

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	32 (1986)
<b>Heft:</b>	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE
<b>Autor:</b>	Raymond, Xavier Saint
<b>Kapitel:</b>	Chapitre 2: Construction d'un contre-exemple
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-55077">https://doi.org/10.5169/seals-55077</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

où les  $\alpha_j(x)$  et les  $\beta_j(x)$  sont à valeurs réelles. Pour  $k = 1, \dots, n-1$ , soit  $y_k(x)$  la solution du système

$$\begin{cases} y_k(x', 0) = x_k \\ \partial_n y_k + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \partial_j y_k = 0. \end{cases}$$

Si de plus nous posons  $t(x) = x_n$ , comme la matrice jacobienne  $\frac{\partial(y, t)}{\partial x}$  admet l'unité pour déterminant en  $(0, \dots, 0)$ , nous pouvons utiliser  $(y, t)$  comme nouvelles coordonnées locales; nous obtenons que  $L + c_0 = (Lt)\partial_t + \sum(Ly_k)\partial_{y_k} + c_0$  est de la forme 3, d'où le lemme.

## CHAPITRE 2: CONSTRUCTION D'UN CONTRE-EXEMPLE

Dans ce chapitre, nous proposons une démonstration du théorème 1.1. La méthode utilisée pour obtenir ce résultat est désormais classique; elle a été mise au point successivement par Cohen [8], Plis [18], Hörmander [10], Alinhac-Zuily [3]. Ici, nous suivrons de très près la démonstration du théorème 1 d'Alinhac [1] (qui, pour le premier ordre, est un cas particulier du théorème 2.2 ci-dessous avec  $k_1 = 0$  et  $k_2 = 1$ ).

La technique consiste à choisir une suite de valeurs positives  $\delta_k$  tendant vers 0, puis à construire par les méthodes de l'optique géométrique des fonctions  $u_k$ , pour  $\varphi(x)$  voisin de  $\varphi(x_0) + \delta_k$ , qui soient approximativement dans le noyau de  $L + c_0$ : c'est ce que nous faisons en 2.2. Puis on ajuste la taille de ces fonctions afin de pouvoir les recoller pour obtenir une solution  $u$  définie au voisinage de  $x_0$  et telle que  $u$  et  $a = -(L + c_0)u/u$  soient régulières: c'est l'opération effectuée en 2.3, les dernières vérifications étant reportées en 2.4.

Afin de limiter la complexité de la construction, il convient de choisir un bon système de coordonnées. C'est ce par quoi nous commençons.

### 2.1. NOUVEAU CHOIX DE COORDONNÉES

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 1.1 et fixons le voisinage  $\Omega$ . Grâce au lemme 1.3, nous pouvons déjà trouver des coordonnées locales  $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$  dans  $\Omega$  (quitte à restreindre ce dernier) telles que

1.  $x_0 = (0, 0)$
2.  $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$
3.  $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$  à un facteur non nul près.

De plus, en utilisant l'hypothèse  $x_0 \in \bar{S}_3$ , on peut trouver un point  $x_3 = (y_3, 0) \in \Omega$  tel que  $\text{rg } \mathcal{L}(x_3) \geq 3$ . Nous pouvons alors écrire notre opérateur  $L + c_0$  sous une forme encore plus précise que celle donnée par le point 3. ci-dessus, comme le montre le lemme suivant.

**LEMME 2.1.** *Supposons que  $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$  et que  $\text{rg } \mathcal{L}(x_3) \geq 3$  pour un point  $x_3 \in S = \mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}$ . Alors, pour tout voisinage  $\Omega$  de  $x_3$ , il existe un point  $x_2 \in \Omega \cap S$ , un voisinage  $\omega$  de  $x_2$  et des entiers  $k_1 \geq 0$  et  $k_2 > 0$  tels que  $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$  et  $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$  dans  $\omega$  avec  $(b_1(x_2), b_2(x_2))$  linéairement indépendants.*

*Démonstration.* On peut déjà supposer que  $\Omega$  est suffisamment petit pour que le rang de  $\mathcal{L}$  reste supérieur ou égal à 3 dans  $\Omega \cap S$ .

Soit  $k_1 = \inf \{k \geq 0 \mid \exists x \in \Omega \cap S: \partial_t^k b(x) \neq 0\}$ . Alors  $k_1 < \infty$  car  $\text{rg } \mathcal{L}(x_3) \geq 3$ . Soit donc  $x_1$  un point de  $\Omega \cap S$  tel que  $\partial_t^{k_1} b(x_1) \neq 0$ , et soit  $\omega \subset \Omega$  un voisinage de  $x_1$  tel que  $\partial_t^{k_1} b(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \omega \cap S$ . Dans  $\omega$ , on a  $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$  avec  $b_1(x) \neq 0$  si  $x \in S$ .

Soit maintenant  $k_2 = \inf \{k > 0 \mid \exists x \in \omega \cap S: \partial_t^k b_1(x) \text{ et } b_1(x) \text{ soient linéairement indépendants}\}$ . Alors  $k_2 < \infty$  car  $\text{rg } \mathcal{L}(x_1) \geq 3$ . On peut donc écrire dans  $\omega$ ,  $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$  et il existe un point  $x_2 \in \omega \cap S$  tel que  $b_1(x_2)$  et  $b_2(x_2)$  soient linéairement indépendants.

Ce lemme nous permettra donc de déduire le théorème 1.1 du théorème suivant (que nous démontrerons aux paragraphes 2.2, 2.3 et 2.4).

**THÉORÈME 2.2.** *Supposons que  $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ , que  $b: \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$  et  $c: \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  sont des fonctions  $C^\infty$  dans un voisinage  $\Omega$  de  $x_0 = (y_0, 0)$  et qu'il existe des entiers  $k_1 \geq 0$  et  $k_2 > 0$  tels que  $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$  et  $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$  dans  $\Omega$  avec  $(b_1(x_0), b_2(x_0))$  linéairement indépendants. Alors il existe un voisinage  $\omega$  de  $x_0$ ,  $u \in C^\infty(\omega)$  et  $a \in C^\infty(\omega)$  vérifiant (1.1).*

## 2.2. OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Nous dirons que  $w \in B^\infty(\mathbf{R}^n \times \bar{\mathbf{R}}_+)$  si  $w(x, \delta)$  est une fonction continue sur  $\mathbf{R}^n \times [0, \infty[$ , indéfiniment dérivable en  $x$  pour  $\delta > 0$  et dont les dérivées restent bornées quand  $\delta$  tend vers 0.

