Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 31 (1985)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMES DE SEIFERT ET FORMES QUADRATIQUES ENTIÈRES
Autor: Kervaire, Michel
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54564

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 31 (1985), p. 173-186

FORMES DE SEIFERT ET FORMES QUADRATIQUES ENTIÈRES

par Michel KERVAIRE

Une ε-forme de Seifert, où $\varepsilon = \pm 1$ est une forme bilinéaire (en général non symétrique) sur un $\mathbf{Z}$-module libre L de génération finie

$$A : L \times L \to \mathbf{Z},$$

et telle que $A + \varepsilon A'$ soit unimodulaire, c'est-à-dire $\text{dét}(A + \varepsilon A') = \pm 1$. Ici, $A'(x, y) = A(y, x)$ est la transposée de A.

Ces formes, considérées par H. Seifert [S], trouvent leur origine en théorie des nœuds: Si $\Sigma^n \subset S^{n+2}$ est un n-nœud, c'est-à-dire une sous-variété lisse de S^{n+2} homéomorphe (ou difféomorphe) à S^n, il existe une sous-variété orientable lisse, à bord, V^{n+1} plongée dans S^{n+2} dont le bord coïncide avec Σ^n. Une telle variété est appelée une surface de Seifert du nœud. Si $n = 2m - 1$ est impair, V est de dimension paire $2m$, plongée dans S^{2m+1} et après choix d'un champ v de vecteurs (non nuls) normaux à V dans S^{2m+1} on peut définir des applications $i_\pm : V \to S^{2m+1} - V$ par $i_\pm(P) = P \pm \alpha v(P)$ avec $\alpha > 0$, petit et on obtient une forme bilinéaire

$$A : H_m(V) \times H_m(V) \to \mathbf{Z}$$

donnée par $A(x, y) = l(x, i_+(y))\,\mathbf{Z}$, où $l(x, i_+(y))$ désigne le coefficient d'enlacement des m-cycles disjoints x et $i_+(y)$ dans S^{2m+1}.

Un calcul facile montre que

$$A(x, y) + (-1)^m A(y, x) = S(x, y),$$

où S est la forme d'intersection de la variété V. (Voir [K].)

En posant $L = H_m(V)/(\text{torsion})$ on voit donc, par le théorème de dualité de Poincaré, que A est une $(-1)^m$-forme de Seifert sur L. Il suffit même pour cela que $\Sigma = b(V)$ soit une sphère d'homologie.

Si maintenant on suppose que le nœud $\Sigma^{2m-1} \subset S^{2m+1}$ est fibré, c'est-à-dire que le complémentaire $S^{2m+1} - \Sigma^{2m-1}$ fibre sur le cercle S^1, on peut prendre pour V l'adhérence d'une fibre. Le complémentaire du nœud $S^{2m+1} - \Sigma$ s'obtient en recollant $V \times \{1\} \subset V \times I$ avec $V \times \{0\}$ par la

monodromie $t: V \to V$ de la fibration et i_+ et $i_- \circ t: V \to S^{2m+1} - V$ sont homotopes dans le complémentaire de V. On a donc

$$\begin{aligned} A(x, y) &= l(x, i_+(y)) = l(x, i_- ty) \\ &= l(i_+ x, ty) = (-1)^{m+1}\, l(ty, i_+ x) \\ &= (-1)^{m+1} A(ty, x)\,. \end{aligned}$$

Ainsi, $S(x, y) = A(x, y) + (-1)^m A(y, x) = A((1-t)x, y)$, et

$$\text{dét}\, S = \text{dét}(A)\,.\,\text{dét}(1-t)\,.$$

La forme de Seifert associée à la fibre d'un nœud fibré de dimension impaire est donc *unimodulaire.*

Remarque. La formule ci-dessus montre aussi en passant que la monodromie $t: L \to L\,(L = H_m(V)/(\text{torsion}))$ satisfait à la condition dét $(1-t) = \pm 1$. Nous retrouverons cette condition dans le contexte algébrique qui va suivre.

