Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Autor: Raymond, Xavier Saint

Kapitel: 2.3. Ajustement des fonctions u_k

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55077

Il en résulte que $w \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ car w est continue sur K comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur K.

On a $w(y, 0, 0) = 1$, et si on a choisi le compact K assez petit, on a aussi $|w| > \dfrac{1}{2}$ dans K (un tel compact K pourra être choisi après coup, une fois que les λ_j auront été fixés); il en résulte que $|(D^\gamma w)/w|$ reste inférieur à 2 pour $\varepsilon \leqslant (\lambda_{|\gamma|})^{-1}$. Comme on peut écrire $D^\alpha(Nw_j/w)$ comme une somme (algébrique) comportant au plus $(|\alpha|+1)! \times 2$ termes de la forme $[(D^\beta Nw_j)/w]\,[(D^{\gamma_1}w)/w] \dots [(D^{\gamma_{|\alpha|}}w)/w]$ (avec $\alpha = \beta + \gamma_1 + \dots + \gamma_{|\alpha|}$, par la formule de Leibniz), on obtient une majoration

$$|D^\alpha(Nw_j/w)| \leqslant (|\alpha|+1)!\, 2^{|\alpha|+2} \sup \{|D^\beta Nw_j| \mid \beta \leqslant \alpha\}$$

pourvu que $\varepsilon \leqslant (\lambda_{|\alpha|})^{-1}$. Si donc nous demandons pour tout J que

$$\lambda_J > (J+1)!\, 2^{J+2} \sup \{|D^\alpha Nw_j(y, s, \varepsilon)| \mid (y, s, \varepsilon) \in K, |\alpha| \leqslant J \text{ et } j \leqslant J+1\},$$

alors pour $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$,

$$Mw = \varepsilon^{J-5}\left[Nw_J(1-\chi(\lambda_{J+1}\varepsilon)) + Nw_{J+1}\varepsilon\chi(\lambda_{J+1}\varepsilon)\right]$$

d'où $|D^\alpha(Mw/w)| \leqslant 2\varepsilon^{J-6}$ pour $|\alpha| \leqslant J$ (et $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$ et $(y, s, \varepsilon) \in K$). Cette majoration étant obtenue pour tout J, on peut remplacer la condition $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$ par $\varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$.

Pour $\alpha \in \mathbf{N}^n$ et $\nu \in \mathbf{N}$ fixés, on obtient, en posant $J = 6(1+|\alpha|) + 3\nu$, que pour $(y, s, \varepsilon) \in K$ et $\varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$,

$$|\partial^\alpha((L+c_0)h/h)| = |\varepsilon^{-6\alpha_t} D^\alpha(Mw/w)| \leqslant 2\varepsilon^{3\nu} = 2\delta^\nu.$$

2.3. Ajustement des fonctions u_k

Nous posons

$$\delta_k = k^{-3/4},\ l_k = \delta_k - \delta_{k+1}\left(\sim \frac{3}{4}k^{-7/4}\right) \quad \text{et} \quad m_k = \frac{1}{3}\delta_k + \frac{2}{3}\delta_{k+1}.$$

Puis nous considérons les fonctions $h_k(y, t) = h(y, t, \delta_k)$ définies par (2.3); ces fonctions vérifient (2.2) pour k suffisamment grand et $t \in]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[$ pourvu que $\delta_k^{-2} l_k$ tende vers 0 lorsque k tend vers l'infini, ce qui est bien le cas puisque $\delta_k^{-2} l_k \sim \dfrac{3}{4} k^{-1/4}$.

En vue de poser $u = h_k + h_{k+1}$ pour t voisin de m_k et de montrer que $a = -(L+c_0)u/u$ est C^∞, il nous faut déterminer le lieu d'équation $h_{k+1} = -h_k$ (qui est contenu dans le lieu d'équation $|h_{k+1}| = |h_k|$).