PROPOSITION 2.3. *Sous les hypothèses du théorème 2.2, il existe au voisinage de  $(y_0, 0, 0)$  deux fonctions  $\varphi$  et  $\beta \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$  telles que*

$$(2.1) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} \varphi(y, t, \delta) = -\delta^{k_1+k_2-1}(t-\delta)^2 \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta) \quad \text{pour } \delta > 0 \\ \beta(y_0, 0, 0) = \beta_0 > 0 \end{cases}$$

*et telles que pour toute fonction  $\gamma \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ , il existe une fonction  $w(y, s, \varepsilon) \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$  telle que  $w(y, 0, 0) = 1$  et*

$$(2.2) \quad \begin{cases} \forall \alpha \in \mathbf{N}^n, \forall v \in \mathbf{N}, \exists \delta_{\alpha, v}: \text{pour } 0 < \delta < \delta_{\alpha, v} \text{ et} \\ \text{pour } (y, \delta^{-2}(t-\delta)) \text{ dans un voisinage fixe de } (y_0, 0) \\ (\text{indépendant de } \alpha \text{ et } v) \\ |\partial^\alpha[(L+c_0)h/h]| \leq 2 \delta^v \end{cases}$$

où on a posé:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} & h(y, t, \delta) \\ &= w(y, \delta^{-2}(t-\delta), \delta^{1/3}) \exp[-\delta^{-5/3} \gamma(y, \delta) + \delta^{-4-k_1-k_2} \varphi(y, t, \delta)] \end{aligned}$$

(dans (2.2),  $\partial^\alpha$  désigne la dérivation d'ordre  $\alpha$  par rapport à  $y$  et  $t$ ).

Démonstration: en trois parties.

1. Construction de  $\varphi$  et de  $\beta$ . Choisissons  $\eta_0 \in \mathbf{R}^{n-1}$  tel que  $b_1(x_0) \cdot \eta_0 = 0$  et  $b_2(x_0) \cdot \eta_0 < 0$  (ce qui est possible grâce à l'hypothèse d'indépendance). Il existe alors une fonction  $C^\infty$  à valeurs réelles  $\psi_1$  telle que

$$\begin{cases} b_1(y, \delta) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) = 0 \\ \partial_y \psi_1(y_0, 0) = \eta_0 \end{cases}$$

et on pose:

$$\begin{aligned} \psi_2(y, t, \delta) &= \int_\delta^t b(y, r) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) dr, \\ \varphi(y, t, \delta) &= \psi_2(y, t, \delta) + i\psi_1(y, \delta). \end{aligned}$$

On calcule alors que:

$$\psi_2(y, \delta, \delta) = 0,$$

$$\partial_t \psi_2(y, \delta, \delta) = b(y, \delta) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) = 0 \text{ par choix de } \psi_1, \text{ et}$$

$$\partial_t^2 \psi_2(y, t, \delta) = \partial_t b(y, t) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ k_1 t^{k_1-1} b_1(y, 0) + (k_1 + k_2) t^{k_1+k_2-1} b_2(y, t) + t^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y, t) \right] \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) \\
&= \left[ -k_1 t^{k_1-1} \delta^{k_2} b_2(y, \delta) + (k_1 + k_2) t^{k_1+k_2-1} b_2(y, t) + t^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y, t) \right] \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) \\
&= \delta^{k_1+k_2-1} \left[ -k_1 \left( \frac{t}{\delta} \right)^{k_1-1} b_2(y, \delta) + (k_1 + k_2) \left( \frac{t}{\delta} \right)^{k_1+k_2-1} b_2(y, t) \right. \\
&\quad \left. + \delta \left( \frac{t}{\delta} \right)^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y, t) \right] \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta).
\end{aligned}$$

Par la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient donc

$$\operatorname{Re} \varphi(y, t, \delta) = \psi_2(y, t, \delta) = -\delta^{k_1+k_2-1} (t-\delta)^2 \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta)$$

où

$$\begin{aligned}
\beta(y, \sigma, \delta) &= \int_0^1 (\theta-1) \left[ -k_1 (1+\theta\sigma)^{k_1-1} b_2(y, \delta) \right. \\
&\quad \left. + (k_1 + k_2) (1+\theta\sigma)^{k_1+k_2-1} b_2(y, \delta(1+\theta\sigma)) \right. \\
&\quad \left. + \delta (1+\theta\sigma)^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y, \delta(1+\theta\sigma)) \right] \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) d\theta
\end{aligned}$$

ce qui donne (2.1) puisque  $\beta(y_0, 0, 0) = -\frac{1}{2} k_2 b_2(y_0, 0) \cdot \eta_0 > 0$  grâce à notre choix de  $\eta_0$ .

Notons que

$$L\varphi(y, t, \delta) = -i\delta^{k_1+k_2-1} (t-\delta)^2 b(y, t) \cdot \partial_y \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta)$$

par (2.1), et si on pose  $s = \delta^{-2}(t-\delta)$ ,

$$L[\delta^{-4-k_1-k_2}\varphi(y, t, \delta)] = -i\delta^{-1}s^2 b(y, t) \cdot \partial_y \beta(y, \delta s, \delta).$$

2. *Construction de w.* Définissons l'opérateur  $M$  par la relation  $(Mw/w) = ((L+c_0)h/h)$  où  $h$  est donnée par (2.3); on calcule alors que

$$Mw = \delta^{-2} [\partial_s w + \varepsilon Nw], \quad \text{avec} \quad Nw = iB \cdot \partial_y w + Cw,$$

où  $B$  et  $C$  sont des fonctions de l'espace  $B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$  définies par:

$$B(y, s, \varepsilon) = \varepsilon^5 b(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s),$$

$$C(y, s, \varepsilon) = -ib(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s) \cdot \partial_y \gamma(y, \varepsilon^3) - i\varepsilon^2 s^2 b(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s) \cdot \partial_y \beta(y, \varepsilon^3 s, \varepsilon^3) \\ + \varepsilon^5 c(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s).$$