Il est donc assez naturel de se poser le problème suivant sur lequel Claude Weber a attiré mon attention:

PROBLÈME. *Soit S une forme bilinéaire, unimodulaire, ε-symétrique sur un $\mathbf{Z}$-module libre de génération finie L. Existe-t-il une forme $A: L \times L \to \mathbf{Z}$, unimodulaire (sans propriété de symétrie) telle que $S = A + \varepsilon A'$?*

On supposera évidemment S paire, c'est-à-dire $S(x, x) = 0 \bmod 2$ pour tout $x \in L$.

En considérant la forme de rang 2 donnée par la matrice

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(et $\varepsilon = +1$), on observe immédiatement que la réponse au problème ci-dessus peut être négative.

Pour $\varepsilon = -1$, ou pour $\varepsilon = +1$ avec S indéfinie, on peut résoudre complètement le problème posé en utilisant la classification des formes bilinéaires, unimodulaires et ε-symétriques.

1. LE CAS $\varepsilon = -1$

Dans ce cas, S antisymétrique est une somme orthogonale de plans hyperboliques

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'identité

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

montre que toute forme antisymétrique, unimodulaire provient d'une forme de Seifert unimodulaire.

Pour toute la suite nous nous plaçons donc dans le cas où $\varepsilon = +1$.

2. Le cas indéfini

Si S est symétrique, indéfinie, c'est-à-dire s'il existe un vecteur $x \in \mathbf{R} \otimes L$, non nul, tel que $S_R(x, x) = 0$, on dispose encore d'une classification. (Voir [H.-M.], ou [Se], Théorème 5, p. 93.) Dans ce cas, S représente en fait 0 sur $\mathbf{Z}$, c'est-à-dire il existe $x \in L$ non nul tel que $S(x, x) = 0$, et (après changement de signe éventuel) S est isomorphe à une somme orthogonale

$$S = mH \oplus n\,\Gamma_8\,, \qquad m \geqslant 1\,,$$

où H est le plan hyperbolique (symétrique cette fois) donné par la matrice

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et où Γ_8 est la forme unimodulaire entière de rang 8 définie comme suit:

Soit $\mathbf{Z}^8$ le $\mathbf{Z}$-module des points de coordonnées entières dans $\mathbf{R}^8 = \sum_{i=1}^{8} \mathbf{R}e_i$ muni du produit scalaire euclidien $x \,.\, y = \sum_{i=1}^{8} x_i \,.\, y_i$. On pose $a = e_1 + e_2 + \ldots + e_8$ et $b = \frac{1}{2}a$. Soit V_0 le sous-module de $V = \mathbf{Z}^8$ formé des points dont le produit scalaire avec b est entier:

$$V_0 = \{x \in \mathbf{Z}^8 \mid x \,.\, b \in \mathbf{Z}\}\,.$$

On définit alors $\Gamma_8 = V_0 + \mathbf{Z}b$. C'est un réseau entier, pair et unimodulaire. (Voir [H.-M.] ou [Se] pour les détails.)

On a déjà vu que la forme hyperbolique

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ne provient pas d'une forme de Seifert unimodulaire. On va voir que pour les formes indéfinies c'est la seule exception.

PROPOSITION 1. *Toute forme* S *symétrique entière paire, unimodulaire, indéfinie et de rang* > 2 *provient d'une forme de Seifert unimodulaire, c'est-à-dire peut s'écrire* $S = A + A'$ *avec* A *entière et* $\text{dét}(A) = \pm 1$.

Preuve. Comme S, après changement de signe éventuel, s'écrit $S = mH + n\,\Gamma_8$ par le théorème de classification, il suffit de vérifier l'assertion pour mH, $m = 2, 3$, Γ_8 et $H + \Gamma_8$.

En notant I la matrice unité de rang m, on a

$$mH = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I-X \\ X & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & X \\ I-X & 0 \end{bmatrix},$$

et on voit qu'il suffit de trouver $X \in GL_m(\mathbf{Z})$ tel que $I - X$ soit également inversible sur $\mathbf{Z}$. Il existe des matrices de ce type pour tout $m \geqslant 2$. En particulier pour $m = 2, 3$ on peut prendre par exemple

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice de Γ_8, pour une base convenable, est

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Cette forme provient donc trivialement d'une forme de Seifert unimodulaire A. Il suffit de prendre A trigonal supérieur avec 1 sur la diagonale et les coefficients de Γ_8 dans le triangle supérieur.

