

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 31 (1985)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GEOMETRIC PROOF OF BIEBERBACH'S THEOREMS ON CRYSTALLOGRAPHIC GROUPS
Autor: Buser, Peter

Bibliographie
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-54561>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

5.5. *Remark.* From the preceding proof we can derive the upper bound $\exp \exp 4n^2$ for the number of isomorphism classes of n -dimensional crystallographic groups. The correct numbers for $n = 1, 2, 3, 4$ are respectively 2, 17, 219, 4783 [4].

REFERENCES

The original articles of Bieberbach and Frobenius are

- [1] BIEBERBACH, L. Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume, I: *Math. Ann.* 70 (1911), 297-336; II: *Math. Ann.* 72 (1912), 400-412.
- [2] FROBENIUS, C. Über die unzerlegbaren diskreten Bewegungsgruppen. *Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin* 29 (1911), 654-665.

A simplified version of Frobenius' proof using minor amounts of Lie group theory is in

- [3] AUSLANDER, L. An account of the theory of crystallographic groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* 16 (1956), 1230-1236.

For historical remarks we refer to

- [4] BROWN, H., R. BÜLOW, J. NEUBÜSER, H. WONDRATSCHEK and H. ZASSENHAUS. *Crystallographic Groups of Four Dimensional Space*. New York, Wiley, 1978.
- [5] BUSER, P. and H. KARCHER. The Bieberbach Case in Gromov's Almost Flat Manifold Theorem. In *Global Differential Geometry and Global Analysis, Proceedings, Berlin 1979, Lect. Notes in Mathematics*, 838, Berlin, Springer Verlag, 1981.
- [6] MILNOR, J. Hilbert's Problem 18: On Crystallographic Groups, Fundamental Domains, and on Sphere Packing. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 28, Amer. Math. Soc., Providence, 1976.

A proof of Bieberbach's third theorem that two crystallographic groups are isomorphic if and only if they are conjugate by an affine transformation, may be found on p. 375 in

- [7] RINOW, W. *Die innere Geometrie der metrischen Räume*. Berlin, Springer Verlag, 1961.

(Reçu le 29 juin 1984)

Peter Buser

Département de Mathématiques
Ecole Polytechnique Fédérale
CH-1015 Lausanne-Ecublens
Switzerland

Vide-leer-empty