Définissons une suite de fonctions  $w_j$  de l'espace  $B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$  par les formules (toutes ces fonctions sont bien définies sur un même domaine)

$$w_0(y, s, \varepsilon) = 1,$$

$$w_{j+1}(y, s, \varepsilon) = \int_0^s -N w_j(y, r, \varepsilon) dr, \quad \text{pour } j \geq 0.$$

Une solution de (2.2)-(2.3) est alors obtenue formellement en posant  $w = \sum \varepsilon^j w_j$ . Choisissons donc une fonction de troncature, c'est-à-dire une fonction  $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$  telle que  $\chi = 1$  sur  $[0, 1]$ ,  $\chi = 0$  sur  $[2, +\infty[$  et  $\chi(\varepsilon) \in [0, 1]$  pour  $\varepsilon \in [0, +\infty[$ . Nous posons

$$w(y, s, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \chi(\lambda_j \varepsilon) w_j(y, s, \varepsilon),$$

et nous allons prouver dans la troisième partie de cette démonstration qu'il existe une suite de réels positifs  $\lambda_j$  telle que cette formule définisse une fonction  $w$  de l'espace  $B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$  qui vérifie de plus (2.2)-(2.3).

3. *Construction de la suite  $\lambda_j$ .* Nous allons montrer qu'il suffit que la suite  $\lambda_j$  croisse assez vite pour que l'on ait les deux propriétés précédentes. Nous pouvons déjà imposer que  $\lambda_{j+1} > 2\lambda_j$  de sorte que pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé, les  $\chi(\lambda_j \varepsilon)$  soient tous égaux à 1 ou à 0 sauf au plus l'un d'entre eux.

Soient  $k$  un voisinage compact de  $y_0, s_0 > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tels que les fonctions  $w_j$  soient bien définies dans  $K = k \times [-s_0, s_0] \times [0, \varepsilon_0]$ . Pour obtenir que  $w \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ , il suffit d'imposer pour tout  $J \in \mathbf{N}$ ,

$$\lambda_J > (J+1) \sup \{ |D^\alpha w_j(y, s, \varepsilon)| \mid (y, s, \varepsilon) \in K, |\alpha| \leq J \quad \text{et} \quad j \leq J+1 \}$$

où  $D^\alpha$  désigne la dérivation d'ordre  $\alpha$  en  $y$  et  $s$ . En effet, si  $(\lambda_{J+1})^{-1} \leq \varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$ ,

$$w(y, s, \varepsilon) = \sum_{j=0}^J \varepsilon^j w_j(y, s, \varepsilon) + \varepsilon^{J+1} \chi(\lambda_{J+1} \varepsilon) w_{J+1}(y, s, \varepsilon)$$

donc si  $0 < |\alpha| \leq J, (\lambda_{J+1})^{-1} \leq \varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$  et  $(y, s, \varepsilon) \in K$ ,

$$|D^\alpha w(y, s, \varepsilon)| \leq \sum_{j=1}^{J+1} \varepsilon |D^\alpha w_j(y, s, \varepsilon)| \leq 1.$$

Il en résulte que  $w \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$  car  $w$  est continue sur  $K$  comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur  $K$ .

On a  $w(y, 0, 0) = 1$ , et si on a choisi le compact  $K$  assez petit, on a aussi  $|w| > \frac{1}{2}$  dans  $K$  (un tel compact  $K$  pourra être choisi après coup, une fois que les  $\lambda_j$  auront été fixés); il en résulte que  $|D^\gamma w|/w$  reste inférieur à 2 pour  $\varepsilon \leq (\lambda_{|\gamma|})^{-1}$ . Comme on peut écrire  $D^\alpha(Nw_j/w)$  comme une somme (algébrique) comportant au plus  $(|\alpha|+1)! \times 2$  termes de la forme  $[(D^\beta Nw_j)/w] [(D^{\gamma_1} w)/w] \dots [(D^{\gamma_{|\alpha|}} w)/w]$  (avec  $\alpha = \beta + \gamma_1 + \dots + \gamma_{|\alpha|}$ , par la formule de Leibniz), on obtient une majoration

$$|D^\alpha(Nw_j/w)| \leq (|\alpha|+1)! 2^{|\alpha|+2} \sup \{|D^\beta Nw_j| \mid \beta \leq \alpha\}$$

pourvu que  $\varepsilon \leq (\lambda_{|\alpha|})^{-1}$ . Si donc nous demandons pour tout  $J$  que

$$\lambda_J > (J+1)! 2^{J+2} \sup \{|D^\alpha Nw_j(y, s, \varepsilon)| \mid (y, s, \varepsilon) \in K, |\alpha| \leq J \text{ et } j \leq J+1\},$$

alors pour  $(\lambda_{J+1})^{-1} \leq \varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$ ,

$$Mw = \varepsilon^{J-5} [Nw_J(1 - \chi(\lambda_{J+1}\varepsilon)) + Nw_{J+1}\varepsilon\chi(\lambda_{J+1}\varepsilon)]$$

d'où  $|D^\alpha(Mw/w)| \leq 2\varepsilon^{J-6}$  pour  $|\alpha| \leq J$  (et  $(\lambda_{J+1})^{-1} \leq \varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$  et  $(y, s, \varepsilon) \in K$ ). Cette majoration étant obtenue pour tout  $J$ , on peut remplacer la condition  $(\lambda_{J+1})^{-1} \leq \varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$  par  $\varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$ .

Pour  $\alpha \in \mathbf{N}^n$  et  $v \in \mathbf{N}$  fixés, on obtient, en posant  $J = 6(1+|\alpha|) + 3v$ , que pour  $(y, s, \varepsilon) \in K$  et  $\varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$ ,

$$|\partial^\alpha((L+c_0)h/h)| = |\varepsilon^{-6\alpha} D^\alpha(Mw/w)| \leq 2\varepsilon^{3v} = 2\delta^v.$$

### 2.3. AJUSTEMENT DES FONCTIONS $u_k$

Nous posons

$$\delta_k = k^{-3/4}, l_k = \delta_k - \delta_{k+1} \left( \sim \frac{3}{4} k^{-7/4} \right) \quad \text{et} \quad m_k = \frac{1}{3} \delta_k + \frac{2}{3} \delta_{k+1}.$$

Puis nous considérons les fonctions  $h_k(y, t) = h(y, t, \delta_k)$  définies par (2.3); ces fonctions vérifient (2.2) pour  $k$  suffisamment grand et  $t \in ]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[$  pourvu que  $\delta_k^{-2} l_k$  tende vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini, ce qui est bien le cas puisque  $\delta_k^{-2} l_k \sim \frac{3}{4} k^{-1/4}$ .

