Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Autor: Raymond, Xavier Saint

Kapitel: 1.4. Commentaires sur les théorèmes

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55077

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

l'existence de variétés de dimension 1 ou 2 le long desquelles le champ L reste tangent (sans qu'il s'agisse de variétés intégrales de $\mathscr{L}$) ainsi qu'une condition de signe sur les coefficients de L.

1.3. Enoncé des résultats principaux

Munis de ces notations, nous pouvons énoncer les principales réponses apportées à la question posée en 1.1.

Théorème 1.1. *Posons* $S_3 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)$ *et* $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) \geqslant 3\}$. *Si le problème est non caractéristique et si* $x_0 \in \bar{S}_3$, *alors pour tout voisinage* Ω *de* x_0, *il existe* $\omega \subset \Omega$ *avec* $\omega \cap S_3 \neq \emptyset$, $u \in C^\infty(\omega)$ *et* $a \in C^\infty(\omega)$ *tels que*

$$(1.1) \qquad \begin{cases} (L+c_0+a)\,u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega\,, \\ \operatorname{Supp} u' = \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}\,, \quad \textit{et} \\ \operatorname{Supp} a \subset \omega_+\,. \end{cases}$$

Moralement, ce théorème signifie que pour avoir la propriété d'unicité, il est nécessaire que $\operatorname{rg} \mathscr{L} < 3$ sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Cette condition est également suffisante lorsque nous faisons l'une des deux hypothèses « techniques » introduites au paragraphe précédent:

Théorème 1.2. *Posons* $S_3 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)$ *et* $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) \geqslant 3\}$; *supposons que le problème est non caractéristique et que* $x_0 \notin \bar{S}_3$; *supposons encore qu'il existe un voisinage* Ω *de* x_0 *tel que l'une des deux hypothèses « techniques » suivantes soit vérifiée: soit* L *vérifie la condition* (R) *dans* Ω, *soit* L *vérifie la condition* (P) *dans* $\mathring{\Omega}_+ = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) > \varphi(x_0)\}$. *Alors, pour tout voisinage* ω *de* x_0 *et toute* $u \in C^1(\omega)$ *solution du système*

$$(1.2) \qquad \begin{cases} (L+c_0)\,u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega, \quad \textit{et} \\ u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}\,, \end{cases}$$

la fonction u *s'annule au voisinage de* x_0.

1.4. Commentaires sur les théorèmes

1. Comme nous le verrons au paragraphe 2.1, le théorème 1.1 s'applique essentiellement aux opérateurs de la forme

$$L = \partial_t + i[t^{k_1}\partial_{y_1} + t^{k_2}\partial_{y_2}], k_1 \neq k_2, \varphi = t.$$

Ce théorème a été démontré dans le cadre plus général des opérateurs d'ordre m quelconque par Alinhac [1] et Robbiano [19] sous la condition $k_1 = 0$.

2. Le théorème 1.2 s'applique aux deux opérateurs suivants définis dans $\mathbf{R}^2$:

$$L_{(R)} = \partial_t + it(t+y)\,\partial_y \quad \text{et} \quad L_{(P)} = \partial_t + ie^{-1/t^2}\,\partial_y, \varphi = t,$$

le premier vérifiant la condition (R), mais pas la condition (P), et réciproquement pour le second. Ce théorème 1.2 est dû à Strauss et Trèves [24] qui l'ont démontré d'une part sous la condition $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x_0) = 2$ dans $\mathbf{R}^2$ (cas particulier de la condition (R)) et d'autre part en supposant que L vérifie la condition (P) dans tout un voisinage Ω de x_0.

3. Le théorème 1.2 devient faux si nous supprimons les hypothèses « techniques » ou même si nous supposons seulement que L vérifie la condition (R) dans $\mathring{\Omega}_+$; nous montrerons en effet au chapitre 4 que l'opérateur

$$\begin{cases} L = \partial_t + ie^{-1/t} \sin\dfrac{1}{t}\,\partial_y & \text{si} \quad t > 0, \\ L = \partial_t & \text{si} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$$

ne possède pas la propriété d'unicité par rapport à $t = 0$ pourvu que l'on ajoute un terme d'ordre inférieur, bien que $\operatorname{rg} \mathscr{L} \equiv 2$ pour $t > 0$.