Pour $H + \Gamma_8$, on peut prendre

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On va voir que le cas des formes définies est beaucoup moins trivial.

3. Le cas défini

Nous considérons maintenant les formes symétriques entières unimodulaires, paires, définies positives.

Comme on sait, le rang de la forme est alors un multiple de 8, et on ne dispose plus de classification complète que pour les rangs 8, 16 et 24.

Je n'ai dans ce cas que des résultats expérimentaux fragmentaires.

On va d'abord reformuler le problème original à l'aide du lemme bien connu suivant:

Lemme. *Soit S une forme bilinéaire symétrique unimodulaire et paire sur le* $\mathbf{Z}$*-module libre de rang fini L. Alors, il existe une forme bilinéaire unimodulaire $A: L \times L \to \mathbf{Z}$ telle que $S = A + A'$ si et seulement si S possède une isométrie $t: L \to L$ telle que $1-t: L \to L$ est un isomorphisme.*

Preuve. Si $S = A + A'$ avec dét $A = \pm 1$, alors on peut définir $t: L \to L$ par

$$A(tx, y) = -A(y, x).$$

On a $A(tx, ty) = -A(ty, x) = A(x, y)$. Ainsi t est une isométrie pour A et donc aussi pour S. On a en outre

$$S(x, y) = A(x, y) + A(y, x) = A((1-t)x, y),$$

ce qui montre que $1-t$ est inversible sur $\mathbf{Z}$.

Réciproquement, s'il existe une isométrie $t: L \to L$ pour S avec $1-t$ inversible, on peut définir A unimodulaire par $A(x, y) = S((1-t)^{-1}x, y)$. En posant $s^{-1} = 1-t$, on a alors

$$\begin{aligned} S(s^{-1}x, s^{-1}y) &= 2S(x, y) - S(x, ty) - S(tx, y) \\ &= S(x, s^{-1}y) + S(s^{-1}x, y)\,. \end{aligned}$$

En substituant x et y pour $s^{-1}x$ et $s^{-1}y$, il vient

$$\begin{aligned} S(x, y) &= S(sx, y) + S(x, sy) = S(sx, y) + S(sy, x) \\ &= A(x, y) + A(y, x)\,, \end{aligned}$$

et S provient donc d'une forme de Seifert unimodulaire.

Une isométrie $t: L \to L$ telle que $1-t$ soit un isomorphisme sera appelée une isométrie *parfaite.*

La question est donc: *Quelles sont les formes symétriques paires, unimodulaires, définies positives qui admettent une isométrie parfaite?*

Comme toute forme symétrique, définie positive est isomorphe à un réseau de R^n muni du produit scalaire euclidien canonique, nous écrirons $x \cdot y$ au lieu de $S(x, y)$ et x^2 au lieu de $S(x, x)$ et nous supprimons S des notations.

Soit donc L un réseau entier de R^n. Pour un entier donné c, on va considérer l'ensemble fini $X = X(c)$ de tous les vecteurs $x \in L$ tels que $x^2 = c$. On notera $\mathbf{Z}X$ le sous-module de L engendré par X. Toute isométrie de L conserve X et donc aussi $\mathbf{Z}X$.

On dira que X est *décomposable* si $X = X_1 \cup X_2$ avec $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, les vecteurs de X_1 étant orthogonaux à tous les vecteurs de X_2. On écrira $X = X_1 \oplus X_2$. La somme $\mathbf{Z}X = \mathbf{Z}X_1 \oplus \mathbf{Z}X_2$ est alors une somme directe orthogonale. Il est clair que X s'écrit de manière unique sous la forme $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_r$ avec les X_i, $i = 1, \ldots, r$ indécomposables.

Bien entendu, X peut être décomposable, même si le réseau L est indécomposable.