PROPOSITION 2.4. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage* Y *de* y_0, *une fonction* $\gamma \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ *à valeurs réelles telle que* $\gamma(y, 0) > 0$ *pour* $y \in Y$, *et trois suites de fonctions* $e_k \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, f_k *et* $g_k \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R})$ *à valeurs réelles telles que les fonctions* $h_k(y, t) = h(y, t, \delta_k)$ *définies en (2.3) (avec la fonction* γ *ci-dessus) vérifient* $h_k/h_{k+1} = \exp[f_k + ig_k]$ *avec*

$$(2.4)\quad \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty}\left(\sup\limits_Y |f_k(y, m_k)|\right) = 0\,, \\ \text{et} \quad \partial_t f_k(y, t) > \dfrac{\beta_0 k^2}{2} \quad \text{sur} \quad Y \times \,]\delta_{k+1}, \delta_k[\,; \end{cases}$$

$$(2.5)\quad \begin{cases} \text{pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^n, \text{ il existe } C_\alpha \text{ et } \nu_\alpha \in \mathbf{N} \text{ tels que sur} \\ Y \times \,]\delta_{k+1}, \delta_k[, |\partial^\alpha f_k(y, t)| \leqslant C_\alpha k^{\nu_\alpha} \text{ et } |\partial^\alpha g_k(y, t)| \leqslant C_\alpha k^{\nu_\alpha}\,; \end{cases}$$

$$(2.6)\quad \begin{cases} |h_k(y, t)| = |h_{k+1}(y, t)| \Leftrightarrow t = m_k + e_k(y) \\ \text{et} \quad e_k(y) = o(l_k) \quad (\text{pour } k \to \infty)\,. \end{cases}$$

Démonstration. Posons

$$\varphi_k(y, t) = \delta_k^{-4-k_1-k_2}\varphi(y, t, \delta_k) \text{ et } w_k(y, t) = w\big(y, \delta_k^{-2}(t-\delta_k), \delta_k^{1/3}\big)\,;$$

les constructions s'effectuent en trois temps.

1. *Construction de* γ. Nous allons choisir la fonction γ de telle sorte que

$$\operatorname{Log}|h_k(y, m_k)| - \operatorname{Log}|h_{k+1}(y, m_k)| = 0\,,$$

du moins si on néglige l'influence de w dans la formule (2.3). Nous posons donc

$$I_k(y) = \operatorname{Re}\varphi_k(y, m_k) - \operatorname{Re}\varphi_{k+1}(y, m_k)$$

$$= \Big[\beta(y, 0, 0) + o(1)\Big]\Big[-\frac{4}{9}\delta_k^{-5}\, l_k^2 + \frac{1}{9}\delta_{k+1}^{-5}\, l_k^2\Big] \quad (\text{pour } k \to \infty)$$

d'après (2.1), et donc si on a choisi Y de telle façon que $\beta(y, 0, 0) > 0$ pour $y \in Y$ (ce qui est possible grâce à (2.1)),

$$I_k(y) \sim -\frac{1}{3}\beta(y, 0, 0)\delta_k^{-5}\, l_k^2 \sim -\frac{3}{16}\beta(y, 0, 0)k^{1/4} \quad \text{pour} \quad y \in Y\,.$$

Remarquons que de même, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^{n-1}$,

$$|\partial^\alpha I_k(y)| \leqslant C_\alpha k^{1/4}\,.$$

Nous posons alors, pour k_0 assez grand, $\gamma_k(y) = -\sum\limits_{j=k_0}^{k-1} I_j(y)$; nous avons:

$$\gamma_k(y) \sim \frac{3}{20}\beta(y,0,0)k^{5/4} = \frac{3}{20}\beta(y,0,0)\delta_k^{-5/3}, \quad \text{et}$$

$$|\partial^\alpha \gamma_k(y)| \leqslant C_\alpha \delta_k^{-5/3} \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \mathbf{N}^{n-1},$$

et il existe donc une fonction $\gamma \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ telle que pour tout $k \geqslant k_0$, $\gamma_k(y) = \delta_k^{-5/3}\gamma(y, \delta_k)$ et que $\gamma(y, 0) = \dfrac{3}{20}\beta(y, 0, 0) > 0$ pour $y \in Y$.

