\tau} = \left[ \exp(-\tau \psi + \int_{t_0}^t c(y, s) ds) \right] \left[ \partial_t + ib \partial_y + c \right] \left[ \exp(\tau \psi - \int_{t_0}^t c(y, s) ds) \right].$$

Grâce à (3.4), et en posant  $\int_{t_0}^t \partial_y c(y, s) ds = c_1(y, t) + ic_2(y, t)$  où  $c_1$  et  $c_2$  sont à valeurs réelles, on calcule que:

$$L_{\tau} = \left[ \partial_t + \tau b(t_0 + \alpha - t) - c \right] + ib \left[ \partial_y + \tau \partial_y \psi - (c_1 + ic_2) \right] + c$$
$$= M + iN = M + ibn$$

où nous avons séparé la partie autoadjointe de la partie anti-autoadjointe:

$$\begin{cases} M = \frac{\partial}{\partial t} + i\tau b \frac{\partial \psi}{\partial y} - ibc_1 \\ n = \frac{\partial}{\partial y} - i\tau (t_0 + \alpha - t) - ic_2 . \end{cases}$$

Alors, pour  $w \in C^1(\mathbb{R}^2)$  avec supp  $w \subset K_{\varepsilon_0}$ ,

$$\operatorname{Re} \int \frac{1}{i} L_{\tau} w \overline{n w} = \operatorname{Re} \int \frac{1}{i} M w \overline{n w} + \int b |nw|^{2} \geqslant \operatorname{Re} \int \frac{1}{i} M w \overline{n w}$$

puisque  $b \geqslant 0$  dans  $K_{\epsilon_0}$ ; puis,

$$2 \operatorname{Re} \int Mw(\overline{nw}/i) = -\int |w|^2 \partial_t (\tau(t_0 + \alpha - t) + c_2) - \int |w|^2 \partial_y (\tau b \partial_y \psi - bc_1)$$

par intégrations par parties. On obtient donc

$$\int |w|^2 \left[\tau \left(1 - \partial_y (b\partial_y \psi)\right) + \left(\partial_y (bc_1) - \partial_t (c_2)\right)\right]$$

$$\leq 2 \operatorname{Re} \int \frac{1}{i} L_\tau w \overline{nw} \leq 2 \int |L_\tau w| |nw|.$$

Il nous faut maintenant distinguer deux cas. Pour cela, posons  $\theta_0 = \sup\{t > \theta(y_0) \mid \forall s \in [\theta(y_0), t], b(y_0, s) = 0\}$ ; alors  $\theta(y_0) \leqslant \theta_0 < t_0$ . Si  $\theta_0 = \theta(y_0)$ , alors pour tout voisinage de  $(y_0, \theta(y_0))$  on peut trouver un  $\varepsilon > 0$  tel que  $K_{\varepsilon}$  soit contenu dans ce voisinage; en revanche, si  $\theta_0 > \theta(y_0)$ , alors  $\psi$  est nulle sur  $K_0 = \{y_0\} \times [\theta(y_0), \theta_0]$ , et c'est seulement pour tout voisinage de  $K_0$  qu'on peut trouver un  $\varepsilon > 0$  tel que  $K_{\varepsilon}$  soit contenu dans ce voisinage. Cette distinction de cas nous permet d'écrire:

1. Si  $\theta_0 = \theta(y_0)$ , calculons  $\partial_y \psi$  par la formule (3.4):

$$\partial_{y} \Psi = 2(y - y_{0}) + \int_{\theta(y)}^{t} \partial_{y} b(y, s) \left(t_{0} + \alpha - s\right) ds + \theta'(y) b(y, \theta(y)) \left(t_{0} + \alpha - \theta(y)\right)$$

et donc  $b(y_0, \theta(y_0)) = \partial_y \psi(y_0, \theta(y_0)) = 0$ ; d'où  $\partial_y (b \partial_y \psi)(y_0, \theta(y_0)) = 0$ , ce qui fait qu'on peut trouver  $\varepsilon_0$  assez petit pour que  $|\partial_y (b \partial_y \psi)| \le 1/2$  dans  $K_{\varepsilon_0}$ .