En vue de poser  $u = h_k + h_{k+1}$  pour  $t$  voisin de  $m_k$  et de montrer que  $a = -(L+c_0)u/u$  est  $C^\infty$ , il nous faut déterminer le lieu d'équation  $h_{k+1} = -h_k$  (qui est contenu dans le lieu d'équation  $|h_{k+1}| = |h_k|$ ).

PROPOSITION 2.4. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage  $Y$  de  $y_0$ , une fonction  $\gamma \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$  à valeurs réelles telle que  $\gamma(y, 0) > 0$  pour  $y \in Y$ , et trois suites de fonctions  $e_k \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ ,  $f_k$  et  $g_k \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R})$  à valeurs réelles telles que les fonctions  $h_k(y, t) = h(y, t, \delta_k)$  définies en (2.3) (avec la fonction  $\gamma$  ci-dessus) vérifient  $h_k/h_{k+1} = \exp[f_k + ig_k]$  avec*

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_Y |f_k(y, m_k)| \right) = 0, \\ \text{et } \partial_t f_k(y, t) > \frac{\beta_0 k^2}{2} \text{ sur } Y \times [\delta_{k+1}, \delta_k]; \end{array} \right.$$

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^n, \text{ il existe } C_\alpha \text{ et } v_\alpha \in \mathbf{N} \text{ tels que sur} \\ Y \times [\delta_{k+1}, \delta_k], |\partial^\alpha f_k(y, t)| \leq C_\alpha k^{v_\alpha} \text{ et } |\partial^\alpha g_k(y, t)| \leq C_\alpha k^{v_\alpha}; \end{array} \right.$$

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} |h_k(y, t)| = |h_{k+1}(y, t)| \Leftrightarrow t = m_k + e_k(y) \\ \text{et } e_k(y) = o(l_k) \text{ (pour } k \rightarrow \infty\text{).} \end{array} \right.$$

*Démonstration.* Posons

$$\varphi_k(y, t) = \delta_k^{-4-k_1-k_2} \varphi(y, t, \delta_k) \text{ et } w_k(y, t) = w(y, \delta_k^{-2}(t-\delta_k), \delta_k^{1/3});$$

les constructions s'effectuent en trois temps.

1. *Construction de  $\gamma$ .* Nous allons choisir la fonction  $\gamma$  de telle sorte que

$$\log |h_k(y, m_k)| - \log |h_{k+1}(y, m_k)| = 0,$$

du moins si on néglige l'influence de  $w$  dans la formule (2.3). Nous posons donc

$$\begin{aligned} I_k(y) &= \operatorname{Re} \varphi_k(y, m_k) - \operatorname{Re} \varphi_{k+1}(y, m_k) \\ &= \left[ \beta(y, 0, 0) + o(1) \right] \left[ -\frac{4}{9} \delta_k^{-5} l_k^2 + \frac{1}{9} \delta_{k+1}^{-5} l_k^2 \right] \text{ (pour } k \rightarrow \infty\text{)} \end{aligned}$$

d'après (2.1), et donc si on a choisi  $Y$  de telle façon que  $\beta(y, 0, 0) > 0$  pour  $y \in Y$  (ce qui est possible grâce à (2.1)),

$$I_k(y) \sim -\frac{1}{3} \beta(y, 0, 0) \delta_k^{-5} l_k^2 \sim -\frac{3}{16} \beta(y, 0, 0) k^{1/4} \quad \text{pour } y \in Y.$$

Remarquons que de même, pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^{n-1}$ ,

$$|\partial^\alpha I_k(y)| \leq C_\alpha k^{1/4}.$$

Nous posons alors, pour  $k_0$  assez grand,  $\gamma_k(y) = -\sum_{j=k_0}^{k-1} I_j(y)$ ; nous avons:

$$\gamma_k(y) \sim \frac{3}{20} \beta(y, 0, 0) k^{5/4} = \frac{3}{20} \beta(y, 0, 0) \delta_k^{-5/3}, \quad \text{et}$$

$$|\partial^\alpha \gamma_k(y)| \leq C_\alpha \delta_k^{-5/3} \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^{n-1},$$

et il existe donc une fonction  $\gamma \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$  telle que pour tout  $k \geq k_0$ ,  $\gamma_k(y) = \delta_k^{-5/3} \gamma(y, \delta_k)$  et que  $\gamma(y, 0) = \frac{3}{20} \beta(y, 0, 0) > 0$  pour  $y \in Y$ .

2. *Construction des suites  $f_k$  et  $g_k$ .* Comme  $\delta_k^{-2} l_k$  tend vers 0 quand  $k$  tend vers l'infini, la fonction  $w$  fournie par la proposition 2.3 vérifie

$$(2.7) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{Y \times [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}]} |w_k(y, t) - 1| \right) = 0;$$

nous utiliserons donc la détermination principale du logarithme de  $w$ , qui possède les mêmes propriétés de régularité que  $w$ ; nous posons

$$\begin{aligned} f_k &= \operatorname{Re} \operatorname{Log} w_k - \operatorname{Re} \operatorname{Log} w_{k+1} + \gamma_k - \gamma_{k+1} + \operatorname{Re} \varphi_k - \operatorname{Re} \varphi_{k+1} \\ g_k &= \operatorname{Im} \operatorname{Log} w_k - \operatorname{Im} \operatorname{Log} w_{k+1} + \operatorname{Im} \varphi_k - \operatorname{Im} \varphi_{k+1}. \end{aligned}$$

Nous avons donc (cf. (2.3))  $h_k/h_{k+1} = \exp [f_k + ig_k]$ , et grâce au choix de  $\gamma$  et à (2.7) nous obtenons la première moitié de (2.4) soit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_Y |f_k(y, m_k)| \right) = 0$ .

De plus, il est facile de vérifier (2.5) sur les formules ci-dessus définissant  $f_k$  et  $g_k$ .

3. *Construction de la suite  $e_k$ .* Compte tenu de ce qui précède, il ne nous reste plus qu'à montrer la minoration de  $\partial_t f_k$  (deuxième moitié de (2.4)) et (2.6). Mais (2.6) découle de (2.4) parce que  $|h_{k+1}(y, t)| = |h_k(y, t)|$  équivaut à  $f_k(y, t) = 0$  et que  $k^2 l_k \left( \sim \frac{3}{4} k^{1/4} \right)$  tend vers l'infini avec  $k$ .