PROPOSITION 2. *Soit L un réseau entier de R^n. Soit X l'ensemble des vecteurs de L de carré scalaire fixe donné et soit $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_r$ sa décomposition avec X_i indécomposable. Si L possède une isométrie parfaite, il en est de même pour chaque sous-réseau $\mathbf{Z}X_i$, $i = 1, \ldots, r$.*

Preuve. Il est évident qu'une isométrie t de L doit permuter entre eux les facteurs X_i (indécomposables) de la décomposition de X. Soit Y l'un

quelconque de ces facteurs et soit e la plus petite puissance positive de t telle que $t^e Y = Y$. Je dis que $t^e \mid \mathbf{Z}Y$ est parfaite.

On considère le « carrousel » $M = \sum_{i=0}^{e-1} \mathbf{Z}t^i Y$. C'est un sous-module de L conservé par t et $t \mid M : M \to M$ est donc parfaite. Soit $x \in \mathbf{Z}Y$. Il existe un élément

$$y = (y_0, y_1, ..., y_{e-1}) \in \sum_i \mathbf{Z}t^i Y = M$$

$$\text{avec } y_i \in \mathbf{Z}t^i Y \text{ et tel que } (1-t)y = (x, 0, ..., 0)\,.$$

On a en développant

$$y_0 - ty_{e-1} = x\,, \quad \text{et} \quad y_i - ty_{i-1} = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, ..., e-1\,.$$

Par suite,

$$y_{e-1} = ty_{e-2} = ... = t^{e-2}y_1 = t^{e-1}y_0\,, \quad \text{et} \quad x = (1-t^e)y_0\,,$$

ce qui montre que $1-t^e : \mathbf{Z}Y \to \mathbf{Z}Y$ est surjective et $t^e \mid \mathbf{Z}Y$ est donc une isométrie parfaite.

On peut appliquer la Proposition 2 dans le cas où X est formé des vecteurs de L de carré scalaire 2. Le système X est dans ce cas un *système de racines* au sens de la théorie des groupes de Lie. Un tel système est somme orthogonale de systèmes indécomposables de l'un des types

$$A_n, D_n, E_6, E_7 \quad \text{ou} \quad E_8\,.$$

Ces systèmes sont décrits (entre autres) dans [N], I.3, p. 145-146. Par exemple, $\mathbf{Z}A_n = \{x \in \mathbf{Z}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\}$, engendré par le système indécomposable $A_n = \{e_i - e_j, i \neq j\}$.

PROPOSITION 3. *Les réseaux* $\mathbf{Z}A_{2k-1}$ *et* $\mathbf{Z}D_{k+4}$ *pour* $k \geqslant 1$, *ainsi que le réseau* $\mathbf{Z}E_7$ *ne possèdent pas d'isométrie parfaite.*

Preuve. Soit $L \subset R^n$ un réseau entier. On note

$$L^\# = \{x \in \mathbf{R}L \mid x \,.\, y \in \mathbf{Z} \quad \text{pour tout} \quad y \in L\}$$

le réseau dual. (On suppose $\mathbf{R}L = \mathbf{R}^n$.)

Toute isométrie t de L se prolonge en une isométrie unique de $L^\#$ et induit un automorphisme de $L^\#/L$. Si $t : L \to L$ est parfaite, il en est de même de l'extension $t^\# : L^\# \to L^\#$, car

$$((1-t)^{-1}x, y) = (x, y) - (x, (1-t)^{-1}y)$$

et l'automorphisme induit sur le quotient $L^\#/L$ est donc aussi parfait.

Pour A_n, on a $(\mathbf{Z}A_n)^{\#}/\mathbf{Z}A_n = \mathbf{Z}/(n+1)\mathbf{Z}$. Si $n = 2k-1$ est impair, $\mathbf{Z}/2k\mathbf{Z}$ possède un unique sous-groupe d'ordre 2 qui est donc laissé fixe par tout automorphisme. Donc, le réseau $\mathbf{Z}A_{2k-1}$, $k \geqslant 1$, ne possède pas d'isométrie parfaite.