2. Si  $\theta_0 > \theta(y_0)$ , alors b est nulle sur  $K_0$ , et comme b est positive dans  $\omega_+$ ,  $\partial_y b$  est également nulle dans  $\{y_0\} \times ]\theta(y_0)$ ,  $\theta_0]$ , donc dans  $K_0$ ; d'où  $\partial_y (b\partial_y \psi) = 0$  dans  $K_0$ , ce qui fait qu'on peut trouver  $\varepsilon_0$  assez petit pour que  $|\partial_y (b\partial_y \psi)| \leq 1/2$  dans  $K_{\varepsilon_0}$ .

Le nombre  $\varepsilon_0 > 0$  étant choisi, oublions maintenant cette distinction des deux cas, et choisissons  $\tau_0$  suffisamment grand pour que  $|\partial_y(bc_1) - \partial_t c_2| \le \tau_0/4$  dans  $K_{\varepsilon_0}$ ; alors, pour  $\tau \ge \tau_0$ 

$$\frac{\tau}{4}\int |w|^2 \leqslant 2\int |L_{\tau}w| |nw|.$$

Enfin, pour  $v \in C^1(\mathbf{R}^2)$  avec supp  $v \subset K_{\varepsilon_0}$ , posons

$$w = v \exp(-\tau \psi + \int_{t_0}^t c(y, s) ds)$$

et reportons cette expression dans l'inégalité précédente; on obtient:

$$\int e^{-2\tau\psi} e^{2\operatorname{Re}\int c} |v|^2 \leq \frac{8}{\tau} \int e^{-2\tau\psi} e^{2\operatorname{Re}\int c} |\partial_t v + ib\partial_y v + cv| |\partial_y v + c_1 v|$$

$$+ 8 \int e^{-2\tau\psi} e^{2\operatorname{Re}\int c} |\partial_t v + ib\partial_y v + cv| |(\partial_y \psi + i(t_0 + \alpha - t))v|.$$

Il existe donc une constante C telle que pour toute  $v \in C^1(\mathbb{R}^2)$  avec supp  $v \subset K_{\varepsilon_0}$  et tout  $\tau \geqslant \tau_0$ ,

(3.5) 
$$\int e^{-2\tau\psi} |v|^2 \leq C \int e^{-2\tau\psi} |\partial_t v + ib\partial_y v + cv| (|\partial_y v + c_1 v| + |v|).$$

# 3.3. Unicité en dimension deux sous la condition (R)

Nous continuons en donnant une version faible du théorème 1.2 sous la condition (R) lorsque l'espace est  $\mathbb{R}^2$ .

Théorème 3.4. Supposons que  $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x_0) = 2$  en un point  $x_0 \in \mathbf{R}^2$ . Si le problème est non caractéristique (en  $x_0$ ), alors pour tout voisinage  $\omega$  de  $x_0$  et toute  $u \in C^1(\omega)$  solution du système

(3.6) 
$$\begin{cases} (L+c_0)u(x) = 0 & dans & \omega & et \\ u(x) = 0 & dans & \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}, \end{cases}$$

la fonction u s'annule au voisinage de  $x_0$ .

Démonstration. D'après le lemme 1.3, nous pouvons prendre sur  $\mathbb{R}^2$  des coordonnées (y, t) telles que:

- 1.  $x_0 = (0, 0),$
- $2. \quad \varphi(x) \varphi(x_0) = t,$
- 3.  $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \partial_y + c(y, t)$  à un facteur non nul près.

Si  $b(0,0) \neq 0$ , nous sommes dans le cas elliptique et le résultat découle du théorème 3.1. Sinon, par l'hypothèse rg  $\mathcal{L}(x_0) = 2$ , il existe k > 0 tel que  $\partial_t^k b(0,0) \neq 0$  tandis que  $\partial_t^j b(0,0) = 0$  pour j < k. Alors, par le théorème de préparation de Malgrange (cf. Hörmander [11, th. 7.5.5]), il existe, pour  $(y,t) \in ]-Y$ ,  $Y[\times]-T$ , T[ avec Y>0 et T>0, une factorisation

$$b(y, t) = a(y, t) (t^{k} + a_{k-1}(y)t^{k-1} + ... + a_{0}(y))$$