En reprenant l'expression de  $f_k$  ci-dessus, calculons-en la dérivée par rapport à  $t$

$$\begin{aligned} \partial_t f_k &= \delta_k^{-2} \operatorname{Re} (\partial_s w_k / w_k) - \delta_{k+1}^{-2} \operatorname{Re} (\partial_s w_{k+1} / w_{k+1}) \\ &\quad + \partial_t \operatorname{Re} \varphi_k - \partial_t \operatorname{Re} \varphi_{k+1}. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont  $O(\delta_k^{-2})$  lorsque  $k$  tend vers l'infini (cf. (2.7)); pour estimer les deux autres, on écrit, grâce à (2.1)

$$\begin{aligned} \delta^{1-k_1-k_2} \partial_t \operatorname{Re} \varphi(y, t, \delta) &= -2(t-\delta) \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta) \\ &\quad - \delta^{-1}(t-\delta)^2 \partial_\alpha \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta) \\ &\leq -\beta_0(t-\delta) \end{aligned}$$

pourvu que  $|y - y_0|$ ,  $\delta^{-2}(t - \delta)$  et  $\delta$  soient suffisamment petits. On obtient donc

$$\begin{aligned}\partial_t f_k(y, t) &\geq \beta_0 \delta_k^{-5}(\delta_k - t) + \beta_0 \delta_{k+1}^{-5}(t - \delta_{k+1}) + O(\delta_k^{-2}) \\ &\geq \beta_0 \delta_k^{-5}(\delta_k - \delta_{k+1}) + \beta_0(t - \delta_{k+1})(\delta_{k+1}^{-5} - \delta_k^{-5}) + O(\delta_k^{-2}) \\ &\geq \beta_0 \delta_k^{-5} l_k + O(\delta_k^{-5} l_k k^{-1}) + O(\delta_k^{-2}) \quad (\text{pour } k \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

Enfin,  $\delta_k^{-5} l_k \sim \frac{3}{4} k^2$  et  $\delta_k^{-2} = k^{3/2}$ , d'où (2.4) puis (2.6).

Maintenant que nous avons circonscrit le lieu où  $u$  s'annule (par (2.6)), il faut nous assurer que  $(L + c_0)u$  s'annule suffisamment en ce même lieu pour que  $(L + c_0)u/u$  soit régulière. Pour cela, nous devons modifier les fonctions  $h_k$ .

**PROPOSITION 2.5.** *Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage  $Y$  de  $y_0$ , un entier  $k_0$  et trois suites de fonctions  $u_k \in C^\infty(Y \times ]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[)$  à valeurs complexes et  $F_k$  et  $G_k \in C^\infty(Y \times ]\delta_{k+1}, \delta_k[)$  à valeurs réelles tels que si l'on pose*

$$\begin{aligned}r_k(y, t) &= (L + c_0)u_k(y, t)/u_k(y, t) \\ v_k(y, t) &= u_k(y, t)/u_{k+1}(y, t)\end{aligned}$$

on ait  $v_k = \exp [F_k + iG_k]$ , et  $r_k$ ,  $F_k$  et  $G_k$  possèdent les propriétés suivantes pour  $k \geq k_0$ :

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_k(y, t) \text{ et } r_{k+1}(y, t) \text{ sont « plates » sur } t = m_k + e_k(y) \\ (\text{ce qui signifie que toutes leurs dérivées s'y annulent}); \end{array} \right.$$

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^n \text{ et tout } v \in \mathbf{N}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{Y \times ]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[} |k^v \partial^\alpha r_k(y, t)| \right) = 0; \end{array} \right.$$

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_k(y, m_k + e_k(y)) = 0 \\ \text{et } \partial_t F_k(y, t) \geq \frac{\beta_0 k^2}{3} \text{ sur } Y \times ]\delta_{k+1}, \delta_k[; \end{array} \right.$$

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^n, \text{ il existe } C_\alpha \text{ et } v_\alpha \in \mathbf{N} \text{ tels que sur} \\ Y \times ]\delta_{k+1}, \delta_k[, |\partial^\alpha F_k(y, t)| \leq C_\alpha k^{v_\alpha} \text{ et } |\partial^\alpha G_k(y, t)| \leq C_\alpha k^{v_\alpha}. \end{array} \right.$$

*Démonstration:* en deux parties.

1. *Construction de la suite  $u_k$ .* Nous choisissons les fonctions  $u_k(y, t)$  par la formule  $u_k = h_k(1 + \varepsilon_k)$  avec

$$\varepsilon_k(y, t) = \varepsilon(y, l_k^{-1}(t - \delta_k), \delta_k)$$

où la fonction  $\varepsilon(y, \tau, \delta)$  est à choisir. Pour obtenir (2.8), il faudra que pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^n$ ,

$$\partial^\alpha \left[ (L + c_0)h_k/h_k \right] + \partial^\alpha \left[ L\varepsilon_k/(1 + \varepsilon_k) \right] = 0$$

sur  $t = m_k + e_k(y)$  et sur  $t = m_{k-1} + e_{k-1}(y)$ . Si nous demandons de plus à la fonction  $\varepsilon$  de s'annuler sur les fermés  $\Phi_k$  et  $\Psi_k$  définis ci-dessous, ces conditions sont encore équivalentes à la suite d'équations suivante :

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } j \geq 1 \text{ et tout } k \geq k_0, \\ \partial_\tau^j \varepsilon(y, \tau, \delta) = \varphi_{j, k}(y) \text{ sur} \\ \Phi_k = \{(y, \tau, \delta) \mid y \in \bar{Y}, \delta = \delta_k \text{ et } \tau = l_k^{-1}(m_k + e_k(y) - \delta_k)\}, \\ \partial_\tau^j \varepsilon(y, \tau, \delta) = \psi_{j, k}(y) \text{ sur} \\ \Psi_k = \{(y, \tau, \delta) \mid y \in \bar{Y}, \delta = \delta_k \text{ et } \tau = l_k^{-1}(m_{k-1} + e_{k-1}(y) - \delta_k)\}, \end{array} \right.$$

où les fonctions  $\varphi_{j, k}(y)$  et  $\psi_{j, k}(y)$  s'expriment en fonction des dérivées de  $(L + c_0)h_k/h_k$  et sont donc à décroissance rapide en  $k$  ainsi que toutes leurs dérivées grâce à (2.2). Nous demanderons aussi à la fonction  $\varepsilon$  de vérifier