Le même raisonnement s'applique également au système E_7: On a $(\mathbf{Z}E_7)^{\#}/\mathbf{Z}E_7 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Pour D_n, $n \geqslant 5$, on a

$$(\mathbf{Z}D_n)^{\#}/\mathbf{Z}D_n = \begin{cases} \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} & \text{pour } n \text{ impair,} \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \text{pour } n \text{ pair.} \end{cases}$$

Le raisonnement ci-dessus suffirait donc encore pour n impair, mais pas pour n pair. (En fait, on verra ci-dessous que D_4 possède une isométrie parfaite.)

Par définition, $\mathbf{Z}D_n = \{x \in \mathbf{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \equiv 0 \bmod 2\}$, engendré par $D_n = \{\pm e_i \pm e_j, i \neq j\}$. On vérifie (Voir [N], p. 149.) que $(\mathbf{Z}D_n)^{\#}/\mathbf{Z}D_n$ est engendré par les classes mod $\mathbf{Z}D_n$ de $y_0 = 0$ et

$$y_1 = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n e_i, \quad y_2 = e_n \quad \text{et} \quad y_3 = \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} e_i - e_n\right).$$

Comme pour tout $x \in \mathbf{Z}D_n$, on a

$$(y_1+x)^2 = y_1^2 + \sum_{i=1}^n x_i(x_i+1) \geqslant y_1^2 = n/4,$$

et

$$(y_3+x)^2 = y_3^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i(x_i+1) + x_n(x_n-1) \geqslant y_3^2 = n/4,$$

il s'ensuit que pour $n > 4$, la classe de y_2 mod $\mathbf{Z}D_n$ est la seule classe de $(\mathbf{Z}D_n)^{\#}$ qui contient un vecteur de carré scalaire égal à 1. Cette classe doit donc être laissée fixe par toute isométrie de $(\mathbf{Z}D_n)^{\#}$, et il en résulte que $\mathbf{Z}D_n$ ne possède pas d'isométrie parfaite pour $n > 4$.

Nous obtenons donc le

COROLLAIRE. *Un réseau unimodulaire pair $L \subset R^n$ dont le système R des vecteurs de carré 2 se décompose en*

$$R = A_{2k-1} \oplus R', \quad \textit{ou} \quad R = D_{k+4} \oplus R'$$

avec $k \geqslant 1$, ou $R = E_7 \oplus R'$ ne possède pas d'isométrie parfaite. La forme définie positive qu'un tel réseau définit ne provient donc pas d'une forme de Seifert unimodulaire.

La première partie de l'énoncé vaut d'ailleurs pour les réseaux avec dét $(L) \geqslant 1$.

On peut appliquer ce corollaire aux formes de basses dimensions.

En dimension 8, on a une seule classe d'isomorphie de réseaux pairs unimodulaires, représentée par $\Gamma_8 = \mathbf{Z}E_8$ qui possède une isométrie parfaite comme on l'a déjà vu.

En dimension 16, on a 2 classes $\Gamma_8 \oplus \Gamma_8$ et Γ_{16} qui correspond au système de racines D_{16}. (L'ensemble des vecteurs de carré scalaire 2 dans Γ_{8n} forme le système de racines E_8 pour $n = 1$ et D_{8n} pour $n > 1$.)

Donc, d'après le corollaire, Γ_{16} n'admet pas d'isométrie parfaite.

Dans [N], H. V. Niemeier classe les réseaux unimodulaires pairs en dimension 24. Il existe un réseau (et un seul à isomorphisme près) dont tous les vecteurs non-nuls ont un carré scalaire $\geqslant 4$. On verra ci-dessous qu'il possède une isométrie parfaite. Il existe en outre 23 réseaux dont l'ensemble des vecteurs de carré scalaire 2 forme un système de racines non-vide. Ces réseaux sont chacun caractérisé par leur système de racines qui sont les suivants :

$$A_{24}, 2A_{12}, 3A_8, 4A_6, 6A_4, 12A_2, 6D_4, 4E_6 \quad \text{et} \quad 3E_8$$

pour lesquels on va voir que le réseau correspondant possède une isométrie parfaite ;

$$\begin{aligned}
&8A_3, 24A_1, D_4 \oplus 4A_5, 2D_5 \oplus 2A_7, D_6 \oplus 2A_9, D_9 \oplus A_{15}, \\
&4D_6, 3D_8, 2D_{12}, D_{24}, \\
&E_6 \oplus D_7 \oplus A_{11}, E_7 \oplus A_{17}, 2E_7 \oplus D_{10}, E_8 \oplus D_{16}
\end{aligned}$$

qui sont les systèmes de racines de réseaux sans isométrie parfaite. (On a noté $nR = R \oplus R \oplus \ldots \oplus R$, n fois.)