4. Dans l'énoncé du théorème 1.1, il convient de remarquer que l'ouvert ω ne contient pas nécessairement le point x_0; le théorème 1.1 signifie donc ceci: si nous ne savons pas toujours construire une solution de (1.1) au voisinage de x_0, nous savons du moins le faire au voisinage de x_1 pour un point x_1 arbitrairement proche de x_0 sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. En revanche, lorsque les hypothèses du théorème 1.2 sont vérifiées en x_0, elles le sont en tout point suffisamment proche de x_0 sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$, et la conclusion s'applique quel que soit le terme d'ordre inférieur; le théorème 1.2 est donc bien une réciproque du théorème 1.1. Cette remarque correspond à la propriété d'unicité « stable » dont nous avons parlé au paragraphe 1.1.

5. Les hypothèses du théorème 1.2 sous la condition (R) sont équivalentes au groupe d'hypothèses suivant: le problème est non caractéristique, et il existe un voisinage de x_0 où $\operatorname{rg} \mathscr{L} \leqslant 2$ et où la propriété (Q) introduite par Nirenberg et Trèves [17] est vérifiée (cette propriété (Q) peut s'énoncer

de la façon suivante: par tout point $x \in \Omega$ tel que $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) = 1$ passe une variété intégrale de $\mathscr{L}$). Sous la condition (P), nous pourrions omettre l'hypothèse $x_0 \notin \bar{S}_3$ (car (P) dans $\mathring{\Omega}_+ \Rightarrow \bar{S}_3 \cap \Omega = \emptyset$), mais nous préférons considérer ce groupe d'hypothèses comme l'hypothèse $x_0 \notin \bar{S}_3$ à laquelle nous avons rajouté une hypothèse « technique ».

6. *Plan de l'ensemble.* Nous exposerons les techniques de construction de contre-exemples à l'unicité dans le chapitre 2 que nous consacrons à démontrer le théorème 1.1. Symétriquement, le chapitre 3 contiendra la démonstration du théorème 1.2 comme illustration des méthodes développées pour obtenir l'unicité. Par ces deux théorèmes, nous avons « génériquement » répondu à la question posée; nous avons cependant écarté trois problèmes marginaux qui feront l'objet des chapitres suivants: au chapitre 4, nous étudierons sur un modèle la situation lorsque $\operatorname{rg} \mathscr{L} \leqslant 2$ mais que les hypothèses « techniques » ne sont pas vérifiées; au chapitre 5, nous étudierons le problème caractéristique; au chapitre 6 enfin, nous étudierons l'influence du terme d'ordre zéro, c_0.

1.5. Choix des coordonnées pour les problèmes non caractéristiques

Dans ce paragraphe, nous donnons pour les problèmes non caractéristiques (étudiés aux chapitres 2, 3 et 4) un choix de coordonnées permettant d'écrire sous une forme canonique l'opérateur à étudier.

Lemme 1.3. *Supposons que le problème soit non caractéristique; alors il existe près de* x_0 *un système de coordonnées* $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ *tel que:*

1. $x_0 = (0, 0)$
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$
3. $L + c_0 = a(y, t)\left[\partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)\right]$

où $a : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$, $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-1}$ *et* $c : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ *sont des fonctions* C^∞ *au voisinage de* $(0, 0)$ *et* $a(y, t) \neq 0$ *au voisinage de* $(0, 0)$.

Démonstration. Commençons par choisir des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ telles que $x_0 = (0, \ldots, 0)$ et $x_n = \varphi(x) - \varphi(x_0)$; comme le problème est non caractéristique, nous savons que $a_n(0, \ldots, 0) \neq 0$; on peut donc écrire

$$L + c_0 = a_n(x)\left[\partial_n + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\alpha_j(x) + i\beta_j(x)\right) \partial_j + c_1(x)\right]$$