2. *Construction des suites f_k et g_k.* Comme $\delta_k^{-2} l_k$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini, la fonction w fournie par la proposition 2.3 vérifie

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{Y\times]\delta_{k+1},\delta_{k-1}[} |w_k(y,t) - 1|\right) = 0; \tag{2.7}$$

nous utiliserons donc la détermination principale du logarithme de w, qui possède les mêmes propriétés de régularité que w; nous posons

$$\begin{aligned} f_k &= \operatorname{Re}\operatorname{Log} w_k - \operatorname{Re}\operatorname{Log} w_{k+1} + \gamma_k - \gamma_{k+1} + \operatorname{Re}\varphi_k - \operatorname{Re}\varphi_{k+1} \\ g_k &= \operatorname{Im}\operatorname{Log} w_k - \operatorname{Im}\operatorname{Log} w_{k+1} + \operatorname{Im}\varphi_k - \operatorname{Im}\varphi_{k+1}. \end{aligned}$$

Nous avons donc (cf. (2.3)) $h_k/h_{k+1} = \exp[f_k + ig_k]$, et grâce au choix de γ et à (2.7) nous obtenons la première moitié de (2.4) soit $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sup\limits_Y |f_k(y, m_k)|\right) = 0$. De plus, il est facile de vérifier (2.5) sur les formules ci-dessus définissant f_k et g_k.

3. *Construction de la suite e_k.* Compte tenu de ce qui précède, il ne nous reste plus qu'à montrer la minoration de $\partial_t f_k$ (deuxième moitié de (2.4)) et (2.6). Mais (2.6) découle de (2.4) parce que $|h_{k+1}(y,t)| = |h_k(y,t)|$ équivaut à $f_k(y,t) = 0$ et que $k^2 l_k \left(\sim \dfrac{3}{4}k^{1/4}\right)$ tend vers l'infini avec k.

En reprenant l'expression de f_k ci-dessus, calculons-en la dérivée par rapport à t

$$\begin{aligned} \partial_t f_k = \delta_k^{-2}\operatorname{Re}(\partial_s w_k/w_k) - \delta_{k+1}^{-2}\operatorname{Re}(\partial_s w_{k+1}/w_{k+1}) \\ + \partial_t \operatorname{Re}\varphi_k - \partial_t \operatorname{Re}\varphi_{k+1}. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont $O(\delta_k^{-2})$ lorsque k tend vers l'infini (cf. (2.7)); pour estimer les deux autres, on écrit, grâce à (2.1)

$$\begin{aligned} \delta^{1-k_1-k_2}\partial_t \operatorname{Re}\varphi(y,t,\delta) &= -2(t-\delta)\beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta) \\ &\quad - \delta^{-1}(t-\delta)^2\partial_\sigma\beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta) \\ &\leqslant -\beta_0(t-\delta) \end{aligned}$$

pourvu que $|y-y_0|$, $\delta^{-2}(t-\delta)$ et δ soient suffisamment petits. On obtient donc

$$\begin{aligned}\partial_t f_k(y,t) &\geqslant \beta_0\delta_k^{-5}(\delta_k-t)+\beta_0\delta_{k+1}^{-5}(t-\delta_{k+1})+O(\delta_k^{-2})\\ &\geqslant \beta_0\delta_k^{-5}(\delta_k-\delta_{k+1})+\beta_0(t-\delta_{k+1})(\delta_{k+1}^{-5}-\delta_k^{-5})+O(\delta_k^{-2})\\ &\geqslant \beta_0\delta_k^{-5}l_k+O(\delta_k^{-5}l_k k^{-1})+O(\delta_k^{-2}) \quad (\text{pour } k\to\infty).\end{aligned}$$

Enfin, $\delta_k^{-5}l_k \sim \frac{3}{4}k^2$ et $\delta_k^{-2}=k^{3/2}$, d'où (2.4) puis (2.6).

Maintenant que nous avons circonscrit le lieu où u s'annule (par (2.6)), il faut nous assurer que $(L+c_0)u$ s'annule suffisamment en ce même lieu pour que $(L+c_0)u/u$ soit régulière. Pour cela, nous devons modifier les fonctions h_k.

Proposition 2.5. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage* Y *de* y_0, *un entier* k_0 *et trois suites de fonctions* $u_k \in C^\infty(Y\times]\delta_{k+1},\delta_{k-1}[)$ *à valeurs complexes et* F_k *et* $G_k \in C^\infty(Y\times]\delta_{k+1},\delta_k[)$ *à valeurs réelles tels que si l'on pose*

$$r_k(y,t) = (L+c_0)u_k(y,t)/u_k(y,t)$$
$$v_k(y,t) = u_k(y,t)/u_{k+1}(y,t)$$

on ait $v_k=\exp[F_k+iG_k]$, *et* r_k, F_k *et* G_k *possèdent les propriétés suivantes pour* $k\geqslant k_0$:

$$(2.8)\quad \begin{cases} r_k(y,t) \text{ et } r_{k+1}(y,t) \text{ sont « plates » sur } t=m_k+e_k(y)\\ \text{(ce qui signifie que toutes leurs dérivées s'y annulent);}\end{cases}$$

$$(2.9)\quad \begin{cases} \text{pour tout } \alpha\in\mathbf{N}^n \text{ et tout } \nu\in\mathbf{N},\\ \lim\limits_{k\to\infty}\left(\sup\limits_{Y\times]\delta_{k+1},\delta_{k-1}[}|k^\nu\partial^\alpha r_k(y,t)|\right)=0;\end{cases}$$

$$(2.10)\quad \begin{cases} F_k(y,m_k+e_k(y))=0\\ \text{et } \partial_t F_k(y,t)\geqslant \dfrac{\beta_0k^2}{3} \text{ sur } Y\times]\delta_{k+1},\delta_k[;\end{cases}$$

$$(2.11)\quad \begin{cases} \text{pour tout } \alpha\in\mathbf{N}^n, \text{ il existe } C_\alpha \text{ et } \nu_\alpha\in\mathbf{N} \text{ tels que sur}\\ Y\times]\delta_{k+1},\delta_k[,\ |\partial^\alpha F_k(y,t)|\leqslant C_\alpha k^{\nu_\alpha} \text{ et } |\partial^\alpha G_k(y,t)|\leqslant C_\alpha k^{\nu_\alpha}.\end{cases}$$

Démonstration : en deux parties.

1. *Construction de la suite* u_k. Nous choisissons les fonctions $u_k(y,t)$ par la formule $u_k=h_k(1+\varepsilon_k)$ avec

$$\varepsilon_k(y, t) = \varepsilon(y, l_k^{-1}(t-\delta_k), \delta_k)$$

où la fonction $\varepsilon(y, \tau, \delta)$ est à choisir. Pour obtenir (2.8), il faudra que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$,

$$\partial^\alpha[(L+c_0)h_k/h_k] + \partial^\alpha[L\varepsilon_k/(1+\varepsilon_k)] = 0$$

sur $t = m_k + e_k(y)$ et sur $t = m_{k-1} + e_{k-1}(y)$. Si nous demandons de plus à la fonction ε de s'annuler sur les fermés Φ_k et Ψ_k définis ci-dessous, ces conditions sont encore équivalentes à la suite d'équations suivante:

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } j \geqslant 1 \text{ et tout } k \geqslant k_0, \\ \qquad \partial_\tau^j \varepsilon(y, \tau, \delta) = \varphi_{j,k}(y) \text{ sur} \\ \Phi_k = \{(y, \tau, \delta) \mid y \in \bar{Y}, \delta = \delta_k \text{ et } \tau = l_k^{-1}(m_k+e_k(y)-\delta_k)\}, \\ \qquad \partial_\tau^j \varepsilon(y, \tau, \delta) = \psi_{j,k}(y) \text{ sur} \\ \Psi_k = \{(y, \tau, \delta) \mid y \in \bar{Y}, \delta = \delta_k \text{ et } \tau = l_k^{-1}(m_{k-1}+e_{k-1}(y)-\delta_k)\}, \end{array} \right.$$

où les fonctions $\varphi_{j,k}(y)$ et $\psi_{j,k}(y)$ s'expriment en fonction des dérivées de $(L+c_0)h_k/h_k$ et sont donc à décroissance rapide en k ainsi que toutes leurs dérivées grâce à (2.2). Nous demanderons aussi à la fonction ε de vérifier

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } l > 0 \text{ et tout } j \geqslant 0, \text{ ainsi que pour } j = l = 0, \\ \text{et pour tout } k \geqslant k_0, \partial_\tau^j \partial_\delta^l \varepsilon(y, \tau, \delta) = 0 \quad \text{sur} \quad \Phi_k \quad \text{et} \quad \Psi_k, \quad \text{et} \end{array} \right.$$

$$(2.14) \qquad \partial_\delta^l \varepsilon(y, \tau, 0) = 0 \quad \text{pour tout} \quad l \geqslant 0.$$