La dernière assertion résulte du corollaire, puisque ces systèmes contiennent tous un facteur A_{2k-1} ou D_{k+4} avec $k \geqslant 1$.

Considérons le cas où le réseau entier $L \subset R^n$ est de même rang que le réseau engendré par son système X de vecteurs d'une longueur fixée. On a donc $\mathbf{Z}X \subset L \subset (\mathbf{Z}X)^{\#}$ et L est unimodulaire si et seulement si $L^{\#} = L$.

Pour qu'il existe une isométrie parfaite de L, il faut et il suffit qu'au moins une isométrie parfaite de $\mathbf{Z}X$ qui, comme on l'a vu, se prolonge de manière unique à $(\mathbf{Z}X)^{\#}$, préserve L.

Cette condition équivaut à dire que l'automorphisme induit sur $(\mathbf{Z}X)^{\#}/\mathbf{Z}X$ préserve le sous-groupe $L/\mathbf{Z}X$.

On va voir que pour certains systèmes de racines R, le réseau $\mathbf{Z}R$ possède une isométrie parfaite telle que l'automorphisme induit sur $(\mathbf{Z}R)^{\#}/\mathbf{Z}R$ est la multiplication par -1 qui évidemment préserve tout sous-groupe.

PROPOSITION 4. *Si L est un réseau entier de R^n avec un système R de vecteurs de carré scalaire 2 du type*

$$R = \oplus_{i=1}^{p} A_{2k_i} \oplus qE_6 \oplus rE_8, \qquad p, q, r \geqslant 0,$$

et si $\operatorname{rang}(\mathbf{Z}R) = \operatorname{rang}(L)$, *c'est-à-dire* $n = \sum_i 2k_i + 6q + 8r$, *alors L possède une isométrie parfaite qui induit sur $\mathbf{Z}R^{\#}/\mathbf{Z}R$ la multiplication par* -1.

Preuve. Il suffit de constater ce fait individuellement pour

$$A_{2k} = \{e_i - e_j \in R^{2k+1}, i \neq j\},$$

et pour E_6. Pour E_8 il n'y a rien à démontrer puisque $(\mathbf{Z}E_8)^{\#} = \mathbf{Z}E_8$.

Pour A_{2k}, soit $t: R^{2k+1} \to R^{2k+1}$ l'isométrie définie par $t(e_i) = -e_{i+1}$, les indices étant lus mod $2k+1$. Cette isométrie préserve A_{2k}, donc $\mathbf{Z}A_{2k}$ et on constate que $t \mid \mathbf{Z}A_{2k}$ satisfait à l'équation

$$1 - (1-t)(t + t^3 + \ldots + t^{2k-1}) = 0.$$

Donc $1-t: \mathbf{Z}A_{2k} \to \mathbf{Z}A_{2k}$ est un isomorphisme.

Les classes de $(\mathbf{Z}A_{2k})^{\#}$ mod $\mathbf{Z}A_{2k}$ sont représentées par

$$y_r = \frac{r}{2k+1} \sum_{i=0}^{2k-r} e_i - \frac{2k-r+1}{2k+1} \sum_{i=2k-r+1}^{2k} e_i$$

pour $r = 0, 1, \ldots, 2k$. (Voir [N], I.4, p. 148.)

