Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Autor: Raymond, Xavier Saint

Kapitel: 1.1. Comment formuler le problème

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55077

de développement limité du type (2.1) commun à tous les u_k, formule qui joue un rôle central pour le recollement au paragraphe 2.3. A ces difficultés s'ajoute le fait que nous devons choisir les paramètres λ_k tellement grands que l'on n'a plus $\lambda_k \sim \lambda_{k+1}$ (contrairement à la situation standard où λ_k est une puissance de k), ce qui a pour effet de multiplier les contraintes sur ces paramètres (car $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k a_k \neq \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{k+1} a_k$ en général).

L'originalité du théorème réside donc dans l'assouplissement des techniques de recollement des fonctions u_k, la partie optique géométrique étant réduite au choix trivial de la phase $B(t) + iy$: c'est exactement le contraire de la méthode décrite au chapitre 2 où l'étape délicate est la construction de la phase (paragraphe 2.2), le reste (paragraphes 2.3 et 2.4) étant standard (cf. Alinhac et Zuily [3], et Alinhac [1]).

Enfin, nous tenons à remercier C. Zuily pour les discussions que nous avons eues, tout particulièrement pour la mise au point du lemme 3.3, ainsi que pour avoir bien voulu relire ces notes; nous lui en sommes très reconnaissant.

Chapitre 1: Notations et résultats principaux

1.1. Comment formuler le problème

Nous nous plaçons au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$; l'une des coordonnées dans $\mathbf{R}^n$ est le temps, mais avant de l'écrire explicitement, nous considérerons que c'est une fonction donnée $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ à valeurs réelles telle que $d\varphi(x_0) \neq 0$ (afin de pouvoir la prendre comme coordonnée près de x_0).

On étudie un « phénomène physique » représenté par une fonction $u \in C^1(\mathbf{R}^n)$ à valeurs complexes qui est connue dans le passé $\big(u(x) = u_0(x)$ si $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\big)$ et qui satisfait une équation d'évolution $Lu + c_0 u = f$, avec $L = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j(x)\, \partial_j$ où $\partial_j = \partial/\partial x_j$ et les $a_j \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ sont à valeurs complexes ainsi que le terme d'ordre zéro $c_0 \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Ici, $u_0(x)$ et $f(x)$ sont des données du problème.

Nous nous intéressons à l'unicité de la solution d'un tel problème indépendamment de son existence, ou plutôt à l'unicité locale en x_0: étant données deux solutions u_1 et u_2 du problème, coïncident-elles dans tout un voisinage de x_0? Comme tout est linéaire, cette question nous conduit (en posant $v=u_1-u_2$) à l'étude du noyau de l'application linéaire associée: de

$$\begin{cases} Lv + c_0 v = 0 \\ v(x) = 0 \quad \text{si} \quad \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0), \end{cases}$$

peut-on déduire que $v = 0$ dans tout un voisinage de x_0?

A l'exception des résultats cités au chapitre 6, nous rechercherons essentiellement une propriété d'unicité « stable » dans le sens suivant: sous les hypothèses des théorèmes d'unicité (cf. théorème 1.2), la propriété d'unicité demeurera si l'on modifie le terme d'ordre zéro c_0, ou si l'on se place en un point voisin de x_0 sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Ce point de vue explique que nous ne fassions pas mention du théorème d'Holmgren, ni de théorèmes analogues; cela donne en outre à nos réciproques la forme que l'on trouvera typiquement énoncée au théorème 1.1 ci-dessous.

1.2. Nature des hypothèses

Nous introduisons maintenant les objets algébriques sur lesquels nous désirons « lire » la réponse à la question que nous avons posée. Ces objets sont construits à partir de la fonction temps φ et de l'opérateur L, et reflètent leurs propriétés près de x_0. Nous supposerons tout au long de ces notes que L est non dégénéré en x_0, c'est-à-dire que $\sum_{j=1}^{n} |a_j(x_0)|^2 \neq 0$.

Commençons par une définition: Le problème est dit caractéristique si $L\varphi(x_0) = 0$. Cette définition est indépendante de la fonction φ pourvu que cette dernière définisse les mêmes demi-espaces du passé et du futur. Les chapitres 2, 3 et 4 sont consacrés à l'étude du problème non caractéristique, tandis que le problème caractéristique est abordé au chapitre 5.

Nous allons construire maintenant l'objet qui permettra principalement la discussion de l'unicité: l'algèbre de Lie $\mathscr{L}$ associée au champ L. Par cette expression, nous désignons l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des champs réels $X = \operatorname{Re} L$, $Y = \operatorname{Im} L$ et de tous leurs commutateurs: $[X, Y] = XY - YX$, $[X, [X, Y]]$ etc. En chaque point x, ces combinaisons linéaires forment un sous-espace vectoriel de $T_x\mathbf{R}^n$ dont la dimension est appelée rang de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}$ au point x et que nous noterons $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x)$. Comme L est non dégénéré en x_0, on a $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) \in \{1, ..., n\}$ pour tout x voisin de x_0, mais le rang de $\mathscr{L}$ n'a aucune raison d'être constant lorsqu'on passe d'un point à un point voisin.