Il existe une fonction $\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ vérifiant (2.12), (2.13) et (2.14): elle nous est fournie par le théorème d'extension de Whitney [26] appliqué au fermé

$$\{(y, \tau, \delta) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \delta = 0\} \cup \left(\bigcup_{k \geqslant k_0} \Phi_k \right) \cup \left(\bigcup_{k \geqslant k_0} \Psi_k \right).$$

Les conditions de compatibilité requises pour pouvoir utiliser ce théorème sont trivialement vérifiées puisque les fonctions $\varphi_{j,k}$ et $\psi_{j,k}$ sont à décroissance rapide en k ainsi que leurs dérivées, et que $l_k^{-1}(m_k+e_k(y)-\delta_k) = -\frac{2}{3} + O(k^{-1})$ et $l_k^{-1}(m_{k-1}+e_{k-1}(y)-\delta_k) = \frac{1}{3} + O(k^{-1})$ (pour $k \to \infty$).

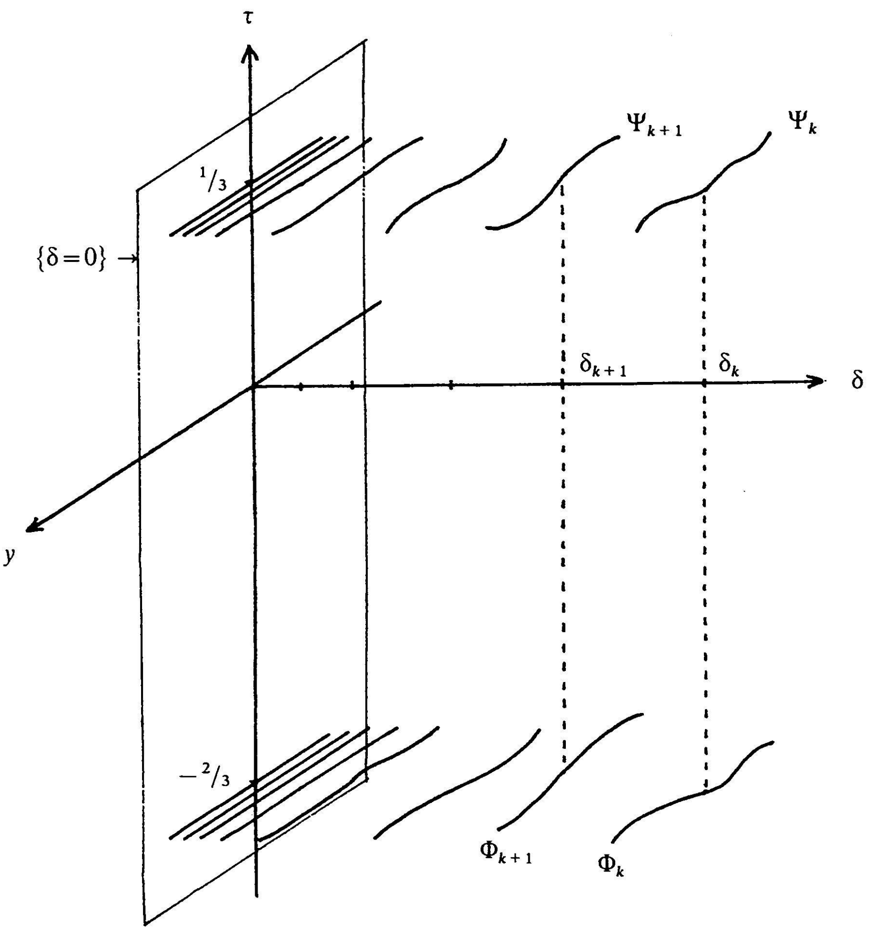

FIGURE 2.1.
Le fermé auquel on applique le théorème de Whitney.

2. *Construction des suites F_k et G_k*. Les équations (2.12) ont été choisies pour que r_k et r_{k+1} soient plates sur $t = m_k + e_k(y)$: la propriété (2.8) est donc acquise. De la condition (2.14) nous tirons que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$ et tout $\nu \in \mathbf{N}$,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{Y\times]\delta_{k+1},\delta_{k-1}[} |\, k^\nu \partial^\alpha \varepsilon_k \,|\right) = 0\,, \tag{2.15}$$

et par conséquent, on obtient (2.9) en utilisant (2.2) et la formule

$$\partial^\alpha r_k = \partial^\alpha\big[(L+c_0)h_k/h_k\big] + \partial^\alpha\big[L\varepsilon_k/(1+\varepsilon_k)\big]\,.$$

