

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 32 (1986)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION TO MICROLOCAL ANALYSIS
Autor: Kashiwara, Masaki
Kapitel: §5. The Vanishing Cycle Sheaf
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-55089>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.03.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

§ 5. THE VANISHING CYCLE SHEAF

5.1. Let M be a real manifold and $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ a continuous map. For a sheaf \mathcal{F} on M , $\mathcal{H}_{f^{-1}(\mathbf{R}^+)}^j(\mathcal{F})|_{f^{-1}(0)}$ is called the (j -th) *vanishing cycle sheaf* of \mathcal{F} . Here $\mathbf{R}^+ = \{t \in \mathbf{R}; t \geq 0\}$. This measures how the cohomology groups of \mathcal{F} change across the fibers of f . Its algebro-geometric version is studied by Grothendieck-Deligne ([D]).

5.2. Let (X, \mathcal{O}_X) be a complex manifold. Let $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ be a C^∞ -map and consider the vanishing cycle sheaf $\mathcal{H}_{f^{-1}(\mathbf{R}^+)}^j(\mathcal{O}_X)|_{f^{-1}(0)}$. Let s be the section of $f^{-1}(0) \rightarrow T^*X$ given by df . Then we have

PROPOSITION 5.2.1 ([KS1] § 3, [K2] § 4.2). $\mathcal{H}_{f^{-1}(\mathbf{R}^+)}^j(\mathcal{O}_X)|_{f^{-1}(0)}$ has a structure of an $s^{-1}\mathcal{E}_X$ -module.

Let P be a differential operator. If $\sigma(P)$ does not vanish on $s(f^{-1}(0))$, then P has an inverse in $s^{-1}\mathcal{E}_X$ by Proposition 2.2.3. Therefore we obtain

COROLLARY 5.2.2. If $\sigma(P)|_{s(f^{-1}(0))} \neq 0$, then

$$P: \mathcal{H}_{f^{-1}(\mathbf{R}^+)}^j(\mathcal{O}_X)|_{f^{-1}(0)} \rightarrow \mathcal{H}_{f^{-1}(\mathbf{R}^+)}^j(\mathcal{O}_X)|_{f^{-1}(0)}$$

is bijective.

5.3. More generally, let \mathcal{M} be a coherent \mathcal{D}_X -module, and set

$$\mathcal{F}^\bullet = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X).$$

Then the preceding corollary shows that

$$\mathbf{R}\Gamma_{f^{-1}(\mathbf{R}^+)}(\mathcal{F}^\bullet)|_{f^{-1}(0)} = 0 \quad \text{if} \quad s(f^{-1}(0)) \cap \text{Ch}(\mathcal{M}) = \emptyset.$$

Here $\text{Ch}\mathcal{M}$ denotes the characteristic variety of \mathcal{M} .

5.4. To consider vanishing cycle sheaves is very near to the "microlocal" consideration. In this direction, see [K-S2].

§ 6. MICRO-DIFFERENTIAL OPERATORS AND THE SYMPLECTIC STRUCTURE ON THE COTANGENT BUNDLE

6.1. The ring \mathcal{E}_X is a non-commutative ring. This fact gives rise to new phenomena which are not shared by commutative rings such as the ring of