On voit que

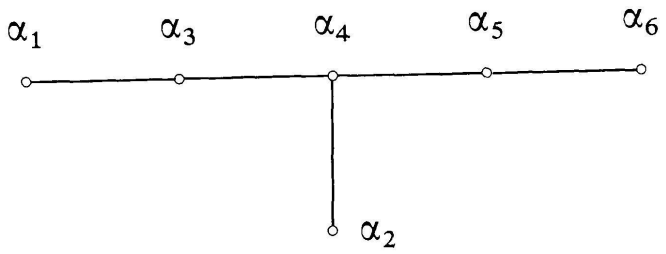
$$t(y_r) + y_r = e_0 - e_{2k-r+1} \in \mathbf{Z}A_{2k}$$

et par conséquent, sur $(\mathbf{Z}A_{2k})^{\#}/\mathbf{Z}A_{2k}$, l'isométrie t se réduit à la multiplication par -1.

Il en va de même pour le système de racines E_6 qui est engendré par 6 racines simples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ dont la matrice de produits scalaires est

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

correspondant au diagramme de Dynkin



Si s_i désigne la réflexion définie par le vecteur α_i, et

$$w = s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 ,$$

on a

$$\begin{aligned} w(\alpha_1) &= -(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6) \\ w(\alpha_2) &= -(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6) \\ w(\alpha_3) &= \alpha_1 \\ w(\alpha_4) &= \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 \\ w(\alpha_5) &= \alpha_4 \\ w(\alpha_6) &= \alpha_5 \end{aligned}$$

et w satisfait à l'équation $1 + w^4 + w^8 = 0$. Donc en posant

$$t = -w^4 ,$$

on a $1 - t + t^2 = 0$ et t est une isométrie parfaite de $\mathbf{Z}E_6$.

Comme $(\mathbf{Z}E_6)^{\#}/\mathbf{Z}E_6$ qui est cyclique d'ordre 3 est engendré par

$$y_1 = \frac{1}{3}(-\alpha_1+\alpha_3-\alpha_5+\alpha_6) ,$$

on voit que $wy_1 = y_1 \bmod \mathbf{Z}E_6$, et $ty_1 = -y_1 \bmod \mathbf{Z}E_6$. Ainsi t induit la multiplication par -1 dans le groupe quotient $(\mathbf{Z}E_6)^{\#}/\mathbf{Z}E_6$.

(Voir les rubriques marquées (XII) dans [B], Chap. VI, § 4. Classification des systèmes de racines, p. 208 pour A_{2k} et p. 220 pour E_6.)

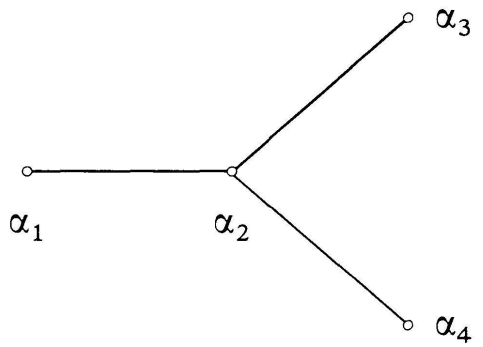
La Proposition 4 ci-dessus démontre en dimension 24 que les réseaux unimodulaires correspondant à

$$A_{24}, 2A_{12}, 3A_8, 4A_6, 6A_4, 12A_2, 4E_6 \quad \text{et} \quad 3E_8 ,$$

dans la classification de Niemeier possèdent tous une isométrie parfaite.

Pour le réseau unimodulaire dont le système de racines est $6D_4$ la situation est plus compliquée.

Une base de $\mathbf{Z}D_4$ est donnée par les racines simples α_1, α_2, α_3, α_4 formant le diagramme



ce qui veut dire que la matrice des produits scalaires $(\alpha_i \,.\, \alpha_j)$ est

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Il existe une isométrie parfaite de $\mathbf{Z}D_4$ donnée par les formules

$$\begin{aligned} t(\alpha_1) &= -(\alpha_2+\alpha_3) \\ t(\alpha_2) &= -\alpha_4 \\ t(\alpha_3) &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ t(\alpha_4) &= \alpha_2 + \alpha_4 \,. \end{aligned}$$

Elle a pour polynôme minimal $1 - X + X^2$ et opère sur $(\mathbf{Z}D_4)^{\#}/\mathbf{Z}D_4 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ par permutation circulaire des 3 classes non nulles représentées par $\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_4)$, $\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_3)$ et $\frac{1}{2}(\alpha_3+\alpha_4)$.