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } l > 0 \text{ et tout } j \geq 0, \text{ ainsi que pour } j = l = 0, \\ \text{et pour tout } k \geq k_0, \partial_\tau^j \partial_\delta^l \varepsilon(y, \tau, \delta) = 0 \text{ sur } \Phi_k \text{ et } \Psi_k, \text{ et} \end{array} \right.$$

$$(2.14) \quad \partial_\delta^l \varepsilon(y, \tau, 0) = 0 \quad \text{pour tout } l \geq 0.$$

Il existe une fonction  $\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$  vérifiant (2.12), (2.13) et (2.14) : elle nous est fournie par le théorème d'extension de Whitney [26] appliqué au fermé

$$\{(y, \tau, \delta) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \delta = 0\} \cup \left( \bigcup_{k \geq k_0} \Phi_k \right) \cup \left( \bigcup_{k \geq k_0} \Psi_k \right).$$

Les conditions de compatibilité requises pour pouvoir utiliser ce théorème sont trivialement vérifiées puisque les fonctions  $\varphi_{j, k}$  et  $\psi_{j, k}$  sont à décroissance rapide en  $k$  ainsi que leurs dérivées, et que  $l_k^{-1}(m_k + e_k(y) - \delta_k)$

$$= -\frac{2}{3} + O(k^{-1}) \text{ et } l_k^{-1}(m_{k-1} + e_{k-1}(y) - \delta_k) = \frac{1}{3} + O(k^{-1}) \text{ (pour } k \rightarrow \infty).$$

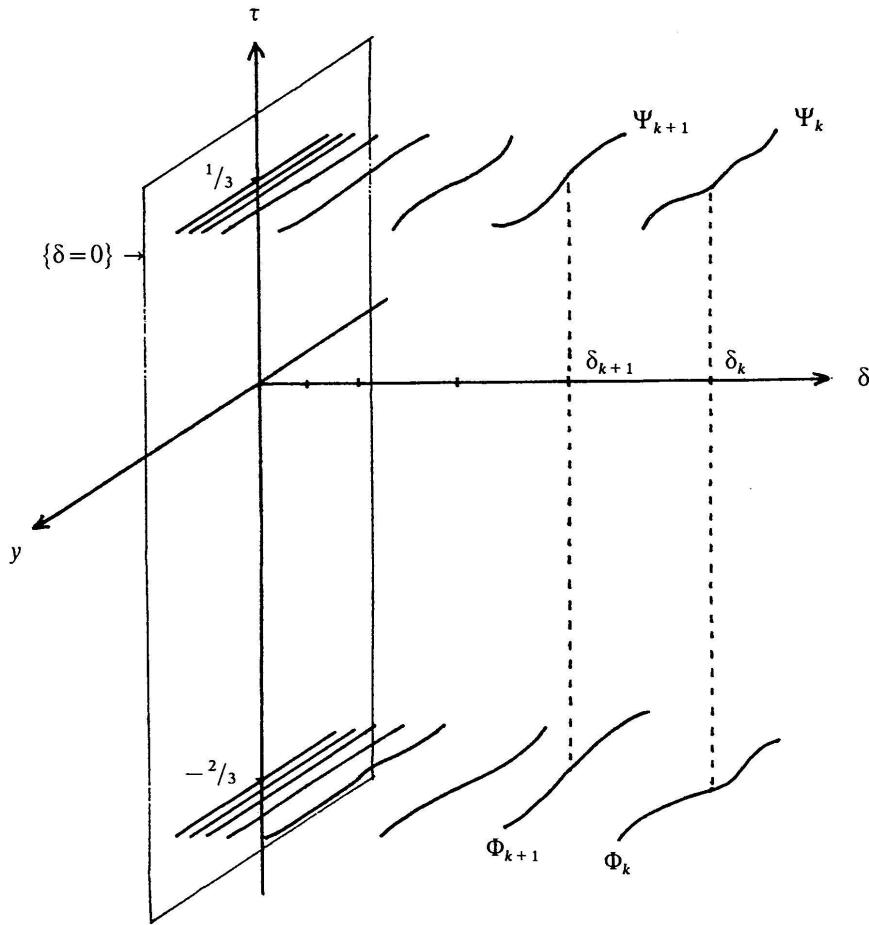


FIGURE 2.1.  
Le fermé auquel on applique le théorème de Whitney.

2. *Construction des suites  $F_k$  et  $G_k$ .* Les équations (2.12) ont été choisies pour que  $r_k$  et  $r_{k+1}$  soient plates sur  $t = m_k + e_k(y)$ : la propriété (2.8) est donc acquise. De la condition (2.14) nous tirons que pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^n$  et tout  $v \in \mathbf{N}$ ,

$$(2.15) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{Y \times [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}]} |k^v \partial^\alpha \varepsilon_k| \right) = 0,$$

et par conséquent, on obtient (2.9) en utilisant (2.2) et la formule

$$\partial^\alpha r_k = \partial^\alpha [(L + c_0)h_k/h_k] + \partial^\alpha [L\varepsilon_k/(1 + \varepsilon_k)].$$

L'estimation (2.15) permet aussi d'utiliser la détermination principale du logarithme de  $1 + \varepsilon$ ; nous posons donc:

$$F_k = f_k + \operatorname{Re} \operatorname{Log}(1 + \varepsilon_k) - \operatorname{Re} \operatorname{Log}(1 + \varepsilon_{k+1})$$

$$G_k = g_k + \operatorname{Im} \operatorname{Log}(1 + \varepsilon_k) - \operatorname{Im} \operatorname{Log}(1 + \varepsilon_{k+1}).$$

Nous avons alors  $v_k = \exp [F_k + iG_k]$ , et  $F_k$  et  $G_k$  vérifient (2.10) et (2.11) grâce à ces formules qui les définissent et à (2.4), (2.5), (2.6), (2.13) ( $j=l=0$ ) et (2.15).

