

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 31 (1985)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE ET PRINCIPE DE HASSE FIN
POUR CERTAINS SYSTÈMES DE FORMES
Autor: Danset, Renaud
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-54555>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE
ET
PRINCIPE DE HASSE FIN
POUR CERTAINS SYSTÈMES DE FORMES

par Renaud DANSET

INTRODUCTION

A) PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Soit, pour tout ce travail, $f = (f_1, \dots, f_r)$ un ensemble de r formes, de degré $d \geq 2$, en n variables $x = (x_1, \dots, x_n)$ et à coefficients entiers. On prendra toujours $r \leq n$. (N.B.: « forme » signifie « polynôme homogène »).

Une conjecture attribuée à Artin dit que, si d est impair et $n > rd^2$, le système diophantien $f = 0$ admet des solutions entières non triviales (on dit que f représente zéro). Cette conjecture tente de préciser l'idée selon laquelle si d est impair, ou pair mais avec des conditions nécessaires évidentes et s'il y a suffisamment de variables, alors le système f représente zéro.

Birch (1957, Homogeneous forms of odd degree in a large number of variables, *Mathematika* 4, 102-105) montre, pour $r = 1$, qu'il existe une fonction $d \mapsto N(d)$ telle que toute forme de degré impair d , en n variables avec $n \geq N(d)$ représente zéro; mais sa méthode conduit à des valeurs $N(d)$ astronomiques.

En fait cette conjecture est tellement inaccessible que, dans le cas le plus simple, $d = 3$ et $r = 1$, Davenport (cf. bibliographie) a démontré, à la suite d'un énorme et remarquable travail, que toute forme cubique à coefficients entiers ayant au moins 16 variables, représente zéro. Non seulement 16 n'est pas 10, mais rien d'aussi précis n'est connu pour les autres couples (d, r) .

Une forme plus faible de la conjecture d'Artin est la suivante: pour tout $d \geq 2$, si $n > rd^2$, le système $f = 0$ admet des solutions non triviales dans \mathbf{Q}_p (on dit que f représente zéro dans \mathbf{Q}_p) pour tout entier premier p . Le cas $d = 2$, $r = 1$ constitue le Théorème de Hasse (cf. par exemple Borevitch-Chafarevitch, chapitre I, théorème 5). Le cas $d = 3$, $r = 1$ a été

démontré simultanément mais de manières différentes par Demyanov (1950, On cubic forms in discretely normed fields, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* (N.S.) 74, 889-891) par Lewis (Cubic homogeneous polynomials over p -adic number-fields, *Annals Math.* 56, 1952, 473-478) et Davenport (Cubic forms in 32 variables, cf. bibliographie). Le cas $d = 2$, $r = 2$ a été démontré par Demyanov, une démonstration simplifiée se trouvant dans Birch, Lewis, Murphy, Simultaneous quadratic forms, *Amer. J. Math.* 84, n° 1, 1962, 110-115.

Cette seconde conjecture n'a, elle aussi, été démontrée pour aucun autre couple (d, r) . Cependant Brauer (1945, A note on systems of homogeneous algebraic equations, *Bull. Amer. Math. Soc.* 51, 749-755) a montré, pour $r = 1$, qu'il existe une fonction $d \mapsto M(d)$ telle que toute forme de degré d ayant au moins $M(d)$ variables représente zéro dans \mathbf{Q}_p pour tout p . Dans son travail cité ci-dessus, Birch a utilisé ce résultat de Brauer, malheureusement la méthode, on l'a déjà dit, ne donne pas des valeurs $M(d)$ raisonnables.

On peut citer aussi Ax et Kochen (1965, Diophantine problems over local fields, I, II, *Amer. J. Math.* 87, 605-645) qui ont prouvé que pour un degré d donné, la seconde conjecture est vraie pour toutes les valeurs de p sauf peut-être pour un nombre fini, dépendant de d et dans le cas $r = 1$. Lang a aussi démontré que si la conjecture était vraie pour $r = 1$, elle était également vraie pour tout $r > 1$. (On quasi algebraic closure, *Ann. Math.* 55, n° 2, 1952, 373-390). Enfin Terjanian (*C.R. Acad. Sci.*, 262, 1966, A612) a construit un polynôme homogène de degré 4 à 18 variables qui ne représente pas 0 dans \mathbf{Q}_2 ce qui constitue un contre-exemple à la conjecture, mais d'un type particulier...! Notons pour terminer qu'il est facile de montrer que la valeur hypothétique rd^2 est une borne inférieure (cf. Borevitch-Shafarevitch, Ch. I, § 6-5).

Le lien entre les deux conjectures précédemment citées est ce qu'on appelle le Principe de Hasse; si le système $f = 0$ représente zéro dans \mathbf{R} et dans tous les \mathbf{Q}_p alors il représente zéro dans \mathbf{Q} . Le cas $d = 2$, $r = 1$ constitue le Théorème de Minkowsky-Hasse (cf. Borevitch-Shafarevitch, ch. I, § 7), associé au théorème de Hasse mentionné ci-dessus, il devient le théorème de Meyer: *toute forme quadratique à coefficients entiers, indéfinie et ayant au moins cinq variables, représente zéro*. Malheureusement Selmer (The diophantine equation $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$, *Acta Math.* 85, n° 3-4, 1951, 203-362) a montré en particulier que la forme cubique $3x^3 + 4y^3 + 5z^3$ représente zéro dans \mathbf{R} et dans tous les \mathbf{Q}_p mais pas dans \mathbf{Q} . Enfin il existe beaucoup d'autres contre-exemples qui infirment le Principe de Hasse lorsque $d \geq 3$.

Que peut-on faire avec deux conjectures inaccessibles et un Principe faux?... Restreindre considérablement ses ambitions!

Il existe plusieurs façons d'affaiblir le Principe de Hasse (cf. M. de La Palice); celle qui est utilisée dans ce travail se définit comme suit et s'appelle

PRINCIPE DE HASSE FIN: Si le système diophantien $f = 0$ possède une solution *non singulière* (N.B.: cette dernière est forcément non triviale!) dans \mathbf{R} et dans tous les \mathbf{Q}_p , alors le système f représente zéro dans \mathbf{Q} .

Cette nouvelle version ne résiste pas mieux au contre-exemple de Selmer mais l'expérience a montré sa validité pour des classes suffisamment importantes de systèmes f et en particulier pour ceux considérés dans ce travail.

Pour obtenir ses résultats sur les formes cubiques, évoqués ci-dessus (cf. également le paragraphe 5D du présent travail) Davenport utilise la méthode dite « du cercle » de Hardy et Littlewood. Birch (Forms in many variables, 1962, cf. bibliographie et § 5B du présent travail) s'inspire des résultats de Davenport en les généralisant considérablement. Enfin, W. M. Schmidt, vers 1980, reprend la méthode du cercle comme l'avait fait Birch mais pour le cas $d = 2, r > 1$.

Puisque la méthode du cercle étudie un certain type de sommes trigonométriques associées au système f , *il a paru intéressant d'exprimer la propriété précise de ces sommes* qui permet le succès du principe de Hasse fin pour les systèmes f concernés.

Cette propriété (constituée par les hypothèses (H1) et (H2) ci-dessous formulées) n'est pas de tout repos. Trouver une qualité du système f qui entraîne cette propriété des sommes trigonométriques associées et donc l'application du Principe de Hasse fin, est un problème difficile que chaque auteur traite à sa façon, qui ne constitue pas l'objet du présent travail mais qui est résumé au paragraphe 5. Notons d'ailleurs que les dites « qualités », même si leurs auteurs parviennent à leur donner une expression concise, sont difficilement compréhensibles d'un titulaire du baccalauréat et que leur vérification dans des cas généraux, c'est-à-dire exception faite des exercices « faits pour », n'est pas évidente.

Puisque la méthode du cercle établit une formule asymptotique, réduite en fait à sa partie principale dont le coefficient est le produit de facteurs représentant toutes les places de \mathbf{Q} , *il a paru intéressant de donner un exposé adélique de cette méthode*, suivant ainsi une tendance générale de ces dernières années et plus particulièrement Lachaud (1982 « une présentation adélique de la série singulière et du problème de Waring » cf. bibliographie).

On obtient ainsi :

1°) Une présentation unifiée des arcs majeurs.

2°) Une expression globale pour la série singulière et l'intégrale singulière qui met en évidence la transformée de Gauss globale F^* (selon la notation d'Igusa, cf. bibliographie) associée à une fonction de Schwarz-Bruhat d'un type précis.

Remarque. Un résultat analogue pour d'autres fonctions de Schwarz-Bruhat est une des espérances que ce travail peut susciter.

3°) L'exposé d'une méthode suffisamment générale comme le montrent les exemples du paragraphe 5 et dont les hypothèses initiales sont nettement dégagées.

4°) La démonstration au lemme 1-6 d'une majoration générale d'une somme de modules d'intégrales oscillantes.

B) NOTATIONS ET HYPOTHÈSES PRINCIPALES

Soient $f = (f_1, \dots, f_r)$ r formes de degré $d \geq 2$, en n variables $x = (x_1, \dots, x_n)$ avec $r \leq n$ et à coefficients entiers.

Soit g un polynôme quelconque de degré $< d$ et à coefficients entiers, en les variables x .

Remarque. Tout ce travail pourrait se faire sans mentionner un tel polynôme g , sur ce point on pourra lire la remarque finale du paragraphe 1 et le paragraphe 5A.

Soit \mathcal{B} une boîte de dimension n (parallélépipède de côtés parallèles aux axes de \mathbf{R}^n ou encore: $\{x \in \mathbf{R}^n \mid 1 \leq i \leq n, a_i \leq x_i \leq b_i\}$) et de côtés au plus égaux à 1 (i.e.: $1 \leq i \leq n, b_i - a_i < 1$).

Soit $P \in \mathbf{R}_+$ et destiné à être très grand.

Soit $\varepsilon > 0$ et destiné à être très petit.

Soit $v \in \mathbf{Z}'$.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^r$ ou encore: $1 \leq i \leq r, 0 \leq \alpha_i < 1$.

Soit la somme trigonométrique

$$S(\alpha) = \sum_{x \in P\mathcal{B} \cap \mathbf{Z}^n} \exp \left[2i\pi \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j f_j(x) + g(x) \right) \right]$$

On définit les hypothèses suivantes concernant les sommes trigonométriques $S(\alpha)$ et donc le système f :

(H1) Il existe une constante $\Omega > 0$ telle que pour tout $\Delta > 0$, pour tout polynôme g de degré $< d$, pour toute boîte \mathcal{B} incluse dans un domaine borné de \mathbf{R}^n , pour tout $P > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $\alpha \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^r$, on ait l'alternative suivante :

ou bien i) $|S(\alpha)| \ll P^{n-\Delta\Omega+\varepsilon}$

la constante impliquée dans le symbole « \ll » dépendant seulement des coefficients des formes f_i , du domaine borné dans lequel la boîte \mathcal{B} est choisie, de $\varepsilon > 0$ et, à cause de cette constante, l'inégalité étant triviale pour P petit ;

ou bien ii) Il existe des approximations rationnelles $\frac{a}{q} = \left(\frac{a_1}{q}, \dots, \frac{a_r}{q}\right)$ de $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ telles que

$$\text{pgcd}(a_1, \dots, a_r, q) = 1 \text{ (on ne considère que les } a_i \neq 0),$$

$$1 \leq q \leq P^\Delta,$$

$$0 \leq a_i < q,$$

$$(1 \leq i \leq r) \mid q\alpha_i - a_i \mid \leq P^{-d+\Delta}.$$

(H2) Ω étant la constante définie dans l'hypothèse (H1), on a

$$\Omega > r + 1.$$

Remarques.

a) Comme annoncé précédemment, l'hypothèse (H1) peut faire frémir. En plus romancé, elle énonce une propriété fréquemment rencontrée ou désirée chez les sommes trigonométriques : ou bien on dispose d'une bonne majoration du module des sommes trigonométriques étudiées (ici les sommes $S(\alpha)$), ou bien le coefficient principal de l'exposant (ici la variable α) possède de bonnes approximations rationnelles.

b) On peut remarquer qu'en raison du théorème classique d'approximation rationnelle simultanée de r nombres réels (cf. Hardy and Wright, 4^e édition, paragraphe 11.12) le cas ii), et donc l'hypothèse (H1), sont triviaux pour $\Delta \geq \frac{r}{r+1}d$.

c) On a préféré distinguer les hypothèses (H1) et (H2) car elles jouent des rôles très distincts dans les démonstrations de ce travail.

d) Pour une justification de ces hypothèses, on doit voir le paragraphe 5A.

e) L'ensemble des $\alpha \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^r$, qui satisfont aux conditions de bonne approximation rationnelle énoncées dans ii), constitue ce qu'on appelle classiquement les *arcs majeurs*. L'origine de ce nom se comprend en observant le cas $r = 1$.

L'ensemble complémentaire du précédent dans $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^r$ constitue les *arcs mineurs*. Dans la plupart des applications de la méthode du cercle, dont le nom se comprend soudain mieux (prendre encore le cas $r = 1$ et se demander ce qu'est \mathbf{R}/\mathbf{Z}), le traitement de ces arcs mineurs est la partie la plus délicate car il s'agit d'obtenir, sur eux, une « bonne » majoration du module des sommes trigonométriques étudiées.

On comprend donc que l'hypothèse (H1) avec le cas i) escamote complètement cette difficulté qui, bien entendu, réapparaît selon un Principe de conservation bien connu, dans le problème, déjà évoqué, consistant à trouver une propriété du système f qui entraîne l'hypothèse (H1) (et aussi (H2) d'ailleurs!). Pour cet aspect qui, cela a déjà été dit, sort du cadre de ce travail mais lui est immédiatement associé, il faut lire le paragraphe 5.

Si le lecteur a eu la patience de lire ce qui précède, il sait que le but de ce travail est de montrer que les systèmes f , dont les sommes trigonométriques $\mathcal{S}(\alpha)$ associées répondent aux hypothèses (H1) et (H2), observent le principe de Hasse fin.

Cependant, comme la méthode du cercle se prête très bien à l'étude du système diophantien $f = v$ (et pas seulement $f = 0$) qui paraît même mieux adapté à la nature profonde de celle là, il vaut mieux énoncer deux nouvelles hypothèses pour le cas général dont la restriction au cas $v = 0$ rappellera irrésistiblement les conditions du Principe de Hasse fin.

(H3) Pour un élément v de \mathbf{Z}^r , le système $f = v$ admet une solution *non singulière* dans \mathbf{Z}_p^n , pour tout entier premier p .

(H4) Le système $f = 0$ admet une solution non singulière dans \mathbf{R}^n .

Remarque. Si $v \neq 0$ l'hypothèse (H4) ne dit pas que la variété réelle

$$V(v) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = v\}$$

admet un point réel non singulier mais qu'elle admet un point à l'infini réel non singulier; pour une justification de cette « anomalie », voir le paragraphe 5C.

Le lecteur sait également que la présentation adoptée dans ce travail utilise les adèles. Il est temps d'en parler.

C) ADÈLES

Pour toutes les relations, définitions et propriétés des adèles utilisées ci-après, une référence est Godement (Adèles et idèles, cf. bibliographie).

Soit \mathbf{A} l'ensemble des adèles sur \mathbf{Q} .

Soit ψ le caractère de Tate.

Soit φ une fonction de Schwarz-Bruhat sur \mathbf{A}^n , telle que

- 1) φ est décomposable (i.e.: $\varphi(x) = \varphi_\infty(x_\infty) \prod_p \varphi_p(x_p)$)
- 2) Pour tout p premier, on a

$$\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$$

(on note 1_E la fonction caractéristique d'un ensemble E),

- 3) $\varphi_\infty = \theta * 1_{P\mathcal{B}}$ (produit de convolution)

avec θ fonction de classe C^∞ sur \mathbf{R}^n , à support compact inclus dans un voisinage de 0 et, en pratique, aussi petit qu'il sera nécessaire mais fixé et donc indépendant de la variable P .

Remarque. Il s'agit là d'une différence notable avec le travail de Birch (« forms in many variables » cf. bibliographie) qui utilise la fonction $1_{P\mathcal{B}}$, caractéristique de la boîte $P\mathcal{B}$, discontinue au bord de celle-ci. En définissant φ_∞ comme ci-dessus on obtient d'abord une fonction de Schwarz-Bruhat ce qui permet l'usage d'une formule de Poisson au paragraphe 1. En revanche, on complique légèrement le paragraphe 3 (cf. la remarque importante qui suit la démonstration du Lemme 3-2).

Soit $\xi \in \mathbf{A}^r$, on définit la somme

$$H(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{Q}^n} \varphi(x) \psi(\langle \xi, f(x) \rangle)$$

$$\text{avec } \langle \xi, f(x) \rangle = \sum_{i=1}^r \xi_i f_i(x).$$

Cette somme $H(\xi)$ est absolument convergente et constante sur les classes modulo \mathbf{Q}^r , essentiellement parce que le caractère de Tate est trivial sur \mathbf{Q} .

Ainsi, pour tout $v \in \mathbf{Z}^r$, l'application $\xi \mapsto H(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle)$ définit une fonction sur $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ et on a l'égalité

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle) d\xi = \sum_{x \in \mathbf{Q}^n} \varphi(x) \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} \psi(\langle \xi, f(x) - v \rangle) d\xi.$$

Si $f(x) \neq v$, le caractère $\xi \mapsto \psi(\langle \xi, f(x) - v \rangle)$ n'est pas trivial sur le groupe $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ et son intégrale est nulle.

Si $f(x) = v$, ce caractère est trivial et comme $\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} d\xi = 1$, puisque les mesures de Haar sur \mathbf{A}^r et $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ sont choisies pour qu'il en soit ainsi! On obtient l'importante égalité

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle) d\xi = \sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^n \\ f(x) = v}} \varphi_\infty(x)$$

(la somme \sum du second membre ne porte que sur les $x \in \mathbf{Z}^n$ car $\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$ pour tout p , de plus cette somme représente à peu près le nombre de solutions entières du système $f = v$, présentes dans la boîte $P\mathcal{B} \subset \mathbf{R}^n$).

On cherche principalement, dans le présent travail, à comparer la somme $H(\xi)$ avec l'intégrale de même forme, appelée transformée de Gauss globale (en fait associée au système f , au caractère ψ et à la fonction φ)

$$F^*(\xi) = \int_{\mathbf{A}^n} \varphi(x) \psi(\langle \xi, f(x) \rangle) dx.$$

On veut obtenir la formule asymptotique suivante: il existe $\delta > 0$, tel que

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle) d\xi = \int_{\mathbf{A}^r} F^*(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle) d\xi + O(P^{n-rd-\delta})$$

Remarque. L'intégrale portant sur F^* est la seule raisonnable car cette fonction n'est pas en général constante sur les classes modulo \mathbf{Q} . De plus cette intégrale n'est autre, selon les notations d'Igusa (cf. bibliographie) que $\widehat{F^*}(-v) = F(v)$ appelée série singulière globale (cf. le paragraphe 5F). Le chapeau $\widehat{}$ désigne la transformée de Fourier associée au caractère de Tate (cf. Godement...).

D) MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE

Soit $\xi \in \mathbf{A}^r$; on utilisera désormais les notations suivantes

$$|\xi_\infty| = \max_{1 \leq i \leq r} |\xi_{i, \infty}| \quad \text{et, pour tout } p, \quad |\xi_p|_p = \max_{1 \leq i \leq r} |\xi_{i, p}|_p;$$

on définit aussi la fonction

$$Q(\xi) = \prod_p \max(1, |\xi_p|_p)$$

qui jouera un rôle important et dont on peut remarquer qu'elle ne dépend que des places finies p de ξ mais pas de ξ_∞ .

