où les $\alpha_j(x)$ et les $\beta_j(x)$ sont à valeurs réelles. Pour $k = 1, \ldots, n-1$, soit $y_k(x)$ la solution du système

$$\begin{cases} y_k(x', 0) = x_k \\ \partial_n y_k + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \partial_j y_k = 0 \,. \end{cases}$$

Si de plus nous posons $t(x) = x_n$, comme la matrice jacobienne $\dfrac{\partial(y, t)}{\partial x}$ admet l'unité pour déterminant en $(0, \ldots, 0)$, nous pouvons utiliser (y, t) comme nouvelles coordonnées locales; nous obtenons que $L + c_0 = (Lt)\partial_t + \sum (Ly_k)\partial_{y_k} + c_0$ est de la forme 3, d'où le lemme.

Chapitre 2: Construction d'un contre-exemple

Dans ce chapitre, nous proposons une démonstration du théorème 1.1. La méthode utilisée pour obtenir ce résultat est désormais classique; elle a été mise au point successivement par Cohen [8], Pliś [18], Hörmander [10], Alinhac-Zuily [3]. Ici, nous suivrons de très près la démonstration du théorème 1 d'Alinhac [1] (qui, pour le premier ordre, est un cas particulier du théorème 2.2 ci-dessous avec $k_1 = 0$ et $k_2 = 1$).

La technique consiste à choisir une suite de valeurs positives δ_k tendant vers 0, puis à construire par les méthodes de l'optique géométrique des fonctions u_k, pour $\varphi(x)$ voisin de $\varphi(x_0) + \delta_k$, qui soient approximativement dans le noyau de $L + c_0$: c'est ce que nous faisons en 2.2. Puis on ajuste la taille de ces fonctions afin de pouvoir les recoller pour obtenir une solution u définie au voisinage de x_0 et telle que u et $a = -(L+c_0)u/u$ soient régulières: c'est l'opération effectuée en 2.3, les dernières vérifications étant reportées en 2.4.

Afin de limiter la complexité de la construction, il convient de choisir un bon système de coordonnées. C'est ce par quoi nous commençons.

2.1. Nouveau choix de coordonnées

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 1.1 et fixons le voisinage Ω. Grâce au lemme 1.3, nous pouvons déjà trouver des coordonnées locales $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ dans Ω (quitte à restreindre ce dernier) telles que

1. $x_0 = (0, 0)$
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

De plus, en utilisant l'hypothèse $x_0 \in \bar{S}_3$, on peut trouver un point $x_3 = (y_3, 0) \in \Omega$ tel que rg $\mathscr{L}(x_3) \geqslant 3$. Nous pouvons alors écrire notre opérateur $L + c_0$ sous une forme encore plus précise que celle donnée par le point 3. ci-dessus, comme le montre le lemme suivant.

LEMME 2.1. *Supposons que* $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ *et que* rg $\mathscr{L}(x_3) \geqslant 3$ *pour un point* $x_3 \in S = \mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}$. *Alors, pour tout voisinage* Ω *de* x_3, *il existe un point* $x_2 \in \Omega \cap S$, *un voisinage* ω *de* x_2 *et des entiers* $k_1 \geqslant 0$ *et* $k_2 > 0$ *tels que* $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$ *et* $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$ *dans* ω *avec* $(b_1(x_2), b_2(x_2))$ *linéairement indépendants.*

Démonstration. On peut déjà supposer que Ω est suffisamment petit pour que le rang de $\mathscr{L}$ reste supérieur ou égal à 3 dans $\Omega \cap S$.

Soit $k_1 = \inf \{k \geqslant 0 \mid \exists x \in \Omega \cap S : \partial_t^k b(x) \neq 0\}$. Alors $k_1 < \infty$ car rg $\mathscr{L}(x_3) \geqslant 3$. Soit donc x_1 un point de $\Omega \cap S$ tel que $\partial_t^{k_1} b(x_1) \neq 0$, et soit $\omega \subset \Omega$ un voisinage de x_1 tel que $\partial_t^{k_1} b(x) \neq 0$ pour tout $x \in \omega \cap S$. Dans ω, on a $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$ avec $b_1(x) \neq 0$ si $x \in S$.

Soit maintenant $k_2 = \inf \{k > 0 \mid \exists x \in \omega \cap S : \partial_t^k b_1(x)$ et $b_1(x)$ soient linéairement indépendants$\}$. Alors $k_2 < \infty$ car rg $\mathscr{L}(x_1) \geqslant 3$. On peut donc écrire dans ω, $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$ et il existe un point $x_2 \in \omega \cap S$ tel que $b_1(x_2)$ et $b_2(x_2)$ soient linéairement indépendants.

Ce lemme nous permettra donc de déduire le théorème 1.1 du théorème suivant (que nous démontrerons aux paragraphes 2.2, 2.3 et 2.4).

THÉORÈME 2.2. *Supposons que* $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$, *que* $b : \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n-1}$ *et* $c : \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *sont des fonctions* C^∞ *dans un voisinage* Ω *de* $x_0 = (y_0, 0)$ *et qu'il existe des entiers* $k_1 \geqslant 0$ *et* $k_2 > 0$ *tels que* $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$ *et* $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$ *dans* Ω *avec* $(b_1(x_0), b_2(x_0))$ *linéairement indépendants. Alors il existe un voisinage* ω *de* x_0, $u \in C^\infty(\omega)$ *et* $a \in C^\infty(\omega)$ *vérifiant (1.1).*

2.2. OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Nous dirons que $w \in B^\infty(\mathbf{R}^n \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ si $w(x, \delta)$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}^n \times [0, \infty[$, indéfiniment dérivable en x pour $\delta > 0$ et dont les dérivées restent bornées quand δ tend vers 0.