Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Autor: Raymond, Xavier Saint

Kapitel: 2.1. Nouveau choix de coordonnées

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55077

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

où les $\alpha_j(x)$ et les $\beta_j(x)$ sont à valeurs réelles. Pour $k = 1, ..., n-1$, soit $y_k(x)$ la solution du système

$$\begin{cases} y_k(x', 0) = x_k \\ \partial_n y_k + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \partial_j y_k = 0 . \end{cases}$$

Si de plus nous posons $t(x) = x_n$, comme la matrice jacobienne $\dfrac{\partial(y, t)}{\partial x}$ admet l'unité pour déterminant en $(0, ..., 0)$, nous pouvons utiliser (y, t) comme nouvelles coordonnées locales; nous obtenons que $L + c_0 = (Lt)\partial_t + \sum(Ly_k)\partial_{y_k} + c_0$ est de la forme 3, d'où le lemme.

Chapitre 2: Construction d'un contre-exemple

Dans ce chapitre, nous proposons une démonstration du théorème 1.1. La méthode utilisée pour obtenir ce résultat est désormais classique; elle a été mise au point successivement par Cohen [8], Pliś [18], Hörmander [10], Alinhac-Zuily [3]. Ici, nous suivrons de très près la démonstration du théorème 1 d'Alinhac [1] (qui, pour le premier ordre, est un cas particulier du théorème 2.2 ci-dessous avec $k_1 = 0$ et $k_2 = 1$).

La technique consiste à choisir une suite de valeurs positives δ_k tendant vers 0, puis à construire par les méthodes de l'optique géométrique des fonctions u_k, pour $\varphi(x)$ voisin de $\varphi(x_0) + \delta_k$, qui soient approximativement dans le noyau de $L + c_0$: c'est ce que nous faisons en 2.2. Puis on ajuste la taille de ces fonctions afin de pouvoir les recoller pour obtenir une solution u définie au voisinage de x_0 et telle que u et $a = -(L+c_0)u/u$ soient régulières: c'est l'opération effectuée en 2.3, les dernières vérifications étant reportées en 2.4.

Afin de limiter la complexité de la construction, il convient de choisir un bon système de coordonnées. C'est ce par quoi nous commençons.

2.1. Nouveau choix de coordonnées

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 1.1 et fixons le voisinage Ω. Grâce au lemme 1.3, nous pouvons déjà trouver des coordonnées locales $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ dans Ω (quitte à restreindre ce dernier) telles que

1. $x_0 = (0, 0)$
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

De plus, en utilisant l'hypothèse $x_0 \in \bar{S}_3$, on peut trouver un point $x_3 = (y_3, 0) \in \Omega$ tel que $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x_3) \geqslant 3$. Nous pouvons alors écrire notre opérateur $L + c_0$ sous une forme encore plus précise que celle donnée par le point 3. ci-dessus, comme le montre le lemme suivant.

LEMME 2.1. *Supposons que* $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ *et que* $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x_3) \geqslant 3$ *pour un point* $x_3 \in S = \mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}$. *Alors, pour tout voisinage* Ω *de* x_3, *il existe un point* $x_2 \in \Omega \cap S$, *un voisinage* ω *de* x_2 *et des entiers* $k_1 \geqslant 0$ *et* $k_2 > 0$ *tels que* $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$ *et* $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$ *dans* ω *avec* $(b_1(x_2), b_2(x_2))$ *linéairement indépendants.*

Démonstration. On peut déjà supposer que Ω est suffisamment petit pour que le rang de $\mathscr{L}$ reste supérieur ou égal à 3 dans $\Omega \cap S$.

Soit $k_1 = \inf\{k \geqslant 0 \mid \exists x \in \Omega \cap S : \partial_t^k b(x) \neq 0\}$. Alors $k_1 < \infty$ car $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x_3) \geqslant 3$. Soit donc x_1 un point de $\Omega \cap S$ tel que $\partial_t^{k_1} b(x_1) \neq 0$, et soit $\omega \subset \Omega$ un voisinage de x_1 tel que $\partial_t^{k_1} b(x) \neq 0$ pour tout $x \in \omega \cap S$. Dans ω, on a $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$ avec $b_1(x) \neq 0$ si $x \in S$.

Soit maintenant $k_2 = \inf\{k > 0 \mid \exists x \in \omega \cap S : \partial_t^k b_1(x)$ et $b_1(x)$ soient linéairement indépendants$\}$. Alors $k_2 < \infty$ car $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x_1) \geqslant 3$. On peut donc écrire dans ω, $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$ et il existe un point $x_2 \in \omega \cap S$ tel que $b_1(x_2)$ et $b_2(x_2)$ soient linéairement indépendants.

Ce lemme nous permettra donc de déduire le théorème 1.1 du théorème suivant (que nous démontrerons aux paragraphes 2.2, 2.3 et 2.4).

THÉORÈME 2.2. *Supposons que* $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$, *que* $b : \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n-1}$ *et* $c : \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *sont des fonctions* C^∞ *dans un voisinage* Ω *de* $x_0 = (y_0, 0)$ *et qu'il existe des entiers* $k_1 \geqslant 0$ *et* $k_2 > 0$ *tels que* $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$ *et* $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$ *dans* Ω *avec* $(b_1(x_0), b_2(x_0))$ *linéairement indépendants. Alors il existe un voisinage* ω *de* x_0, $u \in C^\infty(\omega)$ *et* $a \in C^\infty(\omega)$ *vérifiant (1.1).*

2.2. OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Nous dirons que $w \in B^\infty(\mathbf{R}^n \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ si $w(x, \delta)$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}^n \times [0, \infty[$, indéfiniment dérivable en x pour $\delta > 0$ et dont les dérivées restent bornées quand δ tend vers 0.