Enfin on définit, pour chaque $\Delta > 0$, un arc majeur (noter l'emploi du singulier)

$$M(\Delta) = \{\xi \in \mathbf{A}^r / |\xi_\infty| \leq P^{-d+\Delta} \text{ et } Q(\xi) \leq P^\Delta\}.$$

Remarque.

a) Pour Δ suffisamment petit (ceci sera précisé en temps voulu) l'application canonique $\mathbf{A}^r \rightarrow (\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$, que nous désignerons désormais par la lettre π , est *injective* sur $M(\Delta)$. Dans ces conditions, on notera de la même façon $M(\Delta)$ et $\pi(M(\Delta))$ en remarquant que les mesures de Haar sur \mathbf{A}^r et sur $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ attribuent respectivement la même valeur aux ensembles $M(\Delta)$ et $\pi(M(\Delta))$.

b) Ainsi le cercle \mathbf{R}/\mathbf{Z} de la méthode classique a pour analogue adélique le quotient *compact* \mathbf{A}/\mathbf{Q} et les nombreux arcs majeurs classiques associés à un même $\Delta > 0$, trouvent leur analogue adélique dans un unique ensemble $M(\Delta)$ (ou $\pi(M(\Delta))$ si on préfère). Cette présentation de l'arc majeur adélique est due à Lachaud (cf. bibliographie).

Au paragraphe 1, au moyen d'une formule de Poisson, on compare, pour $\xi \in M(\Delta)$, la somme $H(\xi)$ et l'intégrale $F^*(\xi)$. On obtient ainsi le

THÉORÈME 1. Pour Δ suffisamment petit, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\int_{M(\Delta)} (H(\xi) - F^*(\xi)) \psi(\langle \xi, -v \rangle) d\xi = O(P^{n-rd-\delta_1}).$$

Au paragraphe 2, on majore la somme $H(\xi)$ sur l'arc mineur adélique $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(M(\Delta))$, obtenant le

THÉORÈME 2. Sous les hypothèses (H1) et (H2) et pour \mathcal{B} et P convenablement choisis, il existe $\delta_2 > 0$ tel que

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(M(\Delta))} H(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle) d\xi = O(P^{n-rd-\delta_2}).$$

Au paragraphe 3, on majore l'intégrale $F^*(\xi)$ sur $\mathbf{A}^r - M(\Delta)$ pour démontrer le

THÉORÈME 3. *Sous les hypothèses (H1) et (H2), il existe $\delta_3 > 0$ tel que*

$$\int_{\mathbf{A}^r - M(\Delta)} F^*(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle) d\xi = O(P^{n-rd-\delta_3}).$$

Remarque. Une conséquence du théorème 3 est que $F^* \in L^1(\mathbf{A}^r)$.

Ces trois théorèmes permettent d'obtenir la formule asymptotique désirée.

PROPOSITION 4.1. *Sous les hypothèses (H1) et (H2), pour \mathcal{B} et P convenablement choisis, pour tout $v \in \mathbf{Z}'$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^n \\ f(x) = v}} \varphi_\infty(x) = \widehat{F^*}(-v) + O(P^{n-rd-\delta}).$$

Au paragraphe 4, on utilise les hypothèses (H3) et (H4) pour rendre effective la formule asymptotique précédente. On démontre ainsi le

THÉORÈME 4. *Sous les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4), pour \mathcal{B} et P convenablement choisis, on a*

$$\widehat{F^*}(-v) \gg P^{n-rd}.$$

Il résulte de tout ceci le

THÉORÈME PRINCIPAL. *Sous les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) le système diophantien $f = v$ admet une infinité de solutions entières.*

Un corollaire évident de ce Théorème Principal, pour $v = 0$, énonce qu'un système f répondant aux hypothèses (H1) et (H2) observe le Principe de Hasse fin.

Enfin le paragraphe 5, on l'a déjà compris, est consacré à des explications complémentaires et à des exemples suivant les travaux de Birch, Davenport et W. M. Schmidt; mais on ne trouvera dans ce paragraphe aucune démonstration à l'opposé des paragraphes 1 à 4 où on s'est efforcé d'être le plus complet possible.

§ 1. ARC MAJEUR

Le but de ce paragraphe est une bonne majoration de la différence entre la somme $H(\xi)$ et l'intégrale $F^*(\xi)$ lorsque ξ appartient à un arc majeur $M(\Delta)$.

Pour cela on utilise la formule de Poisson (1.1) généralisant ainsi la démonstration de Lachaud dans son théorème 2.9.

Les lemmes 1.1, 1.2 et 1.3 concernent les places finies, ne font appel qu'à l'hypothèse (H1) et obtiennent une majoration intermédiaire qui dépend essentiellement de la place infinie.

Cette dernière est l'objet, au cours des lemmes 1.4, 1.5 et surtout 1.6, d'une démonstration particulièrement technique, c'est-à-dire réservée au lecteur courageux, mais qui utilise seulement l'appartenance de ξ à un arc majeur. On obtient ainsi une majoration suffisamment bonne pour la démonstration du théorème 1 qui termine ce paragraphe.

Soit l'application h qui, à tout élément x de \mathbf{A}^n , associe le nombre complexe

$$h(x) = \varphi(x)\psi(\langle \xi, f(x) \rangle).$$

L'application h dépend du paramètre $\xi \in \mathbf{A}^r$, mais, par commodité, celui-ci n'est pas écrit. Comme h est une application de Schwarz-Bruhat, la formule de Poisson suivante est vraie :

$$(1.1) \quad \sum_{x \in \mathbf{Q}^n} h(x) = \sum_{y \in \mathbf{Q}^n} \hat{h}(y)$$

où

$$\hat{h}(y) = \int_{\mathbf{A}^n} \varphi(x)\psi[\langle \xi, f(x) \rangle + \langle x, y \rangle] dx.$$

Pour une justification de cette formule de Poisson on peut se référer à : Godement, « Adèles et idéles » cours I.H.P.

Puisque les fonctions φ et ψ sont décomposables, il en est de même de h et de \hat{h} , ainsi $\hat{h}(y) = \hat{h}_\infty(y_\infty) \prod_p \hat{h}_p(y_p)$, où « \prod_p » désigne le produit sur toutes les places finies.

LEMME 1.1. Posant $q = \text{Max}(1, |\xi_p|_p)$, on a

$$(1.2) \quad \hat{h}_p(y_p) = q^{-n} \sum_{u \in (\mathbf{Z}_p/q\mathbf{Z}_p)^n} \psi_p(\langle \xi_p, f(u) \rangle + \langle y_p, u \rangle)$$

$$\text{si } y_p \in q^{-1} \mathbf{Z}_p^n,$$

$$(1.3) \quad = 0 \quad \text{si } y_p \notin q^{-1} \mathbf{Z}_p^n.$$

Démonstration. Puisque $\varphi_p(x_p) = 1_{\mathbf{Z}_p^n}(x_p)$, on a

$$\begin{aligned}\hat{h}_p(x_p) &= \int_{\mathbf{Z}_p^n} \psi_p(\langle \xi_p, f(x_p) \rangle + \langle x_p, y_p \rangle) dx_p \\ &= \sum_u \int_{u+q\mathbf{Z}_p^n} \psi_p(\langle \xi_p, f(x_p) \rangle + \langle x_p, y_p \rangle) dx_p\end{aligned}$$

avec u décrivant un système de représentants de $(\mathbf{Z}_p/q\mathbf{Z}_p)^n$.

Mais la fonction qui, à x_p , associe $\psi_p(\langle \xi_p, f(x_p) \rangle)$ est constante sur les classes modulo $q\mathbf{Z}_p^n$. Car, en prenant v élément de \mathbf{Z}_p^n , on a

$$\langle \xi_p, f(x_p + qv) - f(x_p) \rangle = \sum_{i=1}^{i=r} \xi_{i,p} (f_i(x_p + qv) - f_i(x_p))$$

et par la formule de Taylor,

$$f_i(x_p + qv) - f_i(x_p) = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_p) qv_j + \dots$$

Or $x_p \in \mathbf{Z}_p^n$, $v \in \mathbf{Z}_p^n$ et toutes les dérivées (même divisées par $|k|!$, où $|k|$ désigne, selon l'usage, la somme des ordres des dérivations partielles selon les x_j) sont des polynômes à coefficients entiers. De plus, q est présent avec un exposant au moins égal à un dans chaque terme de la formule de Taylor; donc $f_i(x_p + qv) - f_i(x_p) \in q\mathbf{Z}_p$ et, compte tenu de la définition de q , on a

$$\langle \xi_p, f(x_p + qv) - f(x_p) \rangle \in \mathbf{Z}_p$$

et donc

$$\psi_p(\langle \xi_p, f(x_p + qv) \rangle) = \psi_p(\langle \xi_p, f(x_p) \rangle)$$

puisque le caractère ψ_p est trivial sur \mathbf{Z}_p . Ainsi,

$$\begin{aligned}\hat{h}_p(y_p) &= \sum_u \psi_p(\langle \xi_p, f(u) \rangle) \int_{u+q\mathbf{Z}_p^n} \psi_p(\langle x_p, y_p \rangle) dx_p \\ &= \sum_u \psi_p(\langle \xi_p, f(u) \rangle + \langle y_p, u \rangle) \int_{q\mathbf{Z}_p^n} \psi_p(\langle x_p, y_p \rangle) dx_p\end{aligned}$$

car dx_p est une mesure de Haar. Enfin

$$\begin{aligned}\int_{q\mathbf{Z}_p^n} \psi_p(\langle x_p, y_p \rangle) dx_p &= q^{-n} \quad \text{si } y_p \in q^{-1}\mathbf{Z}_p^n, \\ &= 0 \quad \text{si } y_p \notin q^{-1}\mathbf{Z}_p^n,\end{aligned}$$

puisque'il s'agit de l'intégrale, pour une mesure de Haar, d'un caractère sur un sous-groupe de \mathbf{Q}_p^n . On obtient ainsi le résultat annoncé pour $\hat{h}_p(y_p)$. \square

LEMME 1.2. *Sous l'hypothèse (H1) on a*

$$(1.4) \quad |\hat{h}_p(y_p)| \ll \varphi_p(q y_p) q^{-\Omega+\varepsilon}.$$

Démonstration. Rappelons que $q = \text{Max}(1, |\xi_p|_p)$.

Soit $y_p \notin q^{-1}\mathbf{Z}_p^n$, comme $\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$, on a: $\varphi_p(q y_p) = 0$. Mais, d'après l'égalité (1.3), on a aussi $\hat{h}_p(y_p) = 0$ donc l'inégalité (1.4) est vraie dans ce cas.

Soit $y_p \in q^{-1}\mathbf{Z}_p^n$, il vient $\varphi_p(q y_p) = 1$. En utilisant l'égalité (1.2) et l'isomorphisme bien connu entre $\mathbf{Z}_p/q\mathbf{Z}_p$ et $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, on obtient

$$(1.5) \quad \hat{h}_p(y_p) = q^{-n} \sum_{u \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^n} \psi_p(\langle \xi_p, f(u) \rangle + \langle y_p, u \rangle).$$

On peut ici remplacer ξ_p par tout élément de sa classe modulo \mathbf{Z}_p^r et, en particulier, chaque $\xi_{i,p}$ peut être remplacé par sa partie polaire, dans son développement hensélien qui est de la forme $\frac{a_i}{q}$ avec $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_r, q) = 1$ puisque $q = \text{Max}_{1 \leq i \leq r} (1, |\xi_{i,p}|_p)$.

En désignant par \mathcal{B}_0 la boîte unité usuelle de \mathbf{R}^n , l'identité (1.5) devient

$$(1.6) \quad \hat{h}_p(y_p) = q^{-n} \sum_{u \in q\mathcal{B}_0 \cap \mathbf{Z}^n} \exp \left[2i\pi \left(\sum_{j=1}^r \frac{a_j}{q} f_j(u) + \langle y_p, u \rangle \right) \right].$$

On reconnaît une somme $S(\alpha)$, au sens du paragraphe B de l'introduction, en prenant $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$, $P = q$, $\alpha = \left(\frac{a_i}{q} \right) (1 \leq i \leq r)$ et $g(u) = \langle y_p, u \rangle$ avec $d^\circ g = 1 < d$; cette dernière condition, concernant g , a été précisée au moment de la définition des sommes $S(\alpha)$; on trouvera l'explication de son existence au paragraphe 5A).

Un point important est que la majoration qui va suivre *ne dépend pas* des coefficients de g ; elle est donc uniforme en y_p .

Les inégalités du cas ii) de l'hypothèse (H1) sont ici

$$|q'a_i - a'_i q| \leq q^{1-d+\Delta} \quad (1 \leq i \leq r) \quad \text{et} \quad 1 \leq q' \leq q^\Delta,$$

elles sont insolubles pour $\Delta < 1$. En effet, dans ce cas et puisque $d \geq 2$ on a $1 - d + \Delta < 0$ d'où $q'a_i - a'_i q = 0$ ($1 \leq i \leq r$) (comment être entier et de valeur absolue < 1 ?).

On aurait donc $\frac{a_i}{q} = \frac{a'_i}{q'}$ mais aussi $q' < q$ ce qui contredit $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_r, q) = 1$; donc le cas ii) est impossible et on se trouve dans le cas i) de l'hypothèse (H1). Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ et pour $0 < \Delta < 1$, on a

$$|\hat{h}_p(y_p)| \ll q^{-\Delta\Omega + \varepsilon}.$$

D'où le meilleur résultat qui puisse s'en déduire

$$|\hat{h}_p(y_p)| \ll q^{-\Omega + \varepsilon}.$$

L'inégalité (1.4) est donc vraie pour toutes les valeurs de y_p . \square

La fonction $Q(\xi) = \prod_p \text{Max}(1, |\xi_p|_p)$ a déjà été définie au paragraphe D de l'introduction. Il ne s'agit pas vraiment d'un produit infini puisque, pour tout ξ élément de \mathbf{A}^r , les facteurs différents de un sont en nombre fini.

Cette fonction interviendra souvent dans ce travail. Il a déjà été dit dans l'introduction, mais il est bon de le rappeler, qu'elle ne dépend pas de ξ_∞ .

Remarque. Pour tout entier premier p_0 , on a

$$Q(\xi) = \text{Max}(1, |\xi_{p_0}|_{p_0}) \prod_{p \neq p_0} \text{Max}(1, |\xi_p|_p)$$

mais, pour tout $p \neq p_0$, la quantité $\text{Max}(1, |\xi_p|_p)$, qui est une puissance de p , est une unité p_0 -adique. Donc, puisque $\varphi_{p_0} = 1_{\mathbf{Z}_{p_0}^n}$, on peut écrire

$$(1.7) \quad \varphi_{p_0}(Q(\xi)y_{p_0}) = \varphi_{p_0}(y_{p_0} \text{Max}(1, |\xi_{p_0}|_{p_0})).$$

LEMME 1.3. Avec les notations précédentes et sous l'hypothèse (H1), on a, pour tout $\xi \in \mathbf{A}^r$, l'inégalité

$$|H(\xi) - F^*(\xi)| \ll Q(\xi)^{-\Omega + \varepsilon} \sum_{\substack{z \in \mathbf{Z}^n \\ z \neq 0}} |\hat{h}_\infty(Q(\xi)^{-1}z)|.$$

Démonstration. On a, par définition de la fonction F^* :

$$F^*(\xi) = \int_{\mathbf{A}^n} \varphi(x) \psi(\langle \xi, f(x) \rangle) dx = \hat{h}(0)$$

donc, en utilisant la formule de Poisson (1.1), on trouve que

$$H(\xi) - F^*(\xi) = \sum_{\substack{y \in \mathbf{Q}^n \\ y \neq 0}} \hat{h}_\infty(y_\infty) \prod_p \hat{h}_p(y_p).$$

Avec l'inégalité (1.4) du lemme 1.2 et l'égalité (1.7) de la remarque ci-dessus, il vient

$$(1.8) \quad |H(\xi) - F^*(\xi)| \ll \sum_{\substack{y \in \mathbf{Q}^n \\ y \neq 0}} |\hat{h}_\infty(y)| \prod_p \varphi_p(Q(\xi)y_p) Q(\xi)^{-\Omega+\varepsilon}.$$

Bien sûr la fonction $Q(\xi)$ ne dépend ni de l'indice p , ni de $y \in \mathbf{Q}^n - \{0\}$; de plus, à cause du produit $\prod_p \varphi_p(Q(\xi)y_p)$ et de l'égalité $\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$, la somme (1.8) peut se réduire aux y tels que $Q(\xi)y \in \mathbf{Z}^n$. On obtient donc

$$(1.9) \quad |H(\xi) - F^*(\xi)| \ll Q(\xi)^{-\Omega+\varepsilon} \sum_{\substack{z \in \mathbf{Z}^n \\ z \neq 0}} |\hat{h}_\infty(Q(\xi)^{-1}z)|. \quad \square$$

Il faut désormais majorer la somme présente dans le membre de droite de l'inégalité (1.9) et qui ne concerne que la place infinie. C'est l'objet des lemmes 1.4, 1.5 et 1.6 qui suivent.

Soit u une fonction de Schwartz sur \mathbf{R}^n . Pour tout t élément de $[0, 1]^n$, nous noterons u^* la fonction définie par

$$u^*(t) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^n} u(x+t).$$

LEMME 1.4. Avec les notations précédentes, on a

$$\sum_{y \in \mathbf{Z}^n} |\hat{u}(y)|^2 = \int_{[0, 1]^n} |u^*(t)|^2 dt.$$

Démonstration. Appliquons à la fonction u^* l'égalité de Parseval-Bessel; on trouve

$$\int_{[0, 1]^n} |u^*(t)|^2 dt = \sum_{p \in \mathbf{Z}^n} |u_p^*|^2$$

où

$$u_p^* = \int_{[0, 1]^n} u^*(t) e^{2i\pi \langle p, t \rangle} dt$$

est le coefficient de Fourier d'indice p de la fonction u^* ; par suite

$$u_p^* = \sum_{x \in \mathbf{Z}^n} \int_{[0, 1]^n} u(x+t) e^{2i\pi \langle p, t \rangle} dt,$$

car l'interversion de la sommation et de l'intégration est justifiée puisque u est une fonction de Schwartz. Posons $z = x + t$; il vient

$$u_p^* = \sum_{x \in \mathbf{Z}^n} e^{-2i\pi \langle p, x \rangle} \int_{x + [0, 1]^n} u(z) e^{2i\pi \langle p, z \rangle} dz;$$

mais si $\langle p, x \rangle \in \mathbf{Z}$, on a $e^{-2i\pi \langle p, x \rangle} = 1$, d'où

$$u_p^* = \int_{\mathbf{R}^n} u(z) e^{2i\pi \langle p, z \rangle} dz = \hat{u}(-p)$$

et finalement

$$\sum_{y \in \mathbf{Z}^n} |\hat{u}(y)|^2 = \int_{[0, 1]^n} |u^*(t)|^2 dt. \quad \square$$

Soit maintenant $P_0(D)$ l'opérateur différentiel associé au polynôme homogène en n variables, de degré $k = 2s$

$$P_0(x_1, \dots, x_n) = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^s.$$

Selon l'habitude, le symbole $[\alpha]$ désignera la partie entière du réel α .

LEMME 1.5. Avec les notations précédentes et pour $k \geq \left[\frac{n}{2} \right] + 2$, on a l'inégalité

$$\sum_{\substack{y \in \mathbf{Z}^n \\ y \neq 0}} |\hat{u}(y)| \ll \left[\int_{[0, 1]^n} |(P_0(D)u)^*(t)|^2 dt \right]^{1/2}$$

la constante impliquée par le symbole « \ll » dépendant seulement de k et donc de n .