## 2.4. CONSTRUCTION DES FONCTIONS $u$ ET $a$

Par un calcul élémentaire nous voyons que pour  $y \in Y$  et  $k$  assez grand,  $\delta_{k+1} < \delta_k - \frac{3}{4} l_k < m_k + e_k(y) < \delta_{k+1} + \frac{3}{4} l_{k+1} < \delta_k$ . Nous choisissons alors une fonction à valeurs réelles  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  telle que

$$\chi(\tau) = 1 \quad \text{pour } \tau \in [-3/4, 3/4],$$

$$\text{supp } \chi \subset [-1, 1] \quad \text{et} \quad \chi(\tau) \in [0, 1] \quad \text{pour } \tau \in [-1, 1];$$

puis avec  $\chi_k(t) = \chi(l_k^{-1}(t - \delta_k))$  nous posons

$$\begin{cases} u(y, t) = \sum_{k \geq k_0} \chi_k(t) u_k(y, t) & \text{pour } (y, t) \in Y \times ]0, \delta_{k_0}[, \\ u(y, t) = 0 & \text{pour } (y, t) \in Y \times ]-\delta_{k_0}, 0] \\ \begin{cases} a(y, t) = -(L + c_0)u(y, t)/u(y, t) & \text{pour } u(y, t) \neq 0, \\ a(y, t) = 0 & \text{pour } u(y, t) = 0. \end{cases} \end{cases}$$

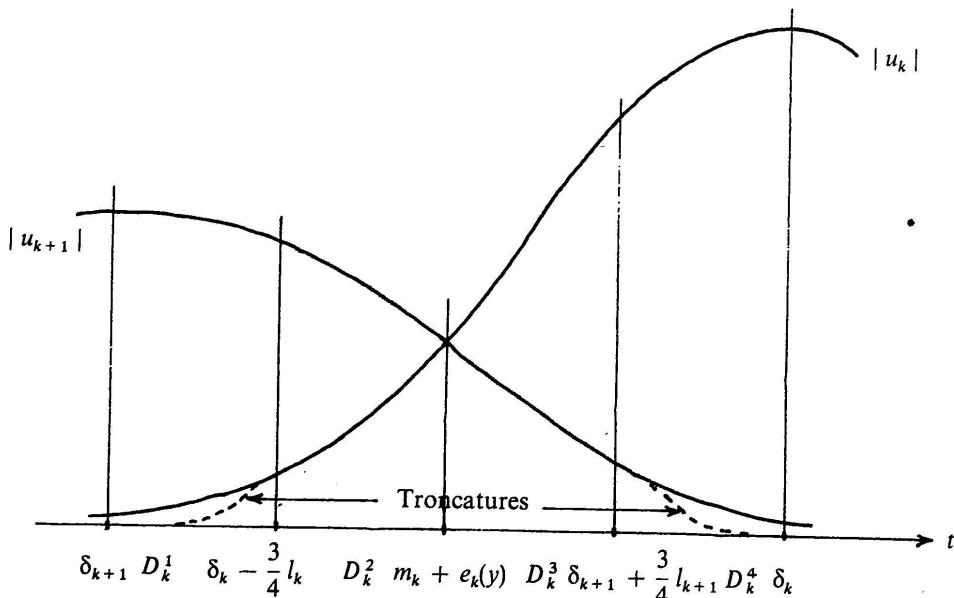


FIGURE 2.2.

Profils des fonctions  $u_k$  et  $u_{k+1}$  pour  $t \in [\delta_{k+1}, \delta_k]$ .

*Régularité de la fonction  $u$ .* Remarquons d'abord qu'une telle fonction  $u$  est  $C^\infty$ . En effet, pour  $t > 0$ ,  $u$  est somme d'au plus deux termes non nuls qui sont des fonctions  $C^\infty$ , et  $u$  est donc  $C^\infty$  dans  $Y \times ]0, \delta_{k_0}[$ ; pour voir que  $u$  est  $C^\infty$  au voisinage de  $t = 0$ , il suffit de montrer que pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^n$ ,

$$(2.16) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{Y \times ]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[} \left| \partial^\alpha (\chi_k u_k) \right| \right) = 0.$$

Or tous les éléments ayant servi à la construction de  $u_k$  se comportent comme des puissances de  $k$  ainsi que leurs dérivées; on peut donc écrire

$$|\partial^\alpha (\chi_k u_k)| \leq C_\alpha k^{v_\alpha} \exp(-\gamma_k + \operatorname{Re} \varphi_k).$$

Mais  $-\gamma_k(y) \sim -\frac{3}{20} \beta(y, 0, 0) k^{5/4}$ , et

$$|\operatorname{Re} \varphi_k| \leq \frac{4}{3} \delta_k^{-5} l_k^2 \beta(y, 0, 0) \leq k^{1/4} \beta(y, 0, 0)$$

pour  $k$  suffisamment grand et  $y \in Y$ ; comme  $\beta(y, 0, 0) > 0$  pour  $y \in Y$ , cela donne (2.16).

*Détermination des supports des fonctions  $u$  et  $a$ .* D'après (2.10), nous savons que  $|v_k(y, t)| < 1$  pour  $t \in [\delta_{k+1}, m_k + e_k(y)[$ , et comme dans ce même domaine  $u = u_{k+1} + \chi_k u_k$ , soit  $u = u_{k+1}(1 + \chi_k v_k)$ , on en déduit que  $u$  ne s'annule pas; on démontrerait de même que  $u$  ne s'annule pas pour  $t \in ]m_{k+1} + e_{k+1}(y), \delta_{k+1}[$ , ni donc dans le domaine

$D = \{(y, t) \in Y \times ]-\delta_{k_0}, \delta_{k_0}[ \mid t > 0 \text{ et } t \neq m_k + e_k(y) \text{ pour tout } k \geq k_0\}$  qui est dense dans  $Y \times [0, \delta_{k_0}[$ ; il en résulte que  $\operatorname{supp} u = Y \times [0, \delta_{k_0}[$ , et par définition de  $a$ , on a  $\operatorname{supp} a \subset \operatorname{supp} u$ . Pour obtenir (1.1), il ne nous reste plus qu'à montrer que  $a$  est  $C^\infty$  dans  $Y \times ]-\delta_{k_0}, \delta_{k_0}[$ .