L'estimation (2.15) permet aussi d'utiliser la détermination principale du logarithme de $1 + \varepsilon$; nous posons donc:

$$F_k = f_k + \operatorname{Re}\operatorname{Log}(1+\varepsilon_k) - \operatorname{Re}\operatorname{Log}(1+\varepsilon_{k+1})$$
$$G_k = g_k + \operatorname{Im}\operatorname{Log}(1+\varepsilon_k) - \operatorname{Im}\operatorname{Log}(1+\varepsilon_{k+1})\,.$$

Nous avons alors $v_k = \exp[F_k + iG_k]$, et F_k et G_k vérifient (2.10) et (2.11) grâce à ces formules qui les définissent et à (2.4), (2.5), (2.6), (2.13) $(j=l=0)$ et (2.15).

2.4. CONSTRUCTION DES FONCTIONS u ET a

Par un calcul élémentaire nous voyons que pour $y \in Y$ et k assez grand, $\delta_{k+1} < \delta_k - \frac{3}{4} l_k < m_k + e_k(y) < \delta_{k+1} + \frac{3}{4} l_{k+1} < \delta_k$. Nous choisissons alors une fonction à valeurs réelles $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que

$$\chi(\tau) = 1 \quad \text{pour} \quad \tau \in [-3/4, 3/4],$$
$$\operatorname{supp} \chi \subset [-1, 1] \quad \text{et} \quad \chi(\tau) \in [0, 1] \quad \text{pour} \quad \tau \in [-1, 1];$$

puis avec $\chi_k(t) = \chi(l_k^{-1}(t - \delta_k))$ nous posons

$$\begin{cases} u(y, t) = \sum_{k \geqslant k_0} \chi_k(t) u_k(y, t) & \text{pour} \quad (y, t) \in Y \times]0, \delta_{k_0}[, \\ u(y, t) = 0 & \text{pour} \quad (y, t) \in Y \times]-\delta_{k_0}, 0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(y, t) = -(L + c_0) u(y, t)/u(y, t) & \text{pour} \quad u(y, t) \neq 0, \\ a(y, t) = 0 & \text{pour} \quad u(y, t) = 0. \end{cases}$$

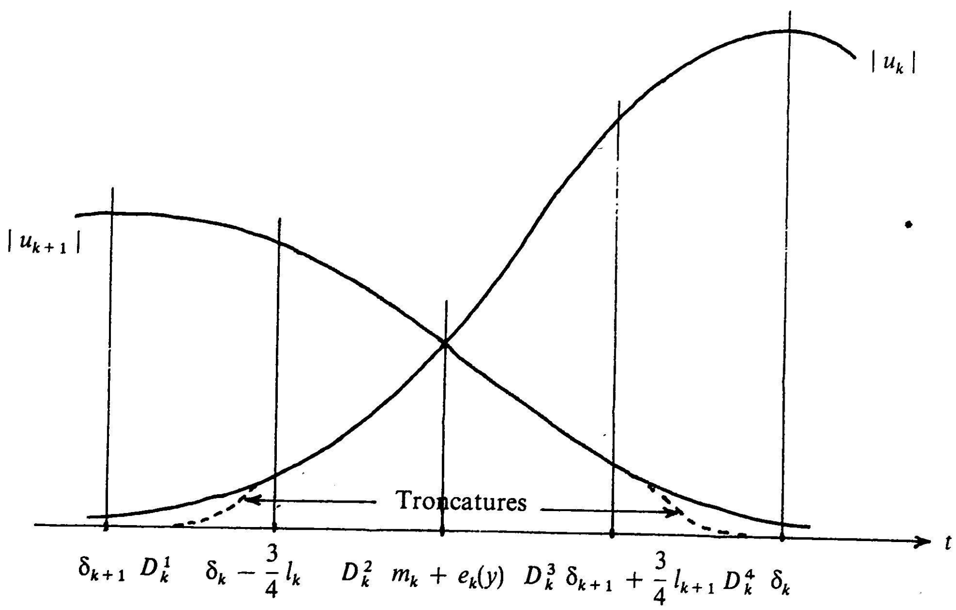

FIGURE 2.2.
Profils des fonctions u_k et u_{k+1} pour $t \in [\delta_{k+1}, \delta_k]$.