Démonstration. Une propriété classique de la transformation de Fourier s'écrit

$$(P_0(D)u)^\wedge(z) = P_0(2i\pi z)\hat{u}(z) = (2i\pi)^k P_0(z)\hat{u}(z).$$

Appliquant le lemme 1.4 à la fonction de Schwartz $(P_0(D)u)$, il vient

$$\begin{aligned} \int_{[0, 1]^n} |(P_0(D)u)^*(t)|^2 dt &= \sum_{y \in \mathbf{Z}^n} |(P_0(D)u)(y)|^2 \\ &= (2\pi)^{2k} \sum_{y \in \mathbf{Z}^n} |P_0(y)\hat{u}(y)|^2. \end{aligned}$$

Pour que la série $\sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^n \\ y \neq 0}} \frac{1}{|P_0(y)|^2}$ soit convergente, il faut que l'on ait $2k \geq n+1$, ce qui, pour k entier, est obtenu lorsque $k \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$; mais on sait que k est un entier pair d'où la condition, valable pour tout n ,

$$k \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2.$$

Appliquons alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux deux séries de carré sommable, $\sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}^n \\ z \neq 0}} |P_0(z)\hat{u}(z)|$ et $\sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}^n \\ z \neq 0}} \frac{1}{|P_0(z)|}$. On trouve

$$\left[\sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}^n \\ z \neq 0}} |\hat{u}(z)| \right]^2 \ll \left[\sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^n \\ y \neq 0}} |P_0(y)\hat{u}(y)|^2 \right] \left[\sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^n \\ y \neq 0}} \frac{1}{|P_0(y)|^2} \right].$$

Comme $P_0(0) = 0$, on a $\sum_{y \in \mathbb{Z}^n} |P_0(y)\hat{u}(y)|^2 = \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^n \\ y \neq 0}} |P_0(y)\hat{u}(y)|^2$ et donc

$$\sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^n \\ y \neq 0}} |\hat{u}(y)| \ll \left[\int_{[0,1]^n} |(P_0(D)u)^*(t)|^2 dt \right]^{1/2}.$$

La constante impliquée dans le symbole « \ll » provient de $(2\pi)^{2k}$ et de $\sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^n \\ y \neq 0}} \frac{1}{|P_0(y)|^2}$, et dépend donc seulement de k (donc de n) et de P_0 .

Comme on peut toujours multiplier P_0 par un coefficient arbitraire, le symbole « \ll » pourrait même être remplacé par « $<$ » pour des polynômes P_0 convenables. \square

Remarque. Les lemmes 1.4 et 1.5 constituent la généralisation à n variables du lemme 2.11 de Lachaud.

COROLLAIRE. Soit le réel $a \geq 1$, soit la fonction $v(x) = u(ax)$; alors avec les conditions du lemme 1.5, on a

$$(1.10) \quad \frac{1}{a^n} \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^n \\ y \neq 0}} |\hat{u}(y/a)| \ll \left[\int_{[0,1]^n} |(P_0(D)v)^*(t)|^2 dt \right]^{1/2}.$$

Démonstration. On a

$$\hat{v}(y) = \frac{1}{a^n} \hat{u}\left(\frac{y}{a}\right)$$

et l'inégalité (1.10) s'obtient en appliquant le lemme 1.5 à la fonction v . \square

Reprenons, au lieu de la fonction u des deux lemmes précédents, la fonction $h_\infty(x) = \varphi_\infty(x) \exp^{-2i\pi \langle \xi_\infty, f(x) \rangle}$; rappelons que $\varphi_\infty = \theta * 1_{PB}$ (produit de convolution) avec θ , fonction C^∞ à support compact aussi petit que le besoin s'en fera sentir et voisinage de 0. De plus, nous imposerons $\theta \geq 0$ et, par commodité, θ paire.

Comme 1_{PB} est la fonction caractéristique de la boîte $P\mathcal{B}$, la fonction φ_∞ apparaît comme un « adoucissement » C^∞ des discontinuités évidentes de 1_{PB} .

On notera, comme dans tout ce travail, $|\xi_\infty| = \sup_i |\xi_{i,\infty}|$. Enfin le lecteur doit distinguer le polynôme P_0 qui intervient dans les lemmes 1.4, 5 et 6 de la variable P qui figure dans tout ce travail.

LEMME 1.6. *Avec les notations précédentes et sous les conditions*

$$(1.11) \quad |\xi_\infty| \leq P^{-d+\Delta} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leq P^\Delta \quad \text{avec} \quad 0 < \Delta < 1.$$

On a

$$(1.12) \quad \sum_{\substack{z \in \mathbf{Z}^n \\ z \neq 0}} |\hat{h}_\infty(Q(\xi)^{-1}z)| \ll Q(\xi)^{\left[\frac{n}{2}\right]+2} P^{n-1+\Delta}.$$

Démonstration. Sa longueur nous contraint à la scinder en une introduction, une partie A, une partie B et une conclusion.

Introduction. Soit la fonction $v(x) = h_\infty(ax) = u_0(x)v_0(x)$ produit des deux fonctions

$$u_0(x) = \exp(-2i\pi \langle \xi_\infty, f(ax) \rangle)$$

et

$$v_0(x) = \varphi_\infty(ax).$$

Pour étudier la fonction $P_0(D)(u_0v_0)$, on utilise la formule de Leibniz

$$(1.13) \quad P_0(D)(u_0v_0) = \sum_{|j| \leq k} (D^j u_0) (P_0^{(j)}(D)v_0) (j!)^{-1},$$

dans laquelle les notations utilisées sont classiques: le multi-indice $j = (j_1, \dots, j_n)$ est tel que $0 \leq |j| = j_1 + \dots + j_n \leq k$ (rappelons que $k = d^0 P_0$), $P_0^{(j)}$ désigne la dérivée $D^j P_0$ du polynôme P_0 , $D^j u_0$ désigne la dérivée d'ordre j de la fonction u_0 , enfin on a

$$j! = j_1! \dots j_n!;$$

on trouvera une justification de cette formule de Leibniz, par exemple, à la page 10 du livre d'Hörmander, « Linear partial differential operators » (Springer, 1962).

Le nombre de termes dans la somme du membre de droite de l'égalité (1.13) dépend seulement de k et donc de n puisqu'en définitive on posera $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$; ce nombre de termes est donc indépendant des variables a , ξ et P .

Il faut maintenant étudier chacun des termes de cette somme. Nous distinguerons le cas général où $j \neq 0$ (partie A) du cas particulier $j = 0$ (partie B).

Partie A. Cas $j \neq 0$.

La fonction $D^j u_0$ est une somme de termes qui sont de la forme $C(x)u_0(x)$, où $C(x)$ est un polynôme obtenu comme produit, pour des multi-indices s non nuls, de polynômes dérivés $D^s(-2i\pi \langle \xi_\infty, f(ax) \rangle)$.

Pour mieux comprendre la phrase précédente, voici un exemple dans le cas $j = (2, 1, 0, \dots, 0)$ obtenu en posant $w = -2i\pi \langle \xi_\infty, f(ax) \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} e^w &= \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} e^w + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial w}{\partial x_2} e^w + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} e^w \\ &\quad + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} e^w. \end{aligned}$$

On y trouve cinq termes de la forme annoncée, on peut donc trouver plusieurs fois le même $C(x)$; le dernier terme écrit correspond aux multi-indices $s_1 = (1, 0, \dots, 0) = s_2$ et $s_3 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, on peut donc trouver plusieurs fois le même multi-indice s dans un polynôme $C(x)$.

Clairement le nombre de termes nécessaires pour écrire ainsi la fonction $D^j u_0$ dépend de j et, puisque $|j| \leq k$, ce nombre est borné indépendamment de a , ξ ou P . Enfin, le cas $j = 0$, et lui seul, échappe à ce qui vient d'être dit et c'est la raison de son exclusion.

L'expression $w = -2i\pi \langle \xi_\infty, f(ax) \rangle$ est un polynôme homogène en x (de degré d), en a (de degré d), en ξ_∞ (de degré 1). Ainsi a-t-on l'inégalité

$$(1.14) \quad |D^s(w)| \ll a^d |x|^{d-|s|} |\xi_\infty|$$

valable pour $1 \leq |s| \leq d$; pour $|s| > d$ on a bien sûr $D^s(w) = 0$ et la constante sous-entendue par l'inégalité (1.14) dépend des coefficients des formes f_i , du multi-indice s mais ne dépend pas de x , ξ , a ou P .

Comme nous étudierons la fonction $(D^j u_0 P_0^{(j)}(D)v_0)^*$ et comme $v_0(x) = \varphi_\infty(ax)$, on ne fera usage de l'inégalité (1.14) que pour des $x \in \mathbf{R}^n$ tels que $|x| \ll \frac{P}{a}$, la constante impliquée par cette dernière inégalité dépendant

de la fonction θ et de la boîte \mathcal{B} mais non de x , ξ , a ou P . Plus précisément, il existe $\beta > 0$, dépendant de θ et de \mathcal{B} tel que le support de la fonction φ_∞ soit inclus dans la boule de centre 0 et de rayon βP .

Donc pour tout t élément de $[0, 1]^n$ et pour tout x tel que

$$(1.15) \quad |x| \geq \beta \frac{P}{a} + 1$$

on a

$$|x+t| \geq \beta \frac{P}{a}$$

et donc $(ax+at) \notin \text{Support de } \varphi_\infty$, et a fortiori $(ax+at) \notin \text{Support de } P_0^{(j)}(D)\varphi_\infty$; comme de plus

$$(P_0^{(j)}(D)v_0)(x) = a^{|j|}(P_0^{(j)}(D)\varphi_\infty)(ax)$$

on obtient pour tout $t \in [0, 1]^n$ et tout x vérifiant l'inégalité (1.15):

$$(1.16) \quad (P_0^{(j)}(D)v_0)(x+t) = 0$$

Mais, et c'est un point essentiel de la démonstration, puisque $\Delta < 1$, on aura

$$a \leq P^\Delta < P$$

et $\frac{P}{a}$ est donc beaucoup plus grand que 1 dans les conditions du lemme.

En posant, par exemple, $\alpha = \beta + 1$ on constate que tout x tel que

$$|x| \geq \alpha \frac{P}{a}$$

satisfait à l'inégalité (1.15) et, par suite, à l'égalité (1.16).

Ainsi, pour $|x| \ll \frac{P}{a}$, l'inégalité (1.14) devient l'inégalité

$$|D^s(w)| \ll a^{|s|} P^{d-|s|} |\xi_\infty|.$$

Comme l'une des hypothèses du lemme est

$$|\xi_\infty| \leq P^{-d+\Delta}$$

on obtient

$$|D^s(w)| \ll a^{|s|} P^{-|s|+\Delta}$$

et donc

$$(1.17) \quad |C(x) e^{-2i\pi \langle \xi_\infty, f(ax) \rangle}| \ll \prod_{\text{certains } s} a^{|s|} P^{-|s|+\Delta}.$$

Définissons la fonction

$$N(x) = (P_0^{(j)}(D)v_0)(x) C(x)u_0(x).$$

En tenant compte de l'égalité (1.16), valable pour $|x| \gg \frac{P}{a}$, et de l'inégalité (1.17), il vient

$$(1.18) \quad \begin{aligned} |N^*(t)| &\ll \left[\prod_{\text{certains } s} a^{|s|} P^{-|s|+\Delta} \right] \left[\sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}_P^n \\ |x| \leq \frac{P}{a}}} |(P_0^{(j)}(D)v_0)(x+t)| \right] \\ &\ll \left(\prod_s a^{|s|} P^{-|s|+\Delta} \right) a^{|j|} \left[\sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}_P^n \\ |x| \leq \frac{P}{a}}} |(P_0^{(j)}(D)\varphi_\infty)(ax+at)| \right] \end{aligned}$$

Dans cette dernière ligne, l'exposant total de la variable a est

$$|j| + \sum_{\text{certains } s} |s| = k$$

parce que le polynôme P_0 a été choisi homogène. De plus, la fonction $P_0^{(j)}(D)\varphi_\infty$ est bornée, indépendamment de a , ξ ou P , comme le montre le calcul suivant

$$\begin{aligned} |(P_0^{(j)}(D)\varphi_\infty)(t)| &= |P_0^{(j)}(D) \left[\int_{\mathbf{R}^n} \theta(t-x) 1_{P\mathcal{B}}(x) dx \right]| \\ &= \left| \int_{\mathbf{R}^n} (P_0^{(j)}(D)\theta)(t-x) 1_{P\mathcal{B}}(x) dx \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{\mathbf{R}^n} (P_0^{(j)}(D)\theta)(x) 1_{P\mathcal{B}}(t-x) dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbf{R}^n} |(P_0^{(j)}(D)\theta)(x)| dx.
\end{aligned}$$

Cette dernière intégrale existe puisque θ est C^∞ à support compact, sa valeur ne dépend ni de a , ni de ξ , ni de P .

Il en résulte que

$$\sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^n \\ |x| \leq P/a}} |(P_0^{(j)}(D)\varphi_\infty)(ax+at)| \ll \frac{P^n}{a^n}$$

la majoration obtenue étant une estimation classique (à une constante près!) du nombre de $x \in \mathbf{Z}^n$ et tels que $|x| \ll P/a$.

En reprenant l'inégalité (1.18), on obtient

$$|N^*(t)| \ll a^{k-n} P^{n+\xi(\Delta-|s|)}.$$

Dans cette dernière inégalité, la somme qui figure dans l'exposant de la variable P comprend au moins un terme. Comme, de plus, on sait que $\Delta < 1$ et $|s| \geq 1$, on trouve que

$$\sum_s (\Delta - |s|) \leq -1 + \Delta$$

l'égalité pouvant avoir lieu, par exemple lorsque $|j| = 1$. Il s'ensuit que

$$(1.19) \quad |N^*(t)| \ll a^{k-n} P^{n-1+\Delta}.$$

Nous avons dit, au début de cette partie A, que la fonction $D^j u_0$ était une somme de termes de la forme $C(x) e^w$, le nombre de ces termes étant majoré indépendamment de a , ξ ou P . Il est aussi clair que l'application qui associe, à une fonction de Schwartz u , sa « périodisée » u^* , est une application linéaire. Dans ces conditions l'inégalité (1.19) devient, pour tout $j \neq 0$,

$$(1.20) \quad |(D^j u_0 P^{(j)}(D)v_0)^*(t)| \ll a^{k-n} P^{n-1+\Delta}.$$

Partie B. Cas $j = 0$.

On a déjà dit que la démonstration de la partie A ne pouvait servir dans ce cas puisque celle-ci repose sur l'existence d'au moins une fonction dérivée $D^s(w)$, avec $|s| \geq 1$, en facteur de la fonction e^w .

On a tout d'abord, puisque $|D^0 u_0| = |e^w| = 1$,

$$\begin{aligned} |(D^0 u_0 P_0(D)v_0)^*(t)| &\leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} |(P_0(D)v_0)(x+t)| \\ &\leq a^k \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} |(P_0(D)\varphi_\infty)(ax+at)|. \end{aligned}$$

Comme le polynôme P_0 est homogène de degré $k \geq 1$, la fonction $P_0(D)\varphi_\infty$ est combinaison linéaire de dérivées de φ_∞ , mais non de φ_∞ elle-même; or toutes ces fonctions dérivées sont nulles dans les domaines où φ_∞ est constante.

Soit H le tube dont la base est le bord de la boîte $P\mathcal{B}$ et dont l'épaisseur est ≤ 1 . Puisque nous savons que $\varphi_\infty = \theta * 1_{P\mathcal{B}}$ et que le support de la fonction θ est, par exemple, inclus dans $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]^n$, il en résulte que la fonction φ_∞ est constante dans le complémentaire de H .

Il est clair que le volume de H est de l'ordre de la surface de la boîte $P\mathcal{B}$ c'est-à-dire que

$$\text{vol}(H) \ll P^{n-1};$$

et le nombre d'éléments x de \mathbb{Z}^n , tels que $(ax+at) \in H$, est donc $\ll \frac{P^{n-1}}{a^n}$.

Il vient donc l'inégalité

$$(1.21) \quad |(D^0 u_0 P_0(D)v_0)^*(t)| \ll a^{k-n} P^{n-1}.$$

Conclusion: Reprenons la formule de Leibniz (1.13); grâce aux inégalités (1.20) et (1.21), on trouve

$$|(P_0(D)v)^*(t)| \ll a^{k-n} P^{n-1+\Delta}$$

avec, rappelons-le, $v(x) = h_\infty(ax)$.

En appliquant maintenant le corollaire du lemme 1.5, on obtient

$$\sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^n \\ y \neq 0}} \left| \hat{h}_\infty\left(\frac{y}{a}\right) \right| \ll a^k P^{n-1+\Delta}.$$

Prenant enfin $a = Q(\xi) \geq 1$ et $k = \left[\frac{n}{2}\right] + 2$, on obtient le résultat de ce lemme:

$$\sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}^n \\ z \neq 0}} |\hat{h}_\infty(Q(\xi)^{-1}z)| \ll Q(\xi)^{\left[\frac{n}{2}\right]+2} P^{n-1+\Delta}.$$

□

Remarque. Dans cette dernière majoration, on ne peut espérer mieux que $P^{n-1+\Delta}$ si ce n'est peut-être P^{n-1} ou $P^{n-1+\varepsilon}$, pour tout $\varepsilon > 0$, de peu d'avantage puisque cette majoration sera utile dans le cas où Δ est très petit.

En effet, pour $\xi = 0$, on a

$$\hat{h}_\infty(y) = \hat{\phi}_\infty(y) = \hat{\theta}(y) \hat{1}_{PB}(y)$$

avec

$$\hat{1}_{PB}(y) = \int_{PB} e^{-2i\pi \langle x, y \rangle} dx = \prod_{k=1}^n \int_{Pa_k}^{Pb_k} e^{-2i\pi x_k y_k} dx_k$$

si on a défini: $\mathcal{B} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_k \leq x_k \leq b_k, 1 \leq k \leq n\}$.

De plus, on a

$$\begin{aligned} \int_{Pa_k}^{Pb_k} e^{-2i\pi x_k y_k} dx_k &= (2i\pi y_k)^{-1} [e^{-2i\pi y_k Pa_k} - e^{-2i\pi y_k Pb_k}], \quad \text{si } y_k \neq 0 \\ &= P(b_k - a_k), \quad \text{si } y_k = 0. \end{aligned}$$

Donc, lorsque $P \rightarrow \infty$, les termes prépondérants dans la somme

$$\sum_{\substack{y \in \mathbf{Z}^n \\ y \neq 0}} |\hat{\theta}(y)| |\hat{1}_{PB}(y)|$$

sont clairement ceux tels que tous les y_k soient nuls sauf un et ces termes sont de l'ordre de P^{n-1} .

Au contraire, si on fait intervenir la variable a dans le précédent calcul et sous les conditions $1 \leq a \leq P^\Delta$ et $\Delta < 1$, on est conduit, les termes prépondérants restant les mêmes, à une estimation en $(a \log a)$ qui indique la médiocrité du $a^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}$ obtenu.

Heureusement cette puissance $\left[\frac{n}{2}\right] + 2$ de la variable $a = Q(\xi)$, qui est donc probablement trop grande, n'aura aucune conséquence fâcheuse dans la suite de ce travail parce qu'il sera *toujours possible de prendre Δ aussi petit qu'on le désirera*: un coup de chance qui ne se retrouve pas dans d'autres applications de la méthode du cercle (Davenport dixit).

Au paragraphe D de l'introduction, nous avons défini, pour tout $\Delta > 0$, l'arc majeur

$$M(\Delta) = \{\xi \in \mathbf{A}^r \mid |\xi_\infty| \leq P^{-d+\Delta} \text{ et } Q(\xi) \leq P^\Delta\}.$$

LEMME 1.7. Soit π la projection canonique de \mathbf{A}^r sur $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$; alors, si $\Delta < \frac{d}{3}$, la restriction de π à l'arc majeur $M(\Delta)$ est injective pour P suffisamment grand.

