

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	32 (1986)
<b>Heft:</b>	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE POLARE ZERLEGUNG EINER REGULÄREN MATRIX UND DIE GEOMETRIE DER ORTHOGONALEN GRUPPE
<b>Autor:</b>	Rummel, Hansklaus
<b>Kapitel:</b>	§3. Die Geodätischen $U_{\lambda} \exp(tB_{ij})$
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-55087">https://doi.org/10.5169/seals-55087</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### § 3. DIE GEODÄTISCHEN $U_\varepsilon \exp(tB_{ij})$

Zum Abschluss wollen wir noch die weiter oben betrachteten Kurven  $(U_\varepsilon \exp(tB_{ij}))_{t \in \mathbb{R}}$  etwas näher untersuchen. Man rechnet leicht  $B_{ij}^3 = -B_{ij}$  und  $B_{ij}^4 = -B_{ij}^2$  aus, und daraus ergibt sich

$$\exp(tB_{ij}) = \mathbf{1} + B_{ij}^2 - \cos t B_{ij}^2 + \sin t B_{ij}.$$

Es handelt sich also um einen Kreis vom Radius  $\sqrt{2}$  mit dem Mittelpunkt

$$M_{ij} = \mathbf{1} + B_{ij}^2 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & . & & \\ & & 0 & \\ & & & . \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix},$$

wo auf der Diagonalen lauter Einsen und genau zwei Nullen stehen. Insbesondere ist also

$$\exp(\pi B_{ij}) = \mathbf{1} + 2B_{ij}^2 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & . & & \\ & & -1 & \\ & & & . \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix},$$

und daraus ergibt sich  $A = U_\varepsilon S_\varepsilon = U_\varepsilon \exp(\pi B_{ij}) \exp(\pi B_{ij}) S_\varepsilon$  mit  $\exp(\pi B_{ij}) S_\varepsilon = S_{\varepsilon'}$ , wobei  $\varepsilon'_k = \begin{cases} \varepsilon_k, & \text{falls } k \neq i, j \\ -\varepsilon_k, & \text{falls } k = i, j \end{cases}$  ist.

Folglich ist auch  $U_\varepsilon \exp(\pi B_{ij}) = U_{\varepsilon'}$ .

$U_\varepsilon \exp(tB_{ij})$  ist minimal, d.h. es gibt keine kürzere Verbindung zwischen  $U_\varepsilon$  und  $U_{\varepsilon'}$  in  $O(n)$ : Um das zu zeigen, genügt es offenbar,  $\exp(tB_{ij})$  in

$SO(n)$  zu untersuchen und zu zeigen, dass diese Kurve die kürzeste Verbindung zwischen  $\mathbf{1}$  und  $\mathbf{1} + 2B_{ij}$  darstellt. Sei dazu  $V$  eine beste orthogonale Approximation von  $M_{ij}$ . ( $V$  ist nicht eindeutig, da  $M_{ij}$  nicht regulär ist.) Dann besitzt  $M_{ij}$  die polare Zerlegung  $M_{ij} = VT$ , wobei  $T$  symmetrisch ist und  $T^2 = M_{ij}^*M_{ij} = M_{ij}$  gilt, also

$$\begin{aligned}\|M_{ij} - V\|^2 &= \|T - \mathbf{1}\|^2 = \|T\|^2 - 2\text{tr}T + \|\mathbf{1}\|^2 \\ &= \|M_{ij}\|^2 - 2\text{tr}T + \|\mathbf{1}\|^2 = n - 2 - 2\text{tr}T + n \\ &= 2n - 2 - 2\text{tr}T.\end{aligned}$$

Numerieren wir die Standardbasis des  $\mathbf{R}^n$  in geeigneter Weise um, so ist

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ also } T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $T_1 \in O(n-2)$  symmetrisch, und damit  $\text{tr}T \leq n-2$ , wobei Gleichheit genau für  $T_1 = \mathbf{1}$  gilt. Folglich ist  $\|M_{ij} - V\|^2 \geq 2n - 2 - 2n + 4 = 2$ , und jeder Weg in  $SO(n)$  zwischen  $\mathbf{1}$  und  $\mathbf{1} + 2B_{ij}^2$  verläuft ausserhalb der offenen Kugel vom Radius  $\sqrt{2}$  um  $M_{ij}$  in  $\mathbf{R}^{n \times n}$  und ist damit mindestens so lang wie der Kreisbogen  $(\exp(tB_{ij}))_{0 \leq t \leq \pi}$ .

## LITERATUR

- [1] BOTT, R. Lectures on Morse Theory, old and new. *Bull. Amer. Math. Soc.* 7 (1982), 331-358.
- [2] EHRESMANN, C. Sur la topologie des groupes simples clos. *C. R. Acad. Sci. Paris* 208 (1939), 1263-1265.
- [3] HALMOS, P. R. *Finite-dimensional Vector Spaces*, 2nd ed., Princeton, N. J.: Van Nostrand (1958).
- [4] JEGER, M. *Einführung in die Kombinatorik*, Bd. 2, Stuttgart: Klett (1976).

(Reçu le 5 août 1985)

Hansklaus Rummler

Institut de Mathématiques  
de l'Université de Fribourg  
CH-1700 Fribourg