Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE POLARE ZERLEGUNG EINER REGULÄREN MATRIX UND DIE GEOMETRIE DER ORTHOGONALEN GRUPPE

Autor: Rummler, Hansklaus

Kapitel: §3. Die Geodätischen $U_\varepsilon exp(tB_{ij})$

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55087

§ 3. Die Geodätischen $U_\varepsilon \exp(tB_{ij})$

Zum Abschluss wollen wir noch die weiter oben betrachteten Kurven $(U_\varepsilon \exp(tB_{ij}))_{t\in\mathbf{R}}$ etwas näher untersuchen. Man rechnet leicht $B_{ij}^3 = -B_{ij}$ und $B_{ij}^4 = -B_{ij}^2$ aus, und daraus ergibt sich

$$\exp(tB_{ij}) = \mathbf{1} + B_{ij}^2 - \cos t\, B_{ij}^2 + \sin t\, B_{ij}\,.$$

Es handelt sich also um einen Kreis vom Radius $\sqrt{2}$ mit dem Mittelpunkt

$$M_{ij} = \mathbf{1} + B_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

wo auf der Diagonalen lauter Einsen und genau zwei Nullen stehen. Insbesondere ist also

$$\exp(\pi B_{ij}) = \mathbf{1} + 2B_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

und daraus ergibt sich $A = U_\varepsilon S_\varepsilon = U_\varepsilon \exp(\pi B_{ij}) \exp(\pi B_{ij}) S_\varepsilon$ mit $\exp(\pi B_{ij}) S_\varepsilon = S_{\varepsilon'}$, wobei $\varepsilon'_k = \begin{cases} \varepsilon_k\,, & \text{falls } k \neq i,j \\ -\varepsilon_k\,, & \text{falls } k = i,j \end{cases}$ ist.

Folglich ist auch $U_\varepsilon \exp(\pi B_{ij}) = U_{\varepsilon'}$.

$U_\varepsilon \exp(tB_{ij})$ ist minimal, d.h. es gibt keine kürzere Verbindung zwischen U_ε und $U_{\varepsilon'}$ in $O(n)$: Um das zu zeigen, genügt es offenbar, $\exp(tB_{ij})$ in

$SO(n)$ zu untersuchen und zu zeigen, dass diese Kurve die kürzeste Verbindung zwischen $\mathbf{1}$ und $\mathbf{1} + 2B_{ij}$ darstellt. Sei dazu V eine beste orthogonale Approximation von M_{ij}. (V ist nicht eindeutig, da M_{ij} nicht regulär ist.) Dann besitzt M_{ij} die polare Zerlegung $M_{ij} = VT$, wobei T symmetrisch ist und $T^2 = M_{ij}^* M_{ij} = M_{ij}$ gilt, also

$$\begin{aligned}\| M_{ij} - V \|^2 &= \| T - \mathbf{1} \|^2 = \| T \|^2 - 2\mathrm{tr} T + \| \mathbf{1} \|^2 \\ &= \| M_{ij} \|^2 - 2\mathrm{tr} T + \| \mathbf{1} \|^2 = n - 2 - 2\mathrm{tr} T + n \\ &= 2n - 2 - 2\mathrm{tr} T .\end{aligned}$$

Numerieren wir die Standardbasis des $\mathbf{R}^n$ in geeigneter Weise um, so ist

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ also } T = \begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

mit $T_1 \in O(n-2)$ symmetrisch, und damit $\mathrm{tr} T \leqslant n-2$, wobei Gleichheit genau für $T_1 = \mathbf{1}$ gilt. Folglich ist $\| M_{ij} - V \|^2 \geqslant 2n - 2 - 2n + 4 = 2$, und jeder Weg in $SO(n)$ zwischen $\mathbf{1}$ und $\mathbf{1} + 2B_{ij}^2$ verläuft ausserhalb der offenen Kugel vom Radius $\sqrt{2}$ um M_{ij} in $\mathbf{R}^{n \times n}$ und ist damit mindestens so lang wie der Kreisbogen $(\exp(tB_{ij}))_{0 \leqslant t \leqslant \pi}$.

LITERATUR

[1] BOTT, R. Lectures on Morse Theory, old and new. *Bull. Amer. Math. Soc. 7* (1982), 331-358.

[2] EHRESMANN, C. Sur la topologie des groupes simples clos. *C. R. Acad. Sci. Paris 208* (1939), 1263-1265.

[3] HALMOS, P. R. *Finite-dimensional Vector Spaces*, 2nd ed., Princeton, N. J.: Van Nostrand (1958).

[4] JEGER, M. *Einführung in die Kombinatorik*, Bd. 2, Stuttgart: Klett (1976).

(Reçu le 5 août 1985)

Hansklaus Rummler

Institut de Mathématiques
de l'Université de Fribourg
CH-1700 Fribourg