Démonstration. On a les propriétés suivantes de la fonction $Q(\xi)$:

$$Q(\xi + \xi') \leq Q(\xi)Q(\xi')$$

et

$$Q(-\xi) = Q(\xi).$$

Prenons ξ et ξ' dans $M(\Delta)$, il en résulte

$$Q(\xi - \xi') \leq Q(\xi)Q(\xi') \leq P^{2\Delta}$$

et

$$|\xi_\infty - \xi'_\infty| \leq |\xi_\infty| + |\xi'_\infty| \leq 2P^{-d+\Delta}.$$

De plus, une conséquence facile de la formule du produit pour les nombres rationnels non nuls est que, pour tout $z \in \mathbf{Q}^r - \{0\}$, on a

$$|z_\infty| Q(z) \geq 1.$$

Comme nous avons obtenu

$$|\xi_\infty - \xi'_\infty| Q(\xi - \xi') \leq 2P^{-d+3\Delta}$$

la conclusion s'impose pour $\Delta < \frac{d}{3}$ et $P > 2^{\frac{1}{d-3\Delta}}$. □

Remarque. Lorsque π est injective sur l'arc majeur $M(\Delta)$, les mesures de Haar $\mu(M(\Delta))$ et $\mu(\pi(M(\Delta)))$ sont égales.

Nous pouvons enfin démontrer le principal résultat de ce paragraphe 1:

THÉORÈME 1. Sous les hypothèses (H1) et (H2) et pour

$$\Delta < \left(\left[\frac{n}{2} \right] + r + 3 \right)^{-1},$$

il existe $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $v \in \mathbf{Z}^r$, on ait

$$\int_{\pi(M(\Delta))} H(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle) d\xi = \int_{M(\Delta)} F^*(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle) d\xi + O(P^{n-rd-\delta_1}).$$

Démonstration. En utilisant le lemme 1.3, on obtient

$$\begin{aligned} |H(\xi)\psi(<\xi, -v>) - F^*(\xi)\psi(<\xi, -v>)| &= |H(\xi) - F(\xi)| \\ &\ll Q(\xi)^{-\Omega+\varepsilon} \sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}^n \\ z \neq 0}} |\hat{h}_\infty(Q(\xi)^{-1}z)|; \end{aligned}$$

puis, en vertu du lemme 1.6, pour $\xi \in M(\Delta)$ et $\Delta < 1$, il vient

$$\begin{aligned} |H(\xi) - F^*(\xi)| &\ll Q(\xi)^{-\Omega+s+\left[\frac{n}{2}\right]+2} P^{n-1+\Delta} \\ &\ll Q(\xi)^{-\Omega+\varepsilon} P^{n-1+\Delta} \left(\left[\frac{n}{2}\right]+3\right). \end{aligned}$$

En suivant le lemme 1.7 et la remarque qui le suit, nous obtenons, pour $\Delta < \frac{d}{3}$:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\pi(M(\Delta))} H(\xi)\psi(<\xi, -v>) d\xi - \int_{M(\Delta)} F^*(\xi)\psi(<\xi, -v>) d\xi \right| \\ &\leq \int_{M(\Delta)} |H(\xi) - F^*(\xi)| d\xi \\ (1.22) \ll &\left[\int_{|\xi_\infty| \leq P^{-d+\Delta}} P^{n-1+\Delta} \left(\left[\frac{n}{2}\right]+3\right) d\xi_\infty \right] \left[\int_{Q(\xi) \leq P^\Delta} Q(\xi)^{-\Omega+\varepsilon} \otimes_p d\xi_p \right]. \end{aligned}$$

L'hypothèse (H2) a, pour principal avantage, d'assurer la convergence, quand $P \rightarrow \infty$, de la dernière intégrale puisque nous pouvons choisir ε tel que

$$0 < \varepsilon < \Omega - r - 1.$$

Une démonstration de cette convergence est proposée au lemme 3.3 de ce travail.

Il reste donc l'expression

$$\begin{aligned} (1.23) \quad &\int_{|\xi_\infty| \leq P^{-d+\Delta}} P^{n-1+\Delta} \left(\left[\frac{n}{2}\right]+3\right) d\xi_\infty = P^{n-1+\Delta} \left(\left[\frac{n}{2}\right]+3\right) P^{-rd+r\Delta} \\ &= P^{n-rd-1+\Delta} \left(\left[\frac{n}{2}\right]+r+3\right). \end{aligned}$$

Prenons donc

$$\Delta < \left(\left[\frac{n}{2}\right]+r+3\right)^{-1} < \inf\left(1, \frac{d}{3}\right).$$

Posons

$$\delta_1 = 1 - \Delta \left(\left[\frac{n}{2} \right] + r + 3 \right) > 0;$$

alors l'expression (1.23) et, par suite, le membre de droite de l'inégalité (1.22) sont des

$$O(P^{n-rd-\delta_1});$$

le Théorème est donc démontré. \square

Remarque. Au lemme 1.2, on peut se passer de l'hypothèse (H1) et majorer trivialement le résultat du lemme 1.1, on obtient, avec $q = \text{Max}(1, |\xi_p|_p)$:

$$(1.24) \quad |\hat{h}_p(y_p)| \leq \varphi_p(q y_p).$$

Alors le lemme 1.3 nous donnerait seulement

$$(1.25) \quad |H(\xi) - F^*(\xi)| \ll \sum_{\substack{z \in \mathbf{Z}^n \\ z \neq 0}} |\hat{h}_\infty(Q(\xi)^{-1}z)|.$$

Bien évidemment, les lemmes 1.4, 5 et 6 n'utilisent pas les hypothèses (H1) et (H2). Enfin on peut aussi abandonner l'hypothèse (H2) dans la démonstration du théorème 1, quitte à rendre Δ encore plus petit mais nous avons déjà dit que c'est sans importance sur le reste de ce travail. Le lecteur vérifiera facilement que l'hypothèse

$$\Delta < \left(\left[\frac{n}{2} \right] + 2r + 4 \right)^{-1}$$

permet la démonstration du théorème 1 sans utiliser les hypothèses (H1) et (H2).

Ainsi, au paragraphe B de l'Introduction pourrait-on supprimer tout ce qui concerne le polynôme quelconque g de degré $< d$, simplifiant ainsi l'hypothèse (H1) sans rien modifier au résultat de ce travail.

Toutefois, comme l'explique le paragraphe 5A), l'hypothèse (H1) provient d'une méthode proposée par Weyl dont les résultats sont indépendants de tout polynôme g de degré $< d$ figurant dans l'expression des sommes $S(\alpha)$. Dans ces conditions, la simplification envisagée n'est qu'un succès à la Pyrrhus.

§ 2. ARC MINEUR

On entend ici par « Arc Mineur », le complémentaire dans $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ de l'arc majeur $M(\Delta)$. On désire majorer le module de la somme $H(\xi)$ lorsque ξ appartient à un tel arc mineur.

Pour cela, l'hypothèse (H1) est indispensable. On définira d'ailleurs un ensemble $T(\Delta) \subset M(\Delta)$, mieux adapté à l'hypothèse (H1) et on obtiendra, au lemme 2.2 une majoration de $|H(\xi)|$ pour ξ appartenant au complémentaire de $T(\Delta)$ dans $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$.

Nous aurons ainsi les moyens de démontrer le principal résultat de ce paragraphe, c'est-à-dire le théorème 2. Enfin l'application stricte de l'hypothèse (H1) qui concerne des sommes trigonométriques d'un type précis nous contraint à des précautions qui sont l'objet du lemme 1 et qui compliquent légèrement, mais sans aucune conséquence sur les principaux résultats de ce travail, l'énoncé du théorème 2. Ces précautions concernent le choix de la boîte \mathcal{B} puis celui de la variable P .

LEMME 2.1. *Il existe un sous-ensemble dense \mathcal{S} de l'ensemble des boîtes \mathcal{B} de \mathbf{R}^n tel que, pour toute boîte \mathcal{B} de \mathcal{S} , il existe un sous-ensemble non borné de \mathbf{R} , noté $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ avec, pour tout P élément de $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ et pour k égal à 0 ou 1, l'égalité suivante*

$$(2.1) \quad \mathbf{Z}^n \cap (\theta * 1_{P\mathcal{B}})^{-1}(\{k\}) = \mathbf{Z}^n \cap 1_{P\mathcal{B}}^{-1}(\{k\}).$$

Remarque. Une explication romanesque du lemme 2.1 et de sa démonstration serait la suivante.

L'adoucissement de la fonction $1_{P\mathcal{B}}$ réalisé par le produit de convolution $\theta * 1_{P\mathcal{B}}$, se produit au voisinage du bord de la boîte $P\mathcal{B}$. Si ce bord est à distance $> \frac{1}{3}$ du réseau \mathbf{Z}^n et si l'adoucissement est suffisamment rapide (support de $\theta \subset \left[-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}\right]$, par exemple !) il ne concerne aucun point de \mathbf{Z}^n .

Démonstration du lemme 2.1. Une boîte \mathcal{B} de \mathbf{R}^n est un n -parallélépipède de côtés parallèles aux axes, ou encore $\mathcal{B} = \{x \in \mathbf{R}^n / (1 \leq i \leq n), a_i \leq x_i \leq b_i\}$.

Considérant $E = \{(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \in \mathbf{R}^{2n} / (1 \leq i \leq n), a_i < b_i\}$, sous-ensemble ouvert de \mathbf{R}^{2n} , en bijection naturelle avec l'ensemble des boîtes \mathcal{B} de \mathbf{R}^n , on peut définir sur E une topologie évidente et donner un sens non moins évident à l'expression: « \mathcal{S} est dense dans E ».

On peut aussi restreindre E par des conditions supplémentaires comme, par exemple :

$$\text{Max } (b_i - a_i) < 1 \quad \text{ou} \quad \text{Max}_i (|a_i|, |b_i|) < M.$$

Définissons alors l'ensemble $\mathcal{S} = \{B \in E \mid (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \text{ est une famille finie de nombres réels linéairement indépendants sur } \mathbf{Q}\}$.

Pour des raisons de dénombrabilité, \mathcal{S} est dense dans E .

Soit maintenant $B \in \mathcal{S}$; le théorème de Kronecker (cf. Hardy and Wright, "The theory of numbers", Oxford Press, Théorème 444) dit justement que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble *non borné* de \mathbf{R} que nous noterons $\mathcal{P}_\varepsilon(\mathcal{B})$ et tel que, pour tout $P \in \mathcal{P}_\varepsilon(\mathcal{B})$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on ait

$$\left[Pa_i - \frac{1}{2} \right] < \varepsilon \quad \text{et} \quad \left[Pb_i - \frac{1}{2} \right] < \varepsilon$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{1}{6}$ et le support de θ inclus dans $\left[-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3} \right]^n$, on se convaincra que

$$\{x \in \mathbf{Z}^n \mid \theta * 1_{P\mathcal{B}}(x) \neq 1_{P\mathcal{B}}(x)\} = \emptyset$$

ce qui constitue le résultat de ce lemme. □

Définissons maintenant, pour $\Delta > 0$, l'ensemble

$$T(\Delta) = \{\xi \in \mathbf{A}^r \mid |\xi_\infty| Q(\xi) \leq P^{-d+\Delta} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leq P^\Delta\}$$

où, mais il s'agit d'un rappel!

$$Q(\xi) = \prod_p \text{Max}(1, |\xi_p|_p).$$

Puisque nous avons $Q(\xi) \geq 1$, l'inégalité

$$|\xi_\infty| Q(\xi) \leq P^{-d+\Delta}$$

entraîne l'inégalité

$$|\xi_\infty| \leq P^{-d+\Delta}$$

et on obtient donc: $T(\Delta) \subset M(\Delta)$. Ces ensembles $T(\Delta)$ sont bien adaptés à l'hypothèse (H1) comme le montre le lemme suivant.

LEMME 2.2. Avec les notations précédentes et sous l'hypothèse (H1), pour tout $\xi \in \mathbf{A}^r$ tel que

$$(2.2) \quad \pi(\xi) \notin \pi(T(\Delta)),$$

où π est la projection canonique de A^r sur $(A/Q)^r$, on a, pour toute boîte $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$, pour tout $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité

$$(2.3) \quad |H(\xi)| \ll P^{n-\Delta\Omega+\varepsilon}.$$

Démonstration. Dans une première partie, on réécrit la somme $H(\xi)$ sous la forme d'une somme trigonométrique $S(\alpha)$ pour un α convenable.

Dans une seconde partie on applique l'hypothèse (H1) à cette somme $S(\alpha)$.

1^{re} partie. Nous savons que, par définition, nous avons l'égalité

$$H(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{Q}^n} \varphi(x) \psi(\langle \xi, f(x) \rangle).$$

Puisque, pour tout entier premier p , on a $\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$, la somme peut se réduire aux $x \in \mathbf{Z}^n$.

Puisque $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$ et $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$, l'égalité (2.1) nous permet d'écrire la relation

$$(2.4) \quad H(\xi) = \sum_{x \in P\mathcal{B} \cap \mathbf{Z}^n} \psi_\infty(\langle \xi_\infty, f(x) \rangle) \prod_p \psi_p(\langle \xi_p, f(x) \rangle).$$

Suivant alors une remarque qui a déjà servi dans la démonstration du lemme 1.2, nous pouvons remplacer ξ_p par la partie polaire de son développement hensélien puisque $f(x) \in \mathbf{Z}^r$ et que le caractère ψ_p est trivial sur \mathbf{Z}_p^r .

Cette partie polaire s'écrit

$$\frac{a_p}{q(\xi_p)} = \left(\frac{a_{p,1}}{q(\xi_p)}, \dots, \frac{a_{p,r}}{q(\xi_p)} \right) \text{ avec les conditions qui la caractérisent}$$

$$0 \leq a_{p,i} < q(\xi_p) \quad (1 \leq i \leq r),$$

$$\text{pgcd}(a_{p,1}, \dots, a_{p,r}, p) = 1,$$

$$q(\xi_p) = \max_{1 \leq i \leq r} (1, |\xi_{p,i}|_p).$$

On obtient alors l'égalité

$$(2.5) \quad H(\xi) = \sum_{x \in P\mathcal{B} \cap \mathbf{Z}^n} \exp(2i\pi \langle -\xi_\infty + \sum_p \frac{a_p}{q(\xi_p)}, f(x) \rangle).$$

Comme il n'y a qu'un nombre fini d'entiers premiers p , tels que $q(\xi_p) > 1$ ou, ce qui est équivalent, $a_p \neq 0$, la somme figurant dans l'exposant ci-dessus a un sens.

De plus, pour ce nombre fini d'entiers premiers p , on a $q(\xi_p) = p^\alpha$ avec $\alpha \geq 1$, donc le p.p.c.m. de différents $q(\xi_p)$ n'est autre que leur produit.

On obtient ainsi

$$\sum_p \frac{a_p}{q(\xi_p)} = \frac{a(\xi)}{Q(\xi)} \quad (\text{élément de } \mathbf{Q}^r)$$

avec

$$Q(\xi) = \prod_p q(\xi_p)$$

et

$$\text{pgcd}(a_1(\xi), \dots, a_r(\xi), Q(\xi)) = 1 \quad (\text{on ne considère que les } a_i(\xi) \neq 0)$$

$$0 \leq a_i(\xi) < Q(\xi) \quad (1 \leq i \leq r).$$

Il vient donc

$$(2.6) \quad H(\xi) = \sum_{x \in P\mathcal{B} \cap \mathbf{Z}^n} \exp(2i\pi \langle -\xi_\infty + \frac{a(\xi)}{Q(\xi)}, f(x) \rangle).$$

L'égalité (2.6) montre que la somme $H(\xi)$ est une somme trigonométrique $S(\alpha)$ pour $g = 0$ et $\alpha = \frac{a(\xi)}{Q(\xi)} - \xi_\infty$.

2^e partie. Soit $\Delta > 0$, supposons que α , trouvé ci-dessus, soit dans le cas ii) de l'hypothèse (H1), c'est-à-dire qu'il existe $\frac{a}{q} = \left(\frac{a_1}{q}, \dots, \frac{a_r}{q}\right)$ élément de \mathbf{Q}^r tel que :

$$0 \leq a_i < q \quad (1 \leq i \leq r),$$

$$\text{pgcd}(a_1, \dots, a_r, q) = 1,$$

$$1 \leq q \leq P^\Delta,$$

$$\left| \alpha_i - \frac{a_i}{q} \right| \leq \frac{1}{q} P^{-d+\Delta} \quad (1 \leq i \leq r).$$

L'ultime condition est équivalente à l'inégalité

$$(2.7) \quad \left| -\xi_\infty + \frac{a(\xi)}{Q(\xi)} - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q} P^{-d+\Delta}.$$

Considérons l'élément ζ de \mathbf{A}^r tel que $\zeta = \xi - \frac{a(\xi)}{Q(\xi)} + \frac{a}{q}$.

Puisque, pour tout entier premier p , on a $\left(\xi - \frac{a(\xi)}{Q(\xi)}\right)_p \in \mathbf{Z}_p^r$, on obtient

$$Q(\zeta) = Q\left(\frac{a}{q}\right) = q.$$

En conséquence, l'inégalité (2.7) devient

$$|\zeta_\infty| Q(\zeta) \leq P^{-d+\Delta};$$

comme de plus

$$1 \leq q = Q(\zeta) \leq P^\Delta$$

on constate que $\zeta \in T(\Delta)$. Enfin, puisque $(\zeta - \xi) \in \mathbf{Q}^r$, on obtient

$$H(\xi) = H(\zeta) \quad \text{et} \quad \pi(\xi) \in \pi(T(\Delta)).$$

Si, maintenant, nous imposons la condition $\pi(\xi) \notin \pi(T(\Delta))$, alors, par contraposée, α n'est pas dans le cas ii) de l'hypothèse (H1); il est donc dans le cas i), d'où l'inégalité

$$|H(\xi)| \ll P^{n-\Delta\Omega+\varepsilon}$$

qui achève cette démonstration. □

Nous avons encore besoin d'un majorant de la mesure de $T(\Delta)$ qui est l'objet d'un dernier lemme.

LEMME 2.3. *On a l'inégalité*

$$(2.8) \quad \mu(T(\Delta)) \leq P^{-rd+(r+1)\Delta}.$$

Démonstration. Dans la démonstration du lemme 2.2, nous avons vu que, $\xi \in \mathbf{A}^r$ étant donné, on connaît alors $\xi_\infty \in \mathbf{R}^r$ et $\frac{a(\xi)}{Q(\xi)} \in \mathbf{Q}^r$, ce dernier ne dépendant que des ξ_p , pour tout p entier premier.

Réciproquement le couple $\left(\xi_\infty, \frac{a(\xi)}{Q(\xi)}\right)$ définit ξ modulo $\prod_p \mathbf{Z}_p^r$.

Pour $\frac{a}{q} = \left(\frac{a_1}{q}, \dots, \frac{a_r}{q}\right) \in \mathbf{Q}^r$ et tel que

$$0 \leq a_i < q \quad (1 \leq i \leq r),$$

$$\text{pgcd}(a_1, \dots, a_r, q) = 1.$$

On définit

$$T_{a,q}(\Delta) = \{ \xi \in \mathbf{A}^r \mid a(\xi) = a \quad \text{et} \quad Q(\xi) = q \\ \text{et} \quad |\xi_\infty| Q(\xi) \leq P^{-d+\Delta} \}.$$

Alors on obtient

$$\mu(T_{a,q}(\Delta)) = \mu_\infty(\{ x \in \mathbf{R}^r \mid |x| \leq \frac{1}{q} P^{-d+\Delta} \}) \prod_p \mu_p(\mathbf{Z}_p^r) = q^{-r} P^{-rd+r\Delta}$$

De plus, on vérifie facilement que pour $(a, q) \neq (a_1, q_1)$ on a

$$T_{a,q}(\Delta) \cap T_{a_1,q_1}(\Delta) = \emptyset$$

et on a aussi

$$T(\Delta) = \bigcup_{1 \leq q \leq P^\Delta} \bigcup_a T_{a,q}(\Delta).$$

De ces trois dernières relations résulte le calcul suivant

$$\begin{aligned} \mu(T(\Delta)) &= \sum_{1 \leq q \leq P^\Delta} \sum_{\substack{0 \leq a_i < q \\ \text{pgcd}(a_1, \dots, a_r, q) = 1}} q^{-r} P^{-rd+r\Delta} \\ &\leq \sum_{1 \leq q \leq P^\Delta} \sum_{0 \leq a_i < q} q^{-r} P^{-rd+r\Delta} \\ &\leq P^{-rd+(r+1)\Delta}; \end{aligned}$$

le lemme 2.3 est donc démontré. \square

Nous pouvons désormais démontrer le principal résultat de ce paragraphe 2.