En utilisant les calculs de H. V. Niemeier, on peut alors vérifier que t préserve l'unique réseau pair unimodulaire L en sandwich entre

$$\mathbf{Z}D_4 \oplus \mathbf{Z}D_4 \oplus \mathbf{Z}D_4 \oplus \mathbf{Z}D_4 \oplus \mathbf{Z}D_4 \oplus \mathbf{Z}D_4 \subset R^{24}$$

et son dual et pour lequel $6D_4$ est le système de vecteurs minimaux (de carré scalaire 2).

On trouvera la description de L dans [N], p. 173. Le réseau L est engendré par $\mathbf{Z}(6D_4)$ et 6 vecteurs $x_1, \ldots, x_6$ dont les classes mod $\mathbf{Z}(6D_4)$ sont données explicitement par H. V. Niemeier et sur lesquels l'isométrie t ci-dessus opère par

$$\begin{aligned} t(x_{2i-1}) &= x_{2i}\,, \\ t(x_{2i}) &= x_{2i-1} + x_{2i} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3\,. \end{aligned}$$

Le réseau L est donc préservé par t et possède donc une isométrie parfaite.

Enfin, pour le réseau de Leech Λ sans vecteurs de carré scalaire 2, on peut écrire une isométrie parfaite en faisant appel à la belle description de Λ donnée par J. Tits [T].

Λ est un module sur un ordre maximal A de l'algèbre de quaternions « ordinaires » $H = Q(\sqrt{5})\,(i, j, k)$ contenant

$$\zeta = -\tfrac{1}{2}(1+i+j+k)$$

et $e = \tau + \zeta'$, où $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ et où $x \mapsto x'$ désigne la conjugaison standard dans H.

On observe que $1 + \zeta + \zeta^2 = 0$.

Le réseau Λ est défini comme sous-module de A^3 par

$$\Lambda = \{(x_1, x_2, x_3) \in A^3 \mid ex_1 \equiv ex_2 \equiv ex_3 \equiv \textstyle\sum_{\nu=1}^{3} x_\nu \bmod 2A\}\,.$$

J. Tits munit Λ d'une forme hermitienne h donnée par

$$h(x, y) = \textstyle\sum_{\nu=1}^{3} x'_\nu \cdot y_\nu \in A$$

et la forme $S\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathbf{Z}$ à valeurs entières est donnée par

$$S(x, y) = \tfrac{1}{2} \cdot \lambda\big(h(x, y) + h'(x, y)\big)$$

où $\lambda(a+b\tau) = a$. ($a, b \in \mathbf{Z}$.)

On peut donc définir une isométrie $t\colon \Lambda \to \Lambda$ par

$$t(x_1, x_2, x_3) = (-\zeta x_1, -\zeta x_2, -\zeta x_3)\,.$$

C'est déjà une isométrie pour la forme hermitienne h et son polynôme minimal est $1 - X + X^2$. Elle est donc parfaite.

BIBLIOGRAPHIE

[B] BOURBAKI, N. *Groupes et algèbres de Lie*. Hermann, 1968.

[H.-M.] HUSEMOLLER, D. and J. MILNOR. *Symmetric Bilinear Forms*. Ergebnisse der Mathematik, Bd 73. Springer, 1973.

[K] KERVAIRE, M. Les nœuds de dimensions supérieures. *Bull. Soc. Math. de France 93* (1965), 225-271.

[N] NIEMEIER, H. V. Definite quadratische Formen der Dimension 24 und Diskriminante 1. *Journal of Number Theory 5* (1973), 142-178.

[S] SEIFERT, H. Über das Geschlecht von Knoten. *Math. Annalen 110* (1934), 571-592.

[Se] SERRE, J.-P. *Cours d'arithmétique*. P.U.F., 1970.

[T] TITS, J. Quaternions over $Q(\sqrt{5})$, Leech's lattice and the sporadic group of Hall-Janko. *Journal of Algebra 63* (1980), 56-75.

(Reçu le 12 mars 1984)

Michel Kervaire

Section de Mathématiques
Case postale 240
CH — 1211 Genève 24