*Régularité de la fonction  $a$ .* Dans le domaine  $D$  défini ci-dessus,  $u \neq 0$  donc la fonction  $a$  est définie par la formule  $a = -(L + c_0)u/u$ ; il en résulte que  $a$  est  $C^\infty$  dans  $D$ . Pour  $t$  voisin de  $m_k + e_k(y)$ ,  $u = u_{k+1} + u_k$ , donc pour  $u_{k+1} + u_k \neq 0$ ,  $a = -(L + c_0)u/u = -(r_{k+1}u_{k+1} + r_ku_k)/(u_{k+1} + u_k)$ ; en particulier,

$$\begin{cases} a = -(r_{k+1} + r_k v_k)/(1 + v_k) & \text{si } t < m_k + e_k(y) (\Leftrightarrow |v_k| < 1) \\ a = -(r_{k+1} v_k^{-1} + r_k)/(1 + v_k^{-1}) & \text{si } t > m_k + e_k(y) (\Leftrightarrow |v_k^{-1}| < 1). \end{cases}$$

Dans la première de ces deux formules, le numérateur est plat sur  $t = m_k + e_k(y)$  à cause de (2.8), et le dénominateur vérifie

$$|1 + v_k| \geq 1 - |v_k| \geq \frac{\beta_0 k^2}{12} (m_k + e_k(y) - t)$$

d'après (2.10) et en utilisant l'inégalité  $e^F \leq 1 + \frac{F}{4}$  pour  $F \in [-2, 0]$ . L'expression  $(r_{k+1} + r_k v_k)/(1 + v_k)$  définit donc une fonction plate sur  $t = m_k + e_k(y)$ , et comme il en est de même pour l'autre expression, nous avons obtenu que, même si  $u$  s'annule en certains points de  $t = m_k + e_k(y)$  (ce qui entraîne que  $a = 0$  par définition de  $a$ ), la fonction  $a$  est  $C^\infty$  dans  $Y \times ]0, \delta_{k_0}[$ .

Pour montrer que  $a$  est  $C^\infty$  pour  $t$  voisin de 0, il nous faut estimer les dérivées de  $a$  sur  $Y \times [\delta_{k+1}, \delta_k]$  lorsque  $k$  tend vers l'infini. Pour cela, nous étudions  $a$  successivement sur les quatre intervalles schématisés sur la figure 2.2.

1. Sur  $D_k^1 = \{(y, t) \mid \delta_{k+1} \leq t \leq \delta_k - \frac{3}{4} l_k\}$ , on a

$$F_k(y, t) \leq \frac{\beta_0 k^2}{3} \left( \delta_k - \frac{3}{4} l_k - m_k - e_k(y) \right) \leq -\frac{\beta_0}{50} k^{1/4}$$

pour  $k$  assez grand d'après (2.10). En utilisant aussi (2.11), on obtient que pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^n$  et tout  $v \in \mathbf{N}$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{D_k^1} |k^v \partial^\alpha v_k| \right) = 0.$$

Sur  $D_k^1$ ,  $u$  et  $a$  sont données par les formules  $u = u_{k+1} + \chi_k u_k$  et  $a = -(L + c_0)u/u$ , d'où

$$\begin{aligned} a &= - \left[ (L + c_0)u_{k+1} + \chi_k(L + c_0)u_k + l_k^{-1} \chi' \left( \frac{t - \delta_k}{l_k} \right) u_k \right] / u \\ &= - \left( r_{k+1} + \left[ \chi_k r_k + l_k^{-1} \chi' \left( \frac{t - \delta_k}{l_k} \right) \right] v_k \right) / (1 + \chi_k v_k). \end{aligned}$$

On en déduit, à l'aide de l'estimation précédente et de (2.9) que pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^n$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{D_k^1} |\partial^\alpha a| \right) = 0.$$

2. Sur  $D_k^2 = \{(y, t) \mid \delta_k - \frac{3}{4}l_k \leq t < m_k + e_k(y)\}$ , on a  $F_k(y, t) < 0$  d'après (2.10) d'où  $|v_k| < 1$ . Comme  $u = u_{k+1} + u_k \neq 0$ , on peut alors écrire

$$\begin{aligned} a &= -(L + c_0)u/u = -(r_{k+1}u_{k+1} + r_ku_k)/(u_{k+1} + u_k) \\ &= -(r_{k+1} + r_kv_k)/(1 + v_k), \end{aligned}$$

et toutes les dérivées d'une telle expression peuvent être estimées par des sommes de puissances de  $k$  avec des coefficients de la forme  $(\partial^\alpha r_{k+1})/(1 + v_k)^\nu$ . Mais grâce à (2.10)

$$|1 + v_k| \geq 1 - |v_k| \geq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\beta_0 k^2}{12} (m_k + e_k(y) - t) \right\}$$

car  $e^F \leq \frac{1}{2}$  pour  $F \in ]-\infty, -1]$  et  $e^F \leq 1 + \frac{F}{4}$  pour  $F \in [-2, 0]$ , et le théorème des accroissements finis donne pour  $(y, t) \in D_k^2$

$$\begin{aligned} &|(\partial^\alpha r_{k+1}(y, t))/(m_k + e_k(y) - t)^\nu| \\ &\leq \sup \{ |(\partial^{\alpha+\beta} r_{k+1})(y, t)| \mid (y, t) \in D_k^2 \text{ et } |\beta| \leq \nu \} \end{aligned}$$

puisque  $r_{k+1}$  est plate sur  $t = m_k + e_k(y)$  (cf. (2.8)). On obtient donc en utilisant (2.9) que pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^n$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{D_k^2} |\partial^\alpha a| \right) = 0.$$

3. Sur  $D_k^3 = \{(y, t) \mid m_k + e_k(y) < t \leq \delta_{k+1} + \frac{3}{4}l_{k+1}\}$  on procède comme sur  $D_k^2$  en échangeant les rôles de  $u_k$  et  $u_{k+1}$ , et donc en utilisant  $v_k^{-1}$  à la place de  $v_k$ .

4. Sur  $D_k^4 = \{(y, t) \mid \delta_{k+1} + \frac{3}{4}l_{k+1} \leq t \leq \delta_k\}$  on procède comme sur  $D_k^1$  en échangeant les rôles de  $u_k$  et  $u_{k+1}$ .

### CHAPITRE 3: TECHNIQUES D'UNICITÉ

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment prouver certaines inégalités de Carleman, et comment les utiliser pour obtenir l'unicité de Cauchy. En guise d'exemple, nous donnons une démonstration complète pour le cas elliptique (3.1).