THÉORÈME 2. *Avec les notations précédentes et sous les hypothèses (H1) et (H2), pour toute boîte $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$, pour tout $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ sous-ensemble non borné de R , pour tout $v \in \mathbf{Z}^r$, pour tout Δ tel que $0 < \Delta \leq \frac{rd}{r+1}$, il existe $\delta_2 > 0$ tel que*

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(M(\Delta))} H(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle) d\xi = O(P^{n-rd-\delta_2}).$$

Démonstration. Puisque $T(\Delta) \subset M(\Delta)$, il suffit de montrer que

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(T(\Delta))} |H(\xi)| d\xi = O(P^{n-rd-\delta_2}).$$

Choisissons Δ tel que $0 < \Delta \leq \frac{rd}{r+1}$, puis définissons une suite

$$\Delta_0 = \Delta < \Delta_1 < \dots < \Delta_N = \frac{rd}{r+1}$$

obtenue en fixant $\delta > 0$ tel que

$$(2.9) \quad \Omega - r - 1 > 2\delta\Delta^{-1}$$

et

$$(2.10) \quad \frac{1}{2}\delta > (r+1)(\Delta_{t+1} - \Delta_t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq N-1.$$

Une telle suite existe puisque, en vertu de l'hypothèse (H2) on a $\Omega - r - 1 > 0$, et δ est d'autant plus petit que Δ est lui-même petit. Puis, δ étant choisi en fonction de l'inégalité (2.9), on peut définir $(\Delta_{t+1} - \Delta_t)$ à partir de l'inégalité (2.10) et obtenir enfin la valeur de N . Il est important de remarquer que δ et N sont indépendants de P .

La raison du choix de $\Delta_N = \frac{rd}{r+1}$ vient du calcul suivant et du lemme 2.2.

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(T(\Delta_N))} |H(\xi)| d\xi \ll \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} P^{n - \Delta_N \Omega + \varepsilon} d\xi \ll P^{n - \frac{rd}{r+1} \Omega + \varepsilon}$$

Mais l'inégalité (2.9) donne

$$\frac{\Omega}{r+1} > 1 + \frac{2\delta}{(r+1)\Delta}$$

donc

$$\begin{aligned} n - \frac{rd}{r+1} \Omega + \varepsilon &< n - rd - 2\delta \frac{\Delta_N}{\Delta} + \varepsilon \\ &< n - rd - 2\delta + \varepsilon \end{aligned}$$

d'où l'inégalité

$$(2.11) \quad \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(T(\Delta_N))} |H(\xi)| d\xi \ll P^{n - rd - 2\delta + \varepsilon}$$

Par ailleurs, on calcule ce qui suit, pour chaque t tel que $0 \leq t \leq N-1$, et en utilisant les lemmes 2.2 et 2.3

$$\int_{\pi(T(\Delta_{t+1})) - \pi(T(\Delta_t))} |H(\xi)| d\xi \ll \int_{\pi(T(\Delta_{t+1}))} P^{n - \Delta_t \Omega + \varepsilon} d\xi \\ \ll P^{-rd + (r+1)\Delta_{t+1} + n - \Delta_t \Omega + \varepsilon} \ll P^{n - rd + (r+1)(\Delta_{t+1} - \Delta_t) - \Delta_t(\Omega - r - 1) + \varepsilon}$$

Mais l'inégalité (2.10) aidant ainsi que l'inégalité (2.9) qui entraîne

$$(\Omega - r - 1) \Delta_t > (\Omega - r - 1) \Delta > 2\delta.$$

On obtient l'inégalité

$$(2.12) \quad \int_{\pi(T(\Delta_{t+1})) - \pi(T(\Delta_t))} |H(\xi)| d\xi \ll P^{n - rd - \frac{3}{2}\delta + \varepsilon}$$

En réunissant l'inégalité (2.11) et les inégalités (2.12) dont le nombre N ne dépend pas de P , il vient

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(T(\Delta))} |H(\xi)| d\xi \ll P^{n - rd - \frac{3}{2}\delta + \varepsilon}$$

On peut enfin choisir $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ et $\delta_2 = \delta$ pour achever la démonstration du théorème 2. \square

Remarque. La démonstration du théorème 2 est classique: voir, par exemple, Birch lemme 4.4.

Remarque. Pour de grandes valeurs Δ , la restriction de la projection π à l'ensemble $T(\Delta)$ n'est pas injective.

Ceci ne présente aucun inconvénient pour la démonstration du théorème 2, puisque l'inégalité

$$\mu(T(\Delta)) \geq \mu[\pi(T(\Delta))]$$

est dans le bon sens.

Au contraire, au paragraphe 1, pour étudier l'intégrale $\int_{\pi(M(\Delta))} H(\xi) d\xi$, il est indispensable d'avoir l'égalité

$$\mu(M(\Delta)) = \mu[\pi(M(\Delta))]$$

qui est obtenue si la projection π est injective sur $M(\Delta)$ et donc pour $\Delta < \frac{d}{3}$ en vertu du lemme 1.7.

§ 3. INTÉGRATION DE LA TRANSFORMÉE DE GAUSS GLOBALE

La principale difficulté de ce paragraphe concerne (encore!) la place infinie où nous cherchons une bonne majoration de l'expression $|F^*(\xi_\infty)|$ pour ξ_∞ grand. C'est l'objet des lemmes 3.1 et surtout 3.2 qui reprennent l'originale méthode de Birch (lemma 4.1, 4.2 and corollary, 5.2).

La suite et la fin de ce paragraphe adaptent la démonstration du théorème 2.8 de Lachaud.

LEMME 3.1. Soit $0 < u < d$, alors, sous l'hypothèse (H1), pour tout $\alpha \in \mathbf{R}^r$ tel que $|\alpha| \leq P^{-\frac{(d+u)}{2}}$ et pour $P > 2^{\frac{1}{u}}$, on a l'inégalité

$$(3.1) \quad |S(\alpha)| \ll P^{n+\varepsilon} [\text{Max}(1, P^d |\alpha|)]^{-\Omega}.$$

Démonstration. Considérons un élément α de \mathbf{R}^r qui soit dans le cas ii) de l'hypothèse (H1) pour deux éléments distincts $\frac{a_1}{q_1}$ et $\frac{a_2}{q_2}$ de \mathbf{Q}^r .

Autrement dit, pour $k \in \{1, 2\}$ et $i \in \{1, \dots, r\}$ on a les relations habituelles

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_{ki} < q_k, \\ \text{pgcd}(a_{k1}, \dots, a_{kr}, q_k) &= 1, \\ 1 &\leq q_k \leq P, \\ |q_k \alpha - a_k| &\leq P^{-d+\Delta}. \end{aligned}$$

Puisque $\frac{a_1}{q_1}$ et $\frac{a_2}{q_2}$ sont distincts, il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que

$$\begin{aligned} 1 &\leq |q_2 a_{1i} - q_1 a_{2i}| \\ &\leq q_2 |q_1 \alpha_i - a_{1i}| + q_1 |q_2 \alpha_i - a_{2i}| \\ &\leq 2 P^{-d+2\Delta} \end{aligned}$$

Un tel résultat est manifestement faux sous les conditions suivantes

$$(3.2) \quad \Delta < \frac{d}{2} \quad \text{et} \quad P > 2^{\frac{1}{d-2\Delta}}.$$

Revenons à la démonstration de l'inégalité (3.1); pour $|\alpha| \leq P^{-d}$ cette inégalité est triviale puisque

$$|S(\alpha)| \ll P^{n+\varepsilon}$$

est toujours vrai.

Supposons donc désormais que

$$P^{-d} < |\alpha| \leq P^{-\frac{1}{2}(d+u)}.$$

Posons $|\alpha| = P^{-d+h}$, il vient donc

$$0 < h \leq \frac{d-u}{2}.$$

Ainsi α est-il dans le cas ii) de l'hypothèse (H1) pour $\Delta = h$, $a = 0$ et $q = 1$; de plus, pour

$$P > 2^{\frac{1}{u}} \geq 2^{\frac{1}{d-2h}}$$

les conditions (3.2) sont remplies et α n'est dans le cas ii) de l'hypothèse (H1) pour aucun élément non nul $\frac{a}{q}$ de \mathbf{Q}^r .

Soit maintenant $0 < \eta < h$ et $\Delta_1 = h - \eta$, alors α n'est plus dans le cas ii) de l'hypothèse (H1) pour Δ_1 , $a = 0$ et $q = 1$ et pas davantage pour tout autre $\frac{a}{q} \in \mathbf{Q}^r - \{0\}$ car cela contredirait ce qui vient d'être dit. Donc α est dans le cas i) de l'hypothèse (H1) pour Δ_1 ; on en déduit l'inégalité

$$|S(\alpha)| \ll P^{n-\Delta_1\Omega+\varepsilon} \ll P^{n-h\Omega+\eta\Omega+\varepsilon}$$

En utilisant $P^d|\alpha| = P^h$ et puisque la constante impliquée par le symbole « \ll » ne dépend pas de $\eta > 0$, on conclut que

$$|S(\alpha)| \ll P^{n+\varepsilon}(P^d|\alpha|)^{-\Omega}$$

ce qui achève la démonstration de ce lemme. □

La transformée de Gauss locale associée à la place infinie de \mathbf{Q} est, selon les notations adoptées dès l'introduction de ce travail.

$$F_{\infty}^*(\xi_{\infty}) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_{\infty}(x) \exp(-2i\pi \langle \xi_{\infty}, f(x) \rangle) dx$$

avec

$$\varphi_{\infty} = \theta * 1_{P\mathcal{O}}.$$

LEMME 3.2. Avec les notations précédentes et sous l'hypothèse (H1), on a

$$|F_{\infty}^*(\xi_{\infty})| \ll P^n [\text{Max}(1, P^d|\xi_{\infty}|)]^{-\Omega+\varepsilon}.$$

Démonstration.

A) Définissons la fonction

$$E_{\xi_{\infty}}(x) = \exp(-2i\pi \langle \xi_{\infty}, f(x) \rangle);$$

alors nous avons l'égalité suivante

$$(\varphi * E_{\xi_{\infty}})(0) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) \exp(-2i\pi \langle \xi_{\infty}, f(-x) \rangle) dx = F_{\infty}^*((-1)^d \xi_{\infty}).$$

En utilisant l'associativité du produit de convolution, il vient

$$[(\theta * 1_{P\mathcal{B}}) * E_{\xi_{\infty}}](0) = [\theta * (1_{P\mathcal{B}} * E_{\xi_{\infty}})](0)$$

ainsi, en changeant ξ_{∞} en $(-1)^d \xi_{\infty}$, on obtient

$$F_{\infty}^*(\xi_{\infty}) = \int_{\mathbf{R}^n} \theta(-x) \cdot (1_{P\mathcal{B}} * E_{(-1)^d \xi_{\infty}})(x) dx.$$

Par commodité décidons que θ est paire, il en résulte l'inégalité

$$(3.3) \quad |F_{\infty}^*(\xi_{\infty})| \ll \max_{x \in \text{Supp } \theta} |(1_{P\mathcal{B}} * E_{(-1)^d \xi_{\infty}})(x)|.$$

B) Faisons maintenant le calcul suivant

$$\begin{aligned} (1_{P\mathcal{B}} * E_{(-1)^d \xi_{\infty}})(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} 1_{P\mathcal{B}}(x-t) \exp(-2i\pi \langle (-1)^d \xi_{\infty}, f(t) \rangle) dt \\ &= \int_{P\mathcal{B}-x} \exp(-2i\pi \langle \xi_{\infty}, f(u) \rangle) du \quad (\text{avec } u = -t) \\ &= \int_{P\left(\mathcal{B}-\frac{x}{P}\right)} \exp(-2i\pi \langle \xi_{\infty}, f(u) \rangle) du \\ &= z^{-n} \int_{zP\left(\mathcal{B}-\frac{x}{P}\right)} \exp(-2i\pi \langle \xi_{\infty} z^{-d}, f(v) \rangle) dv \quad (\text{avec } v = zu) \\ (3.4) \quad &= z^{-n} \left[\sum_{y \in K} \int_{b(y)} + \int_C - \int_D \right]. \end{aligned}$$

Dans cette dernière ligne de calcul l'expression présente sous les signes \int est, bien évidemment, celle figurant sous le signe \int de la ligne précédente. De plus, les notations utilisées ont les sens suivants:

$$K = \mathbf{Z}^n \cap zP \left(\mathcal{B} - \frac{x}{P} \right),$$

$b(y)$ est la boîte unité de centre y ,

C et D sont des domaines voisins des bords de la boîte $zP \left(\mathcal{B} - \frac{x}{P} \right)$, destinés à nous rappeler que les ensembles $zP \left(\mathcal{B} - \frac{x}{P} \right)$ et $\bigcup_{y \in K} b(y)$ ne sont pas tout à fait égaux.

C) L'ordre de grandeur du bord de la boîte $zP \left(\mathcal{B} - \frac{x}{P} \right)$ est $(zP)^{n-1}$, on en déduit l'inégalité

$$(3.5) \quad \left| \int_C - \int_D \right| \ll (zP)^{n-1}.$$

Considérons la fonction $g(y) = \exp(-2i\pi \langle \xi_\infty z^{-d}, f(y) \rangle)$, on a alors

$$\frac{\partial g}{\partial y_j}(y) = -2i\pi \langle \xi_\infty z^{-d}, \frac{\partial f}{\partial y_j}(y) \rangle g(y) \quad (1 \leq j \leq n)$$

et donc

$$(3.6) \quad |\text{grad } g(y)| \ll |\xi_\infty| z^{-d} (Pz)^{d-1}.$$

Dans l'inégalité (3.6) la facteur $(Pz)^{d-1}$ provient de la majoration de $\frac{\partial f}{\partial y_j}(y)$ qui est homogène de degré $(d-1)$ selon les coordonnées de y lequel appartient à $zP \left(\mathcal{B} - \frac{x}{P} \right) + b(0)$, ensemble lui-même inclus dans la boule de centre 0 et de rayon γzP où γ est une constante qui tient compte du domaine borné de \mathbf{R}^n dans lequel se trouve la boîte \mathcal{B} et donc de celui tout aussi borné dans lequel se trouve $\mathcal{B} - \frac{x}{P}$, pour tout $P \geq 1$ et tout x appartenant au support compact de la fonction θ .

Une conséquence de l'inégalité (3.6) est la majoration suivante

$$(3.7) \quad \left| \left(\int_{b(y)} \right) - \exp(-2i\pi \langle \xi_\infty z^{-d}, f(y) \rangle) \right| \ll |\xi_\infty| z^{-1} P^{d-1}.$$

Posons maintenant

$$S(\xi_\infty z^{-d}) = \sum_{y \in K} \exp(-2i\pi \langle \xi_\infty z^{-d}, f(y) \rangle).$$

Alors l'égalité (3.4) et les inégalités (3.5) et (3.7) entraînent l'inégalité

$$(3.8) \quad |z^n(1_{P\mathcal{B}} * E_{(-1)^d \xi_\infty})(x) - S(\xi_\infty z^{-d})| \ll (zP)^{n-1} + |\xi_\infty| z^{-1} P^{d-1} (zP)^n$$

dans laquelle l'expression $(zP)^n$ correspond au cardinal de l'ensemble K .

D) La somme $S(\xi_\infty z^{-d})$ est une somme $S(\alpha)$ pour $\alpha = \xi_\infty z^{-d}$ avec zP au lieu de P et la boîte $\mathcal{B} - \frac{x}{P}$ au lieu de la boîte \mathcal{B} .

Les conditions d'application du lemme 3.1 deviennent alors, avec $0 < u < d$,

$$(3.9) \quad zP > 2^{\frac{1}{u}}$$

et

$$|\xi_\infty| z^{-d} \leq (Pz)^{-\frac{1}{2}(d+u)},$$

cette seconde inégalité étant équivalente à l'inégalité

$$(3.10) \quad z \geq |\xi_\infty|^{\frac{2}{d-u}} P^{\frac{d+u}{d-u}}.$$

Le paramètre u sera précisé ultérieurement, mais désormais la variable z satisfera aux inégalités (3.9) et (3.10). En appliquant le lemme 3.1, on obtient

$$(3.11) \quad \begin{aligned} |S(\xi_\infty z^{-d})| &\ll (zP)^{n+\varepsilon} [\text{Max}(1, (zP)^d |\xi_\infty| z^{-d})]^{-\Omega} \\ &\ll (zP)^{n+\varepsilon} [\text{Max}(1, P^d |\xi_\infty|)]^{-\Omega} \end{aligned}$$

Dans le cas où $P^d |\xi_\infty| \leq 1$, l'inégalité que ce lemme propose se réduit à la trivialité suivante:

$$(3.12) \quad |F^*(\xi_\infty)| \ll P^n.$$

Nous pouvons donc supposer désormais que $P^d |\xi_\infty| > 1$, alors les relations (3.8) et (3.11) impliquent la majoration

$$(3.13) \quad \begin{aligned} |(1_{PB} * E_{(-1)^d \xi_\infty})(x)| &\ll z^\varepsilon P^{n+\varepsilon} (P^d |\xi_\infty|)^{-\Omega} + z^{-1} P^{n-1} (1 + P^d |\xi_\infty|) \\ &\ll z^\varepsilon P^{n+\varepsilon} (P^d |\xi_\infty|)^{-\Omega} + z^{-1} P^{n-1} P^d |\xi_\infty|. \end{aligned}$$

E) Choisissons enfin

$$(3.14) \quad z = P^{-1} (P^d |\xi_\infty|)^{1+\Omega}.$$

Il faut alors vérifier l'inégalité (3.10), d'où le calcul suivant :

$$P^{-1}(P^d|\xi_\infty|)^{1+\Omega} \geq |\xi_\infty|^{\frac{2}{d-u}} P^{\frac{d+u}{d-u}},$$

$$(P^d|\xi_\infty|)^{1+\Omega} \geq (P^d|\xi_\infty|)^{\frac{2}{d-u}}.$$

et puisque nous avons la relation $P^d |\xi_\infty| > 1$, il vient

$$1 + \Omega \geq \frac{2}{d-u},$$

qui donne

$$u \leq d - \frac{2}{1+\Omega};$$

puisque $d \geq 2$ et $\Omega > 0$, on a

$$0 < d - \frac{2}{1+\Omega} < d$$

et nous pouvons donc poser, au mieux,

$$(3.15) \quad u = d - \frac{2}{1+\Omega}.$$

Il reste à vérifier l'inégalité (3.9), qui, compte tenu de l'égalité (3.14) devient

$$(P^d|\xi_\infty|)^{1+\Omega} > 2^{\frac{1}{u}},$$

puis, en tenant compte de l'égalité (3.15)

$$P^d |\xi_\infty| > 2^{\frac{1}{d(1+\Omega)-2}}.$$

Mais pour $1 < P^d |\xi_\infty| \leq 2^{\frac{1}{d(1+\Omega)-2}}$, l'inégalité proposée dans ce lemme revient au résultat trivial (3.12) quitte à augmenter la constante impliquée dans le symbole « \ll ».

Ainsi pouvons-nous considérer que l'égalité (3.14) est justifiée.

F) Avec les inégalités (3.3) et (3.13) ainsi que l'égalité (3.14), on obtient

$$\begin{aligned} |F_\infty^*(\xi_\infty)| &\ll P^{-\varepsilon}(P^d|\xi_\infty|)^{\varepsilon+\varepsilon\Omega-\Omega} P^{n+\varepsilon} + P^{n-1} P(P^d|\xi_\infty|)^{1-1-\Omega} \\ &\ll P^n (P^d|\xi_\infty|)^{-\Omega+\varepsilon(\Omega+1)}. \end{aligned}$$

En posant ε au lieu de $\varepsilon(\Omega + 1)$, on obtient

$$|F_{\infty}^*(\xi_{\infty})| \ll P^n [\text{Max}(1, P^d |\xi_{\infty}|)]^{-\Omega + \varepsilon}.$$

La démonstration de ce lemme est donc terminée. \square

Remarque. Le résultat du lemme 3.2 est utile pour $|\xi_{\infty}|$ très grand; donc z peut-être très grand. C'est la raison pour laquelle l'ensemble

$$zP\left(\mathcal{B} - \frac{x}{P}\right) = zP\mathcal{B} - zx$$

ne peut être assimilé à l'ensemble $zP\mathcal{B}$ car, bien que x soit dans le support de θ dont on a suffisamment dit qu'il peut être aussi petit qu'on le désire *mais fixé*, zx peut être grand.

Dans la démonstration de Birch cet inconvénient n'apparaît pas car Birch utilise $\varphi_{\infty} = 1_{P\mathcal{B}}$ ce qui revient à poser $\theta = \delta_0$, distribution de Dirac en 0, dont le support est $\{0\}$ ce qui entraîne $zx = 0$ pour tout z .

Mais le choix de Birch, pour la fonction φ_{∞} , ne conduit pas à une fonction de Schwarz-Bruhat et ruine le paragraphe 1 de ce travail qui utilise une formule de Poisson.

Puisque nous avons choisi le support de θ comme un voisinage compact *fixé* de 0, il nous faut utiliser la boîte $\mathcal{B} - \frac{x}{P}$ au lieu de la boîte \mathcal{B} , ce qui exige dans l'hypothèse (H1) l'indépendance du résultat obtenu pour \mathcal{B} appartenant à un domaine borné de \mathbf{R}^n .

Birch signale cette indépendance dans la remarque qui suit la démonstration du corollaire de son lemme 4.3: « Note that this corollary does not depend on the box \mathcal{B} being contained in \mathcal{E} »; mais il ne s'en sert jamais puisque, tout au long de ses démonstrations, il utilise la même boîte \mathcal{B} quitte, le moment venu, à la choisir convenablement!

Par commodité nous noterons $\mathbf{A} = \mathbf{R} \times \mathbf{A}_f$, où \mathbf{A}_f est le produit restreint des \mathbf{Q}_p ou \mathbf{Z}_p pour toutes les places finies de \mathbf{Q} . On désigne habituellement \mathbf{A}_f comme l'ensemble des adèles finis.

La mesure de Haar considérée sur \mathbf{A}_f^r est $\bigotimes_p d\xi_p$ et sera notée $d\xi_f$, ainsi a-t-on $d\xi = d\xi_{\infty} \otimes d\xi_f$.

LEMME 3.3. Avec les notations précédentes, l'intégrale $\int_{\mathbf{A}_f^r} Q(\xi)^{-\alpha} d\xi_f$ est convergente si et seulement si $\alpha > r + 1$.

Démonstration. Puisque la fonction $Q(\xi) = \prod_p \text{Max}(1, |\xi_p|_p)$ ne dépend pas de ξ_∞ mais seulement de ξ_f , l'intégrale étudiée apparaît dans de nombreux calculs et sa convergence est un souci légitime.

Tout d'abord il vient, pour tout entier $k \geq 0$,

$$\int_{\text{Max}(1, |\xi_p|_p) \leq p^k} d\xi_p = \prod_{1 \leq i \leq r} \int_{|\xi_{ip}|_p \leq p^k} d\xi_{ip} = p^{kr}.$$

Donc, pour $k \geq 1$, on obtient

$$\int_{|\xi_p|_p = p^k} d\xi_p = p^{kr} - p^{(k-1)r}.$$

Il en résulte le calcul suivant qui n'est possible que pour $\alpha > r$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{Q}_p^r} [\text{Max}(1, |\xi_p|_p)]^{-\alpha} d\xi_p &= \int_{\mathbf{Z}_p^r} d\xi_p + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|\xi_p|_p = p^k} |\xi_p|_p^{-\alpha} d\xi_p \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p^{-k\alpha} [p^{kr} - p^{(k-1)r}] \\ &= 1 + (1 - p^{-r}) \sum_{k=1}^{\infty} p^{k(r-\alpha)} \\ &= 1 + (1 - p^{-r}) \frac{p^{r-\alpha}}{1 - p^{r-\alpha}}. \end{aligned}$$

Puisque nous avons l'égalité

$$\int_{\mathbf{A}_f^r} Q(\xi)^{-\alpha} d\xi_f = \prod_P \int_{\mathbf{Q}_P^r} [\text{Max}(1, |\xi_p|_p)]^{-\alpha} d\xi_p$$

il faut étudier la convergence du produit infini de terme général $(1 + u_p)$, avec

$$u_p = p^{r-\alpha} \frac{1 - p^{-r}}{1 - p^{r-\alpha}},$$

qui est équivalente à la convergence de la série de terme général $u_p \sim p^{r-\alpha}$, d'où la condition classique

$$\alpha - r > 1$$

qui achève la démonstration. □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème auquel ce paragraphe 3 est consacré.

THÉOREME 3. Sous les hypothèses (H1) et (H2), pour tout $\Delta > 0$, il existe $\delta_3 > 0$ tel que, pour tout $v \in \mathbf{Z}^r$, on ait

$$\int_{\mathbf{A}^r - M(\Delta)} F^*(\xi) \psi(<\xi, -v>) d\xi = O(P^{n-rd-\delta_3}).$$

Démonstration. Définissons les quatre intégrales suivantes

$$I_\infty(P) = \int_{|\xi_\infty| > P^{-d+\Delta}} |F_\infty^*(\xi_\infty)| d\xi_\infty,$$

$$J_f = \int_{\mathbf{A}_f^r} |F_f^*(\xi_f)| d\xi_f,$$

$$K_\infty = \int_{\mathbf{R}^r} |F_\infty^*(\xi_\infty)| d\xi_\infty,$$

$$L_f(P) = \int_{Q(\xi) > P^\Delta} |F_f^*(\xi_f)| d\xi_f.$$

Nous avons l'inégalité

$$(3.16) \quad \left| \int_{\mathbf{A}^r - M(\Delta)} F^*(\xi) \psi(<\xi, -v>) d\xi \right| \leq \int_{\mathbf{A}^r - M(\Delta)} |F^*(\xi)| d\xi \\ \leq I_\infty(P) J_f + K_\infty L_f(P).$$

Il nous reste à majorer les quatre intégrales définies ci-dessus.

1) En utilisant le lemme 3.2, il vient

$$I_\infty(P) \ll \int_{|\xi_\infty| P^d > P^\Delta} P^n (|\xi_\infty| P^d)^{-\Omega+\varepsilon} d\xi_\infty \\ \ll P^{n-\Omega d+\varepsilon d} \int_{\Gamma \geq P^{-d+\Delta}} \Gamma^{-\Omega+\varepsilon} \Gamma^{r-1} d\Gamma \\ \ll P^{n-\Omega d+\varepsilon d} \int_{\Gamma \geq P^{-d+\Delta}} \Gamma^{-2} d\Gamma \ll P^{n-rd-\Delta}.$$

Ce calcul n'est autre que celui dit des « surfaces de niveaux » dans \mathbf{R}^r et puisque $|\xi_\infty| = \max_i |\xi_{i\infty}|$, les surfaces de niveaux sont ici des hypercubes. De plus l'hypothèse (H2), à savoir $\Omega > r + 1$, est utilisée pour obtenir les deux dernières inégalités. Enfin on aura choisi $\varepsilon < \Omega - r - 1$.

2) Avec les notations du paragraphe 1 de ce travail, il vient

$$F_f^*(\xi_f) = \prod_p \int_{\mathbf{Q}_p^n} \varphi_p(x_p) \psi_p(\langle \xi_p, f(x_p) \rangle) dx_p = \prod_p \hat{h}_p(0).$$

Donc, en utilisant le lemme 1.2, on obtient

$$J_f \ll \int_{\mathbf{A}_f^r} Q(\xi)^{-\Omega+\varepsilon} d\xi_f$$

et cette dernière intégrale est convergente selon le lemme 3.3, l'hypothèse (H2) et le choix de $\varepsilon < \Omega - r - 1$.

3) On a

$$K_\infty = \int_{|\xi_\infty| \leq P^{-d}} |F_\infty^*(\xi_\infty)| d\xi_\infty + \int_{|\xi_\infty| > P^{-d}} |F_\infty^*(\xi_\infty)| d\xi_\infty;$$

or

$$\int_{|\xi_\infty| \leq P^{-d}} |F_\infty^*(\xi_\infty)| d\xi_\infty \ll \int_{|\xi_\infty| \leq P^{-d}} P^n d\xi_\infty \ll P^{n-rd},$$

et, en reprenant le calcul concernant $I_\infty(P)$ mais avec $\Delta = 0$, on obtient

$$\int_{|\xi_\infty| > P^{-d}} |F_\infty^*(\xi_\infty)| d\xi_\infty \ll P^{n-rd},$$

d'où

$$K_\infty \ll P^{n-rd}$$

4) Comme pour l'intégrale J_f , nous avons la majoration

$$L_f(P) \ll \int_{Q(\xi) > P^\Delta} Q(\xi)^{-\Omega+\varepsilon} d\xi_f.$$

Choisissons cette fois $\varepsilon < \frac{1}{2}(\Omega - r - 1)$, alors on a

$$L_f(P) \ll P^{-\varepsilon\Delta} \int_{Q(\xi) > P^\Delta} Q(\xi)^{-\Omega+2\varepsilon} d\xi_f \ll P^{-\varepsilon\Delta}.$$

Cette dernière inégalité est une conséquence de la convergence de l'intégrale

$$\int_{A_f^r} Q(\xi)^{-\Omega+2\varepsilon} d\xi_f.$$

Enfin nous pouvons appliquer à l'inégalité (3.16) les quatre majorations obtenues ci-dessus. Il vient

$$\left| \int_{A^r - M(\Delta)} F^*(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle) d\xi \right| \ll P^{n-rd-\varepsilon\Delta}.$$

En posant $\delta_3 = \varepsilon\Delta$ on achève cette démonstration. \square

§ 4. SÉRIE SINGULIÈRE ET INTÉGRALE SINGULIÈRE

Une conséquence évidente du Théorème 3 est que la transformée de Gauss globale F^* est intégrable sur A^r . Ainsi sa transformée de Fourier, notée $\widehat{F^*}$, existe. Nous pouvons donc obtenir, grâce aux Théorèmes 1, 2 et 3, le résultat asymptotique suivant qui est essentiel dans ce travail.

PROPOSITION 4.1. *Sous les hypothèses (H1) et (H2) et en utilisant les notations introduites dans les précédents paragraphes, il vient :*

Pour toute boîte $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$, pour tout $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$, pour tout $v \in \mathbf{Z}^r$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(4.1) \quad \sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^n \\ f(x) = v}} \varphi_\infty(x) = \widehat{F^*}(-v) + O(P^{n-rd-\delta})$$

et le membre de gauche de cette égalité est égal au nombre de $x \in P\mathcal{B} \cap \mathbf{Z}^n$ et tels que $f(x) = v$.

Démonstration. On a déjà expliqué, dans l'introduction de ce travail, l'égalité essentielle

$$\int_{(A/Q)^r} H(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle) d\xi = \sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^n \\ f(x) = v}} \varphi_\infty(x).$$

Compte tenu du sens donné au paragraphe 2 aux ensembles \mathcal{S} et $\mathcal{P}(\mathcal{B})$, le membre de droite de cette dernière égalité est exactement le nombre de solutions entières du système $f(x) = v$, situées dans la boîte $P\mathcal{B}$.

Enfin, pour Δ suffisamment petit et pour $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$, on peut appliquer simultanément les Théorèmes 1, 2 et 3. En posant $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, on obtient la formule asymptotique (4.1). \square

Il faut désormais étudier la fonction F^* pour montrer qu'elle constitue bien la partie principale de la formule asymptotique (4.1). Pour cela, les hypothèses (H3) et (H4) seront utilisées.

Nous avons l'égalité

$$(4.2) \quad \widehat{F^*}(-v) = \widehat{F_\infty^*}(-v) \prod_P \widehat{F_P^*}(-v);$$

le produit infini portant sur les places finies s'appelle classiquement « Série singulière », les lemmes 4.2, 3 et 4 lui sont consacrés.

La quantité $\widehat{F_\infty^*}(-v)$ s'appelle « Intégrale singulière » et concerne la place infinie. Son traitement est l'une des difficultés du travail de Birch et donc aussi du présent travail; il occupe les lemmes 4.5 et 6.

Rappelons que, dans tout ce travail, on prend $r \leq n$ et considérons une application $g: \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{Z}^r$, polynomiale à coefficients entiers.

Notons $Dg(x)$, la matrice jacobienne de l'application g en $x \in \mathbf{Z}^n$.

Disons pour simplifier que $Dg(x)$ est d'ordre $l \geq 1$ s'il existe un déterminant extrait d'ordre r qui soit divisible par p^{l-1} et non divisible par p^l .

LEMME 4.2 (Hensel). Soit $l \geq 1$ et $x_0 \in \mathbf{Z}^n$ tels que

- 1) $g(x_0) \equiv 0 \pmod{p^{2l-1}}$.
- 2) $Dg(x_0)$ est d'ordre l .

Alors, pour tout entier $\mu \geq 0$, le système de congruences

$$g(x) \equiv 0 \pmod{p^{2l-1+\mu}}$$

admet au moins $p^{(n-r)\mu}$ solutions y , non congrues deux à deux $\pmod{p^{l+\mu}}$ et telles que $Dg(y)$ soit d'ordre l .

Démonstration. Procédons par récurrence sur l'entier μ ; pour $\mu = 0$ il s'agit de l'hypothèse.

Admettons le lemme vrai pour μ et choisissons $x \in \mathbf{Z}^n$, tel que $g(x) \equiv 0 \pmod{p^{2l-1+\mu}}$ et $Dg(x)$ est d'ordre l .

Alors en utilisant la formule de Taylor où les $\frac{1}{k!}$ sont de « faux » dénominateurs ! il vient

$$(4.2) \quad g(x + u p^{l+\mu}) \equiv g(x) + p^{l+\mu} Dg(x)(u) \pmod{p^{2l+2\mu}}.$$

Avec $a \in \mathbf{Z}'$, on peut écrire

$$(4.3) \quad g(x) \equiv a p^{2l-1+\mu}.$$

Compte tenu des congruences (4.2) et (4.3), nous aurons la congruence

$$(4.4) \quad g(x + up^{l+\mu}) \equiv 0 \pmod{p^{2l+\mu}}$$

si et seulement si

$$a p^{2l-1+\mu} + p^{l+\mu} Dg(x)(u) \equiv 0 \pmod{p^{2l+\mu}},$$

c'est-à-dire

$$(4.5) \quad a p^{l-1} + Dg(x)(u) \equiv 0 \pmod{p^l}$$

Mais la congruence (4.5) est un système linéaire en $u = (u_1, \dots, u_n)$ à coefficients dans l'anneau $\mathbf{Z}/p^l\mathbf{Z}$. La méthode usuelle de résolution d'un système linéaire est valable tant qu'il ne s'agit pas de diviser. Puisque $Dg(x)$ est d'ordre l , il existe un déterminant extrait d'ordre r égal à bp^{l-1} , avec $b \not\equiv 0 \pmod{p}$. Notons ce déterminant $\det[\alpha_1, \dots, \alpha_r]$, les α_j désignant ses colonnes.

A partir de ce déterminant, on définit classiquement des équations et inconnues principales et on se ramène à la résolution usuelle du système restreint (les $n-r$ inconnues non principales étant devenues des paramètres) et aux formules classiques de Cramer :

Pour chaque $i \in [1, n]$, on a

$$u_i \det[\alpha_1, \dots, \alpha_r] \equiv \det[\alpha_1, \dots, -ap^{l-1}, \dots, \alpha_r] \pmod{p^l}$$

qui devient

$$u_i b p^{l-1} \equiv p^{l-1} \det[\alpha_1, \dots, -a, \dots, \alpha_r] \pmod{p^l}$$

et enfin

$$u_i b \equiv \det[\alpha_1, \dots, -a, \dots, \alpha_r] \pmod{p}.$$

Il en résulte le calcul de $u_i \pmod{p}$ puisque b est inversible \pmod{p} . Comme il y avait $(n-r)$ inconnues non principales, on obtient p^{n-r} solutions $u = (u_1, \dots, u_n)$ distinctes \pmod{p} ; écrivons les solutions ainsi obtenues de la congruence (4.4.)

$$y = x + u p^{l+\mu};$$

ces dernières sont non congruentes deux à deux $(\text{mod } p^{l+\mu+1})$ et elles le sont encore moins si elles proviennent de deux x non congrus $(\text{mod } p^{l+\mu})$; d'après l'hypothèse de récurrence, il y en a donc

$$p^{n-r} p^{\mu(n-r)} = p^{(\mu+1)(n-r)}.$$

Enfin, on a $y \equiv x \pmod{p^{l+\mu}}$ et donc aussi $(\text{mod } p^{l-1})$ et $(\text{mod } p^l)$, ce qui entraîne que $Dg(y)$ est aussi d'ordre l .

La démonstration par récurrence est donc complète. \square

COROLLAIRE. Soit $z \in \mathbf{Z}_p^n$ une solution non singulière du système $g(x) = 0$, alors il existe $l \geq 1$, tel que pour tout entier $\mu \geq 0$, le système de congruences $g(x) \equiv 0 \pmod{p^{2l-1+\mu}}$ admette au moins $p^{(n-r)\mu}$ solutions dans $(\mathbf{Z}/p^{2l-1+\mu}\mathbf{Z})^n$.

Démonstration. Puisque z est non singulier, il existe un déterminant extrait de $Dg(z)$ d'ordre r et non nul.

Comme $z \in \mathbf{Z}_p^n$ et que les coefficients de g sont entiers, il existe $l \geq 1$ et $b \in \mathbf{Z}_p^\times = \{\text{unités } p\text{-adiques}\}$, tels que $Dg(z) = b p^{l-1}$.

En réduisant modulo \mathbf{Z}_p^{2l-1} et puisque

$$(\mathbf{Z}_p/p^{2l-1}\mathbf{Z}_p) \simeq (\mathbf{Z}/p^{2l-1}\mathbf{Z}),$$

on trouve un élément $x_0 \in \mathbf{Z}^n$ tel que $g(x_0) \equiv 0 \pmod{p^{2l-1}}$ et $Dg(x_0)$ est d'ordre l . Il suffit alors d'appliquer le lemme 4.2 pour achever la démonstration de ce corollaire. \square

LEMME 4.3. Avec les notations précédentes, on a, pour tout $v \in \mathbf{Z}^r$.

$$(4.6) \quad \widehat{F_p^*}(-v) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{Nombre de solutions de } f(x) \equiv v \pmod{p^k}}{p^{k(n-r)}}$$

Démonstration. Puisque $\widehat{F^*}$ existe et est décomposable, la fonction locale $\widehat{F_p^*}$ existe a fortiori et on a

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \widehat{F_p^*}(-v) &= \int_{\mathbf{Q}_p^r} \psi_p(\langle \xi_p, -v \rangle) \left[\int_{\mathbf{Q}_p^n} \varphi_p(x_p) \psi_p(\langle \xi_p, f(x_p) \rangle) dx_p \right] d\xi_p \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{|\xi_p|_p \leq p^k} \left[\int_{\mathbf{Z}_p^n} \psi_p(\langle \xi_p, f(x_p) - v \rangle) dx_p \right] d\xi_p. \end{aligned}$$

Mais, pour $|\xi_p|_p \leq p^k$, nous avons obtenu, au lemme 1.1, l'égalité

$$\int_{\mathbf{Z}_p^n} \psi_p(\langle \xi_p, f(x_p) - v \rangle) d x_p = p^{-kn} \sum_{u \in (\mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z})^n} \psi_p(\langle \xi_p, f(u) - v \rangle).$$

Comme l'ensemble $\{\xi_p \in \mathbf{Q}_p^r \mid |\xi_p|_p \leq p^k\}$ est un sous-groupe de \mathbf{Q}_p^r dont l'application $\xi_p \mapsto \psi_p(\langle \xi_p, f(u) - v \rangle)$ est un caractère, l'intégrale de ce caractère sur ce sous-groupe est nulle si le caractère n'y est pas trivial et vaut la mesure du sous-groupe: p^{kr} , si le caractère y est trivial. Or cette trivialité est équivalente à la condition

$$(f(u) - v) \in p^k \mathbf{Z}_p^r$$

ou encore:

u est solution du système de congruences $f(u) \equiv v \pmod{p^k}$.

Tout ceci montre bien que l'égalité (4.7) n'est autre que l'égalité (4.6). \square

Nous pouvons maintenant préciser la situation sur les places finies.

LEMME 4.4. *Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), pour tout $v \in \mathbf{Z}^r$, on a*

$$\prod_P \widehat{F_P^*}(-v) > 0.$$

Remarque. Ce produit infini est indépendant de la variable P puisque celle-ci n'affecte que la place infinie.

Démonstration. Puisque la fonction $\widehat{F^*}$ existe et est décomposable, l'égalité (4.2) montre que le produit infini étudié ici est convergent; il sera donc non nul (c'est-à-dire > 0) si et seulement si tous ses facteurs sont non nuls.

Posant $g = f - v$, l'hypothèse (H3) donnant une solution non singulière dans tout \mathbf{Z}_p^n au système $g(x) = 0$, nous pouvons appliquer le corollaire du lemme 4.2:

Il existe $l \geq 1$ tel que le système de congruences

$$(4.8) \quad f(x) \equiv v \pmod{p^{2l-1+\mu}}$$

admette, pour tout entier $\mu \geq 0$, au moins $p^{(n-r)\mu}$ solutions. Donc, en notant $N_p(2l-1+\mu)$ le nombre de solutions du système (4.8), il vient

$$N_p(2l-1+\mu) \geq p^{(n-r)\mu},$$

$$\frac{N_p(2l-1+\mu)}{p^{(2l-1+\mu)(n-r)}} \geq \frac{1}{p^{(2l-1)(n-r)}}.$$

Enfin, quand $\mu \rightarrow +\infty$, le membre de gauche de cette dernière inégalité admet une limite donnée par le lemme 4.3, on en déduit

$$\widehat{F_p^*}(-v) \geq \frac{1}{p^{(2l-1)(n-r)}} > 0$$

ce qui achève cette démonstration. \square

Il faut maintenant étudier l'intégrale singulière $\widehat{F_\infty^*}(-v)$. Afin que l'exposé soit complet, nous démontrons d'abord un lemme technique.

Notons, pour tout $\mu \in \mathbf{R}^r$:

$$V(\mu) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = \mu\}.$$

Remarque. $V(\mu)$ peut être vide.

LEMME 4.5. Soit x_0 un point non singulier de $V(0)$, alors les trois propositions suivantes sont vraies:

i) Il existe un voisinage ouvert U de x_0 et il existe $\alpha > 0$ tels que

$$\{V(\mu) \cap U \neq \emptyset\} \Leftrightarrow \{|\mu| < \alpha\}.$$

ii) Pour tout μ , tel que $|\mu| < \alpha$, il existe une mesure positive dw_μ sur $V(\mu) \cap U$ telle que, pour toute fonction φ , continue et à support compact inclus dans U , on ait l'égalité

$$(4.9) \quad \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) dx_1 \dots dx_n = \int_{|\mu| < \alpha} \left[\int_{V(\mu) \cap U} \varphi dw_\mu \right] d\mu$$

et, de plus, la fonction $\mu \mapsto \int_{V(\mu) \cap U} \varphi dw_\mu$ est continue sur l'ouvert $\{|\mu| < \alpha\}$.

iii) Il existe une fonction φ , continue et à support compact inclus dans U , avec $0 \leq \varphi \leq 1$ et telle qu'il existe $\beta > 0$ et, pour tout μ , avec $|\mu| < \frac{\alpha}{2}$, l'inégalité

$$(4.10) \quad \int_{V(\mu) \cap U} \varphi dw_\mu \geq \beta.$$

Remarque. U peut être aussi petit qu'on le veut.

Démonstration. Rappelons que $r \leq n$ et considérons x_0 , un point non singulier de l'ensemble $V(0) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = 0\}$.

Supposons, quitte à réindexer les coordonnées x_i de x , que

$$(4.11) \quad \frac{D(f_1, \dots, f_r)}{D(x_1, \dots, x_r)} \neq 0$$

(il s'agit, selon une notation usuelle, du déterminant extrait principal d'ordre r de la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)$ au point x_0).

Considérons l'application h de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^n définie par

$$\begin{aligned} & h(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) \\ &= (y_1 = f_1(x), \dots, y_r = f_r(x), y_{r+1} = x_{r+1}, \dots, y_n = x_n); \end{aligned}$$

la matrice jacobienne de l'application h au point x_0 est

$$A = \left(\begin{array}{c|c} M & O \\ \hline N & I_{n-r} \end{array} \right)$$

où I_{n-r} est la matrice identité d'ordre $(n-r)$ et $M = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r}}$; puisque

$$\text{Det } A = \text{Det } M = \frac{D(f_1, \dots, f_r)}{D(x_1, \dots, x_r)} \neq 0,$$

le point x_0 est un point non singulier de l'application h .

Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans \mathbf{R}^n et un voisinage ouvert W de $h(x_0)$ dans \mathbf{R}^n tels que l'application

$$(4.12) \quad U \xrightarrow{h} W$$

soit un isomorphisme analytique.

On peut réduire W à un hypercube de centre $h(x_0)$, ainsi il existe $\alpha > 0$ tel que

$$W = \{t \in \mathbf{R}^n \mid (1 \leq i \leq r) \mid t_i \mid < \alpha \quad \text{et} \quad (r+1 \leq j \leq n) \mid t_j - x_{0,j} \mid < \alpha\}$$

Soit alors $\mu \in \mathbf{R}^r$ et soit aussi

$$\begin{aligned} W_\mu &= W \cap (\mu_1, \dots, \mu_r) \times \mathbf{R}^{n-r} \\ &= \{t \in \mathbf{R}^n \mid (1 \leq i \leq r) \mid t_i = \mu_i \quad \text{et} \quad (r+1 \leq j \leq n) \mid t_j - x_{0,j} \mid < \alpha\}. \end{aligned}$$

On a clairement

$$\{W_\mu \neq \emptyset\} \Leftrightarrow \{|\mu| < \alpha\}$$

et par la bijection (4.12) on obtient

$$\{W_\mu \neq \emptyset\} \Leftrightarrow \{V(\mu) \cap U \neq \emptyset\};$$

la proposition i) est donc démontrée.

L'application h définit, par restriction, une carte locale

$$V(\mu) \cap U \xrightarrow{h} W_\mu$$

si et seulement si $|\mu| < \alpha$; on peut alors utiliser h^{-1} pour définir sur $V(\mu) \cap U$ la mesure image de la mesure de Lebesgue sur W_μ ; si J désigne le jacobien, il s'agit de la mesure

$$dw_\mu = |J(h^{-1})(\mu_1, \dots, \mu_r, y_{r+1}, \dots, y_n)| dy_{r+1} \dots dy_n$$

définie, par exemple, pour les fonctions continues à support compact inclus dans $V(\mu) \cap U$; rappelons enfin l'égalité

$$J(h^{-1}) = \left[\frac{D(f_1, \dots, f_r)}{D(x_1, \dots, x_r)} \right]^{-1}$$

Soit maintenant une application $\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, continue et à support compact inclus dans l'ouvert U ; par la formule usuelle de changement de variable (représenté ici par l'isomorphisme analytique (4.12)) dans les intégrales multiples, on obtient le calcul suivant

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n &= \int_{\mathbf{R}^n} \varphi \circ h^{-1}(y_1, \dots, y_n) |J(h^{-1})(y_1, \dots, y_n)| dy_1 \dots dy_n \\ &= \int_{|\mu| < \alpha} \left[\int_{W_\mu} \varphi \circ h^{-1} |J(h^{-1})| dy_{r+1} \dots dy_n \right] dy_1 \dots dy_r \\ &= \int_{|\mu| < \alpha} \left[\int_{V(\mu) \cap U} \varphi dw_\mu \right] d\mu. \end{aligned}$$

L'égalité (4.9) est donc démontrée. De plus il est clair que la fonction

$$\mu \mapsto \int_{V(\mu) \cap U} \varphi dw_\mu$$

est continue pour $|\mu| < \alpha$. La proposition ii) est donc vraie.

Choisissons maintenant une fonction φ , continue à support compact inclus dans $U = h^{-1}(W)$ et obéissant aux deux conditions suivantes :

$$0 \leq \varphi \leq 1$$

et

$$\varphi^{-1}(\{1\}) \supset h^{-1}(W'),$$

avec

$$W' = \{t \in \mathbf{R}^n \mid (1 \leq i \leq r) \mid t_i \mid < \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad (r+1 \leq j \leq n) \mid t_j - x_{0,j} \mid < \frac{\alpha}{2}\}.$$

Une telle fonction φ existe puisque U est difféomorphe à W qui est un hypercube de \mathbf{R}^n , de même que W' dont la fermeture topologique est incluse dans W .

Prenons alors $\mu \in \mathbf{R}^r$, avec $|\mu| < \frac{\alpha}{2}$; on a donc

$$W'_\mu = W' \cap W_\mu \neq \emptyset$$

et le calcul suivant

$$\begin{aligned} \int_{V(\mu) \cap U} \varphi dw_\mu &= \int_{W'_\mu} \varphi \circ h^{-1} \mid J(h^{-1}) \mid dy_{r+1} \dots dy_n \\ &\geq \int_{W'_\mu} \mid J(h^{-1}) \mid dy_{r+1} \dots dy_n, \end{aligned}$$

où cette dernière inégalité résulte de la relation

$$\varphi \circ h^{-1}(W') = \{1\}.$$

Continuons le calcul :

$$\begin{aligned} &\int_{W'_\mu} \mid J(h^{-1}) \mid dy_{r+1} \dots dy_n \\ &= \int_{\substack{|y_j - x_{0,j}| \leq \frac{\alpha}{2} \\ (r+1 \leq j \leq n)}} \mid J(h^{-1})(\mu_1, \dots, \mu_r, y_{r+1}, \dots, y_n) \mid dy_{r+1} \dots dy_n \end{aligned}$$

Or la fonction $\mid J(h^{-1}) \mid$ est continue, positive et *non nulle* sur W ; elle admet donc sur la fermeture de W' , qui est un compact inclus dans W , une borne inférieure $m > 0$.

Ainsi il vient, pour tout μ tel que $|\mu| < \frac{\alpha}{2}$:

$$\int_{V(\mu) \cap U} \varphi dw_\mu \geq m \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{n-r},$$

ce qui achève la démonstration de la proposition iii) de ce lemme, en prenant

$$\beta = m \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{n-r} > 0.$$

□

Remarque. On peut montrer, mais c'est inutile pour démontrer le théorème 4, que la mesure dw_μ est indépendante de la carte locale choisie sur $V(\mu)$ au voisinage du point non singulier x_0 . De plus les mesures ainsi obtenues se recollent sur l'ouvert θ_μ des points non singuliers de $V(\mu)$. Enfin, pour toute fonction continue à support compact inclus dans $\bigcup_\mu \theta_\mu$ (qui n'est autre que l'ouvert de \mathbf{R}^n constitué des points non singuliers de f) on dispose de la formule

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi dx = \int_{\mathbf{R}^n} \left[\int_{\theta_\mu} \varphi dw_\mu \right] d\mu.$$

(sur ce sujet voir aussi le paragraphe 5.F).

Le lemme technique (4.5) nous permet d'aborder la démonstration principale concernant l'intégrale singulière.

LEMME 4.6. *Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H4), il existe une boîte $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$ et il existe $\gamma > 0$ tels que, pour tout $v \in \mathbf{Z}^r$, et pour tout P supérieur à une valeur $P(v)$ dépendant seulement de v , on ait l'inégalité*

$$\widehat{F}_\infty^*(-v) \geq \gamma P^{n-rd}.$$

Démonstration. La fonction \widehat{F}_∞^* existe puisque $F_\infty^* \in L_1(\mathbf{R}^n)$. Il en résulte le calcul suivant où l'on pose $x = Pt$ puis $u = \xi_\infty P^d$.

$$\begin{aligned} \widehat{F}_\infty^*(-v) &= \int_{\mathbf{R}^r} \left[\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\infty(x) \psi_\infty(\langle \xi_\infty, f(x) \rangle) dx \right] \psi_\infty(\langle \xi_\infty, -v \rangle) d\xi_\infty \\ &= P^n \int_{\mathbf{R}^r} \left[\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\infty(Pt) \psi_\infty(\langle \xi_\infty P^d, f(t) \rangle) dt \right] \psi_\infty(\langle \xi_\infty, -v \rangle) d\xi_\infty \\ &= P^{n-rd} \int_{\mathbf{R}^r} \left[\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\infty(Pt) \psi_\infty(\langle u, f(t) - vP^{-d} \rangle) dt \right] du. \end{aligned}$$

Il faut donc étudier la fonction $\mathcal{T}(P, v)$ définie par l'égalité

$$\widehat{F}_\infty^*(-v) = P^{n-rd} \mathcal{T}(P, v);$$

on ne peut lui appliquer le théorème de Fubini car la fonction $u \mapsto \psi(<u, f(t) - vP^{-d}>)$ n'est généralement pas intégrable!

Aussi utilise-t-on une suite de fonctions positives à support compact: $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui, au sens des distributions, tend faiblement vers δ_0 , la distribution de Dirac en 0. On sait que l'action de ces distributions porte sur les fonctions continues à support compact.

On sait aussi que la suite $(\hat{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend faiblement, toujours au sens des distributions, vers 1.

Ainsi il vient l'égalité

$$\mathcal{T}(P, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_n(P, v)$$

avec

$$\mathcal{T}_n(P, v) = \int_{\mathbf{R}^r} \left[\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\infty(Pt) \psi_\infty(<u, f(t) - vP^{-d}>) dt \right] \hat{g}_n(u) du.$$

Nous pouvons cette fois appliquer le Théorème de Fubini, il suffit que \hat{g}_n soit intégrable ce qui s'obtient sans peine en prenant g_n de classe C^∞ par exemple. On a donc

$$\mathcal{T}_n(P, v) = \int_{\mathbf{R}^r} \left[\int_{\mathbf{R}^n} \hat{g}_n(u) \psi_\infty(<u, f(t) - vP^{-d}>) du \right] \varphi_\infty(Pt) dt.$$

La formule d'inversion de Fourier est valable pour la fonction g_n , il en résulte l'égalité

$$(4.13) \quad \mathcal{T}_n(P, v) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\infty(Pt) g_n(vP^{-d} - f(t)) dt.$$

Un premier avantage de l'égalité (4.13) est que l'intégrale porte sur des fonctions positives. Nous pouvons donc, en vue d'une minoration, utiliser toute fonction φ telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}^n$, on ait la double inégalité

$$0 \leq \varphi(t) \leq \varphi_\infty(Pt).$$

D'après l'hypothèse (H4), le système $f = 0$ admet une solution x_0 non singulière dans \mathbf{R}^n . Choisissons une boîte $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$ telle que x_0 soit proche (autant qu'on le voudra puisque \mathcal{S} est dense dans l'ensemble des boîtes \mathcal{B} de \mathbf{R}^n) du barycentre de \mathcal{B} .

Selon le lemme 4.5 i), il existe un voisinage ouvert U de x_0 , aussi petit qu'on le veut et donc inclus dans la boîte \mathcal{B}_1 de même barycentre que \mathcal{B} et de dimensions toutes moitiés de celles de \mathcal{B} .

Puisque nous avons par définition $\varphi_\infty = \theta * 1_{P\mathcal{B}}$, il est clair que la fonction $\varphi_\infty(Pt)$ prend la valeur 1 sur la boîte \mathcal{B}_1 . *A fortiori*, pour tout $t \in U$ et pour tout P , on a la relation

$$\varphi_\infty(Pt) = 1.$$

La fonction φ citée dans la proposition iii) du lemme 4.5 est donc telle que pour tout $t \in \mathbf{R}^n$, on ait la double inégalité

$$0 \leq \varphi(t) \leq \varphi_\infty(Pt);$$

l'égalité (4.13) conduit alors à l'inégalité

$$\mathcal{T}_n(P, v) \geq \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(t) g_n(vP^{-d} - f(t)) dt.$$

En appliquant le lemme 4.5 ii), il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n(P, v) &\geq \int_{|\mu| < \alpha} \left[\int_{V(\mu) \cap U} \varphi(t) g_n(vP^{-d} - f(t)) dw_\mu \right] d\mu \\ &\geq \int_{|\mu| < \alpha} \left[\int_{V(\mu) \cap U} \varphi dw_\mu \right] g_n(vP^{-d} - \mu) d\mu. \end{aligned}$$

Soit alors la valeur $P(v)$ telle que, pour tout $P > P(v)$, on ait l'inégalité

$$|vP^{-d}| < \frac{\alpha}{2};$$

nous n'utiliserons pour terminer cette démonstration que des valeurs de P supérieures à la valeur $P(v)$.

Puisque, selon le lemme 4.5 ii), la fonction $\mu \mapsto \int_{V(\mu) \cap U} \varphi dw_\mu$ est continue pour $|\mu| < \alpha$ et qu'elle est clairement à support compact inclus dans cet ouvert de \mathbf{R}^r , on obtient, quand $n \rightarrow +\infty$, l'inégalité

$$\mathcal{T}(P, v) \geq \int_{V(vP^{-d}) \cap U} \varphi dw_{vP^{-d}}.$$

Enfin, le lemme 4.5 iii) dit que cette dernière intégrale est supérieure à une constante $\beta > 0$ qui ne dépend ni de $P > P(v)$, ni même de v . Nous avons donc obtenu la minoration

$$\widehat{F}_{\infty}^*(-v) \geq \beta P^{n-rd}$$

valable pour tout $v \in \mathbf{Z}^r$ et tout $P > P(v)$. \square

Remarque. Le lemme 4.6, suffisant pour ce travail, dit que l'intégrale singulière est, lorsque $P \rightarrow +\infty$, au moins d'ordre P^{n-rd} . On a bien sûr envie d'obtenir, si possible, une partie principale précise et compte tenu de la démonstration ci-dessus le plus vraisemblable serait l'équivalence suivante

$$(4.14) \quad \widehat{F}_{\infty}(-v) \sim \left[\int_{V(0) \cap \mathcal{B}} dw_0 \right] P^{n-rd};$$

il s'agit d'un résultat nettement plus difficile que le lemme 4.6 pour lequel il faudrait commencer par donner un sens précis au coefficient de P^{n-rd} (à ce sujet voir le paragraphe 5.F). Birch, dans son travail, démontre cette équivalence en utilisant son hypothèse de codimension élevée de la variété des points singuliers de f . Cette hypothèse de géométrie algébrique entraîne les hypothèses (H1) et (H2) et c'est tout son mérite. Mais je ne sais pas si les seules hypothèses (H1), (H2) et (H4) suffisent pour obtenir l'équivalence (4.14).

Il ne reste plus qu'à conclure.

THÉORÈME 4. *Sous les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) et avec les notations précédentes, il existe une boîte $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$ telle que, pour tout $v \in \mathbf{Z}^r$ et pour tout $P > P(v)$ on ait l'inégalité*

$$\widehat{F}^*(-v) \gg P^{n-rd}.$$

Démonstration. Utiliser les lemmes 4.4 et 4.6. \square

THÉORÈME PRINCIPAL. *Soit $f = (f_1, \dots, f_r)$, r formes de degré d en n variables, à coefficients entiers et répondant aux hypothèses (H1), (H2), (H3) pour un élément v de \mathbf{Z}^r et (H4).*

Alors le système $f = v$ admet une infinité de solutions entières.

Démonstration. En raison du Théorème 4, la formule asymptotique de la Proposition 4.1 est effective lorsque $P \rightarrow +\infty$ avec $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ d'où la conclusion. \square

Remarque. Un corollaire évident du Théorème Principal est que le système homogène $f = 0$ admet au moins une solution non triviale, c'est-à-dire qu'un système f obéissant aux hypothèses (H1) et (H2) observe le Principe de Hasse fin.

§ 5. EXEMPLES D'APPLICATIONS

A) SUR LES HYPOTHÈSES (H1) ET (H2)

La justification de l'hypothèse (H1) provient de l'emploi de l'inégalité de Weyl et de ses généralisations pour majorer des sommes trigonométriques du type $S(\alpha)$. Il semble que, *pour de telles sommes*, ce soit la seule méthode efficace actuellement connue. L'adjectif « efficace » étant un exemple d'euphémisme.

Le but de ce travail n'étant pas de recopier Birch ou Davenport, mieux valait se situer en aval, c'est-à-dire partir de l'hypothèse (H1), quitte à indiquer ici la méthode qui y conduit, sans démonstrations mais avec des références bibliographiques qui sont les suivantes :

Birch, « Forms in many variables », paragraphe 2, lemmes 2.1 à 2.5.

Davenport, « Cubic forms in 32 variables », paragraphes 3 et 4.

« Cubic forms in 16 variables », paragraphes 4 et 5.

« Analytic Methods... », paragraphes 3 et 13.

Pour le reste, il faut d'abord remarquer que la démonstration de l'inégalité de Weyl utilise une succession de différences finies (autant que le degré d des formes f_i) portant sur les polynômes présents dans l'exposant de e (les polynômes f_i et g en ce qui nous concerne) d'où un résultat *indépendant* du polynôme g puisque son degré est inférieur strictement à d . Ainsi la disparition du polynôme g dans l'hypothèse (H1), qui ne présente aucun inconvénient pour les paragraphes 1 à 4 du présent travail, n'a pas d'intérêt tant que la méthode de Weyl demeurera la seule qui puisse justifier l'hypothèse (H1).

L'inégalité de Weyl une fois obtenue, on utilise un résultat de géométrie des nombres (Birch lemme 2.3, Davenport « 32 variables » lemme (3.3) « 16 variables » lemme 8) avant d'aboutir à un *lemme à trois possibilités* (Birch lemme 2.5, Davenport « Analytic methods », lemme 32, Schmidt « Simultaneous rational zeros... », lemme 3).

La *première possibilité* est une bonne majoration du module de $S(\alpha)$ du type P^{n-k} où $k > 0$ est un paramètre.

La *seconde possibilité* est une bonne approximation rationnelle de α , précisément celle de l'hypothèse (H1) ii), associée à un second paramètre $\Delta > 0$.

La *troisième possibilité* est la mauvaise : celle qui ne garantit aucune des deux précédentes. Toutefois elle exprime une condition (compliquée) qui ne concerne pas α mais seulement les formes f_i .

Ainsi, chez tous les auteurs la règle est-elle la même: attribuer aux formes f_i une propriété T , plus ou moins laide, qui soit suffisante pour exclure la troisième possibilité et donc garantir l'hypothèse (H1) qui n'est autre que l'union des deux premières possibilités (poser $k = \Delta\Omega$)!

Mais ce n'est pas suffisant car pour exploiter convenablement, par la méthode du cercle de Hardy et Littlewood, l'hypothèse (H1) il faut disposer d'un bon accord entre les paramètres k et Δ , plus précisément de l'hypothèse (H2):

$$\frac{k}{\Delta} = \Omega > r + 1.$$

Ainsi équipé le système f peut affronter la « machinerie » de la méthode du cercle dont le présent travail donne un exposé adélique. On obtient ainsi la formule asymptotique de la Proposition 4.1 (Birch lemme 5.5, Davenport « 16 variables » lemme 16, etc.).

Encore doit-on s'assurer que le terme principal de cette formule asymptotique n'est pas nul. C'est la raison des hypothèses (H3) et (H4). Hélas la vérification de (H3) est un problème difficile et tout simplement non résolu dès qu'on quitte les cas particuliers.

En résumé, pour obtenir des exemples d'application, il faut atteindre deux objectifs:

1° Trouver une propriété T du système f qui implique (H1) et aussi (H2).

2° Vérifier (H3) et éventuellement (H4).

B) SUR LE TRAVAIL DE BIRCH

Ce dernier consacre son paragraphe 3 à la définition d'une propriété T en termes de géométrie algébrique.

Soit l'application polynomiale $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^r$ (on prend ici le corps \mathbb{C} parce qu'il est algébriquement clos). Birch note

$$V^* = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \text{rang} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) < r\}$$

la variété des points singuliers de f (rappel: $r \geq n$).

Il obtient ainsi la propriété T suivante:

$$n - \dim V^* > 2^{d-1} r(d-1)\Omega$$

qui implique l'hypothèse (H1). En ajoutant l'hypothèse (H2) on obtient donc la condition suffisante de Birch :

$$(5.1) \quad \text{codim } V^* > r(r+1)(d-1)2^{d-1}.$$

Un cas intéressant (Birch, paragraphe 7, Théorème 2) est $r = 1$, car alors l'égalité d'Euler pour les polynômes homogènes montre que V^* est l'ensemble des points singuliers de $V(0) = \{x \in \mathbf{C}^n \mid f(x) = 0\}$ (c'est faux en général pour $r \geq 2$ où V^* est assez difficile à connaître). On obtient dans ce cas

$$(5.2) \quad \text{codim } V^* > (d-1)2^d.$$

Bien entendu la vérification des conditions (5.1) ou (5.2) dans des cas généraux est difficile. Birch ne propose d'ailleurs aucun exemple précis et ne s'attaque pas davantage aux hypothèses (H3) et (H4), l'avant-dernière étant inaccessible dans un cadre aussi général.

C) SUR LES HYPOTHÈSES (H3) ET (H4)

Voici un contre-exemple simple qui permet de comprendre pourquoi l'hypothèse (H4) ne peut être à l'image de l'hypothèse (H3), à savoir (H'4) Il existe un point non singulier de $V(v) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = v\}$.

Considérons la forme $f(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$, alors nous avons $r = 1$, $d = 2$ et $V^* = \{0\}$. Ainsi, d'après le travail de Birch et l'inégalité (5.2) ci-dessus, les hypothèses (H1) et (H2), sont vraies pour $n > 4$.

Soit $v \in \mathbf{N}^*$, d'après le Théorème de Lagrange, la variété réelle $V(v)$ admet des solutions entières pour $n \geq 4$. Ainsi le système $f = v$ possède des solutions dans \mathbf{Z}_p^n , pour tout p , évidemment non singulières puisque $v \neq 0$ et l'hypothèse (H3) est vérifiée.

Puisque l'hypothèse (H'4) est clairement vraie, si elle était la bonne hypothèse à retenir, on obtiendrait une infinité de solutions entières pour tout $n > 4$, ce qui est faux puisque $V(v)$ est bornée dans \mathbf{R}^n .

D'ailleurs, la même impossibilité concerne toutes les variétés bornées de \mathbf{R}^n : il faut des points à l'infini réels pour espérer une infinité de solutions entières, c'est-à-dire un point réel non nul dans $V(0)$ et non dans $V(v)$.

Comme pour espérer des solutions entières il faut des solutions dans \mathbf{Z}_p^n pour tout p , on comprend mieux les hypothèses (H3) et (H4) tout en notant qu'elles demandent chacune l'existence de *points non singuliers* ce qui est plus exigeant que la simple nécessité.

D) SUR LES TRAVAUX DE DAVENPORT

Il est le grand spécialiste de la méthode du cercle, il en vit toutes les subtilités ! et le travail de Birch généralise son « Cubic forms in 32 variables ».

Le but poursuivi est le

Théorème. Toute forme cubique ayant au moins N variables et à coefficients entiers représente zéro.

D'où trois articles de Davenport pour successivement $N = 32, 29$ et enfin 16.

Il faut d'abord remarquer qu'il s'agit d'une démonstration par l'absurde. En effet, la formule asymptotique que fournit la méthode du cercle est manifestement fausse pour beaucoup de formes (par exemple les formes dégénérées qui sont rationnellement équivalentes à des formes comprenant moins de variables: le terme principal est en P^{n-d} avec n , nombre de variables!). Il convient donc de les exclure ce qui peut se faire pour $d = 3$ (cette chance ne se poursuit pas pour $d > 3$) en supposant seulement que les formes étudiées ne représentent pas zéro.

S'il est possible d'appliquer la méthode du cercle, on obtiendra une évidente contradiction (une infinité de solutions entières pour des formes qui ne représentent pas zéro!) et donc le théorème recherché.

L'hypothèse (H4) ne coûte pas cher justement parce que la forme cubique $C(x)$ ne représente pas zéro (Davenport « 32 variables », lemme 6.1).

L'hypothèse (H3) est connue de Davenport qui rappelle, dans le paragraphe 2 de son « 32 variables », sa démonstration de l'existence pour toute forme cubique ayant au moins 10 variables, d'une solution non singulière dans \mathbf{Q}_p , pour tout p . (Ce résultat a été cité au paragraphe A de l'Introduction).

Toute l'habileté réside donc dans la définition d'une bonne propriété T qui entraîne les hypothèses (H1) et (H2).

Dans « 32 variables », au lemme 4.2, Davenport propose, pour une forme cubique $C(x)$ à coefficients entiers, la propriété T_1 suivante:

« Ne pas représenter zéro et ne pas être équivalente (par $GL_n(\mathbf{Q})$) à une forme du type $a_0 u_0^3 + C_1(u_1, \dots, u_m)$, en $(m+1)$ variables u_0, u_1, \dots, u_m , où m est le plus petit entier supérieur ou égal à $n - 4\Omega$ (rappel: $\Omega = \frac{k}{\Delta}$) ».

C'est loin d'être beau, mais cela fonctionne, après de nombreux efforts que Davenport améliore dans son « 29 variables » sans toutefois modifier la propriété T_1 .

Enfin dans l'article « 16 variables », Davenport propose, au lemme 13, la propriété T_2 :

« Ne pas représenter zéro et ne pas être équivalente (par $GL_n(\mathbf{Q})$) à une forme du type $C_1(u_1, \dots, u_{n-r}) + C_2(v_1, \dots, v_r)$ pour $1 \leq r \leq n-1$ ».

Non seulement T_2 est plus simple que T_1 mais la démonstration associée simplifie nettement les précédentes. Enfin si C est rationnellement équivalente à $C_1(u_1, \dots, u_{n-r}) + C_2(v_1, \dots, v_r)$, les sommes $S(\alpha)$ construites sur C sont le produit des mêmes sommes construites sur C_1 et C_2 et on obtient un raisonnement rapide par itération qui conduit au pire sur les formes diagonales connues depuis longtemps: un bien joli travail de précision!

Malheureusement aucune généralisation pour $d \geq 4$ ne paraît possible (dixit Davenport).

Enfin Davenport fait remarquer que pour démontrer le cas $N = 17$, sa démonstration est encore plus simple et qu'il suffit de la propriété T_3 :

« Ne pas représenter zéro »

(cf. Davenport, « Analytic Methods... », Lemme 36).

E) SUR LES TRAVAUX DE W. M. SCHMIDT

Dans son article « Simultaneous rational zeros of quadratic forms », W. M. Schmidt considère le système $f = 0$ pour r formes quadratiques à coefficients entiers.

Soit $\mathbf{Q}(f) = \{\mu_1 f_1 + \dots + \mu_r f_r \mid (\mu_1, \dots, \mu_r) \in \mathbf{Q}^r - \{0\}\}$
le pinceau rationnel engendré par f .

Soit $\mathbf{C}(f) = \{\mu_1 f_1 + \dots + \mu_r f_r \mid (\mu_1, \dots, \mu_r) \in \mathbf{C}^r - \{0\}\}$
le pinceau complexe engendré par f .

Dans son lemme 6, pour obtenir les hypothèses (H1) et (H2), Schmidt propose la propriété T_1 :

« Pour tout $g \in \mathbf{Q}(f)$, on a $\text{rang } g > 2r^2 + 3r$ ».

Il consacre à l'hypothèse (H3) son paragraphe 5 où il utilise les théorèmes 2 et 6 de son article « Simultaneous p -adic zeros of quadratic forms ». Il parvient ainsi à la propriété T_2 :

« Pour tout $g \in \mathbf{Q}(f)$, on a $\text{rang } g > 4r^3 + r^2$ »

qui implique donc les hypothèses (H3), (H2) et (H1).

Enfin il montre que la propriété T_3 :

« Pour tout $g \in \mathbf{C}(f)$, on a $\text{rang } g > 4r^2 + 4r$ »

implique la propriété T_2 . Il en déduit son principal résultat:

$\{(H_4) \text{ et } T_3\} \Rightarrow \{\text{le système } f \text{ représente zéro}\}$.

F) SUR LA SÉRIE SINGULIÈRE F

Dans le présent travail, la priorité est revenue à F^* , selon la notation d'Igusa. Mais, chez Igusa (Forms of higher degree) ou chez Lachaud (chapitre 1), la préférence est donnée à la fonction

$$F(v) = \widehat{F^*}(-v),$$

appelée série singulière globale et qui peut être définie directement.

Remarquons que si F est intégrable et continue alors on a $F^* = \widehat{F}$, d'après la formule d'inversion de Fourier.

Les considérations du lemme 4.5 i) et ii) sont valables dans \mathbf{Q}_p puisque le théorème des fonctions implicites est vrai pour des fonctions analytiques sur tout corps valué complet.

Ainsi obtient-on localement, c'est-à-dire dans \mathbf{R} et dans chaque \mathbf{Q}_p , la définition d'une mesure $dw_{\infty, \mu}$ ou $dw_{p, \mu}$, sur l'ouvert des points non singuliers de $V_{\infty}(\mu)$ ou $V_p(\mu)$ (dont les définitions sont évidentes!), telle que pour toute fonction φ à support compact inclus dans l'ouvert des points non singuliers du système f dans \mathbf{R}^n ou dans \mathbf{Q}_p^n , on ait les formules de désintégration de mesures suivantes:

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) dx = \int_{\mathbf{R}^r} \left[\int \varphi dw_{\infty, \mu} \right] d\mu$$

et

$$\int_{\mathbf{Q}^n} \varphi(y) dy = \int_{\mathbf{Q}_p^r} \left[\int \varphi dw_{p, \mu} \right] d\mu.$$

Soit maintenant φ , une fonction de Schwarz Bruhat sur \mathbf{A}^n , décomposable et telle que φ_{∞} et chaque φ_p aient un support compact inclus respectivement dans l'ouvert des points non singuliers de f dans \mathbf{R}^n ou dans \mathbf{Q}_p^n ; on définit les séries singulières locales

$$F_{\infty}(\mu_{\infty}) = \int \varphi_{\infty} dw_{\infty, \mu_{\infty}} \quad \text{et} \quad F_p(\mu_p) = \int \varphi_p dw_{p, \mu_p}.$$

Enfin, si le produit infini ci-dessous converge, on obtient la série singulière globale:

$$F(\mu) = F_{\infty}(\mu_{\infty}) \prod_p F_p(\mu_p).$$

Revenons à une fonction φ locale (i.e: définie sur \mathbf{R}^n ou \mathbf{Q}_p^n). Si φ est à support compact quelconque celui-ci peut contenir des points singuliers

du système f dans \mathbf{R}^n ou dans \mathbf{Q}_p^n selon le cas. La définition de l'intégrale « $\int \varphi dw_\mu$ » pose alors un problème de convergence (Birch parle d'intégrale de Riemann généralisée) et *a fortiori* si φ n'est pas à support compact (ce dernier cas concerne seulement \mathbf{R} et φ fonction de Schwartz). Enfin, même en cas de convergence, la continuité de la fonction locale F_∞ ou F_p reste à prouver.

Igusa (« Forms of higher degree », p. 76 à 79) montre que la fonction F_∞ existe et est continue pour $\mu \in \mathbf{R}^*$, dans le cas d'une forme f quelconque ($r=1$). Le cas $\mu = 0$ demande des hypothèses complémentaires sur f .

Birch montre (essentiellement, ceci a déjà été dit dans la remarque qui suit le lemme 4.6, grâce à l'inégalité (5.1) qui dit que $\text{codim } V^*$ est grande) dans son lemme 6.1 surtout, que la fonction F_∞ existe et est continue pour tout $\mu \in \mathbf{R}^r$ lorsque la fonction φ_∞ est $1_{P\mathcal{B}}$ (le résultat serait identique pour $\varphi_\infty = \theta * 1_{P\mathcal{B}}$).

Il reste à s'assurer de la convergence du produit infini $\prod_p F_p$ (mais sous les hypothèses de Birch c'est vrai) pour obtenir la série singulière globale.

Le cas le plus étudié (Igusa, Lachaud) est celui des formes ($r=1$) fortement non dégénérées (i.e: $V^* = \{0\}$) où de très beaux résultats ont été obtenus par Igusa selon des méthodes qui n'ont rien à voir avec la méthode du cercle. Mais il paraît difficile de terminer ce travail sans avoir signalé l'existence, sous les hypothèses de Birch (i.e: l'inégalité (5.1)), d'une série singulière globale F continue et intégrable (donc on a $F^* = \hat{F}$).

Enfin, on peut raisonnablement prévoir, en suivant encore Igusa, une formule de Poisson globale :

$$\sum_{\xi \in \mathbf{Q}^r} F^*(\xi) = \sum_{\mu \in \mathbf{Q}^r} F(\mu).$$

BIBLIOGRAPHIE

- BIRCH, B. J. Forms in many variables. *Proc. Royal Soc. A*, 265 (1962), 245-263.
 DAVENPORT, H. *Analytic Methods for diophantine equations and diophantine inequalities*. Ann. Arbor, 1962.
 — Cubic forms in 32 variables. *Phil. Trans. Royal Soc. A* 251 (1959), 193-232.
 — Cubic forms in 16 variables. *Proc. Royal Soc. A*, 272 (1963), 285-303.
 GODEMENT, R. *Adèles et idèles*. Cours I.H.P. Paris, 1965/1966.

IGUSA, J. I. *Lectures on forms of higher degree*. Tata institute of fundamental research. Lectures N° 59, Berlin, Springer 1978.

LACHAUD, G. Une présentation adélique de la série singulière et du problème de Waring. *Enseign. Math.* 28 (1982), 139-169.

SCHMIDT, W. M. Simultaneous p -adic zeros of quadratic forms. *Monatsh. Math.* 90 (1980), 45-65.

—— Simultaneous rational Zeros of quadratic forms. (*A paraître*).

(Reçu le 1^{er} décembre 1983)

Renaud Danset

87, rue du Théâtre
F-75015 Paris