

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 31 (1985)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SÉRIES D'EISENSTEIN, INTÉGRALES TOROÏDALES ET UNE FORMULE DE HECKE  
**Autor:** Wielonsky, Franck  
**Kapitel:** formule intégrale de Hecke  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-54560>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Chapitre VI

## LA FORMULE INTÉGRALE DE HECKE

Le but de ce chapitre est d'utiliser la formule établie dans le théorème 1, dans le cas particulier où  $k$  est le corps  $\mathbf{Q}$  et  $E$  un corps de nombres sur  $\mathbf{Q}$ , afin d'obtenir la formule intégrale de Hecke classique (Réf. [H]). Dans un premier paragraphe on construira une application de l'ensemble des matrices  $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A})$  dans l'ensemble  $G(\mathbf{Z}) \cdot Z_\infty \backslash G(\mathbf{R})$  des matrices réelles et on calculera l'image par cette application du tore  $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A}) \backslash T(\mathbf{A})$ . Dans le deuxième paragraphe, on utilisera cette application pour retrouver la formule de Hecke à partir de l'identité du chapitre précédent (Théorème 1).

1. LA PROJECTION DE  $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A})$  SUR LA PLACE À L'INFINI

A. La projection  $\pi_1: G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A}) \rightarrow Z_\infty G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$

L'ensemble  $Z_\infty$  désigne le sous-groupe de  $G(\mathbf{A})$  constitué des matrices  $z$  telles que  $z_\infty$  soit une matrice scalaire non nulle et  $z_p$  est la matrice identité pour tout nombre  $p$  premier.

Soient  $M \in G(\mathbf{A})$  et  $z \in (\mathbf{A})$  avec

$$Z = \begin{pmatrix} z_p & & \\ & \ddots & \\ & & z_p \end{pmatrix}$$

où pour  $p$  fini, on exige que  $z_p \in \mathbf{Z}_p^\times$  pour presque tout  $p$  et  $z_p \in \mathbf{Q}_p^\times$  pour tout  $p$ .

Soit  $S$  l'ensemble des nombres premiers  $p$  tels que  $z_p \notin \mathbf{Z}_p^\times$  et soit  $p$  un élément de  $S$ , il existe un entier  $n_p$  vérifiant

$$p^{n_p} \cdot z_p \in \mathbf{Z}_p^\times.$$

Soit  $Q$  la matrice scalaire de  $Z(\mathbf{Q})$  dont les éléments diagonaux valent  $\prod_{p \in S} p^{n_p}$ ;  $ZQ$  est une matrice de  $Z_\infty \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$ .

Soit  $(ZQ)_f$  la matrice adélique coïncidant avec  $ZQ$  aux places finies et égale à 1 à la place infinie, et  $(ZQ)_\infty$  la matrice adélique égale à  $Z_\infty Q$  à la place infinie et égale à 1 aux places finies; on a la décomposition suivante:

$$\begin{aligned} ZM &= ZQ \cdot Q^{-1}M \\ &= (ZQ)_\infty \cdot (ZQ)_f \cdot Q^{-1}M \\ &= (ZQ)_\infty Q^{-1}M(ZQ)_f. \end{aligned}$$

Ce qui précède montre que la projection  $\pi_1$  qui a un élément de  $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A})$  fait correspondre la classe dans  $Z_\infty G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$  d'un représentant quelconque de cet élément, est bien définie.

B. *Il y a une bijection  $\pi_2$  entre  $G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$  et  $G(\mathbf{Z}) \backslash G(\mathbf{R})$*

En effet, on considère l'application de  $G(\mathbf{R})$  dans  $G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$  qui a une matrice  $g$  de  $G(\mathbf{R})$  associe la classe de  $(g, 1, \dots, 1, \dots)$  dans  $G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ . Cette application est surjective puisqu'on a la décomposition bien connue de  $G(\mathbf{A})$ :

$$G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{Q}) \cdot G^+(\mathbf{R}) \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$$

(voir par exemple [5], pp. 143-146 pour le cas  $n = 2$  et la démonstration est la même pour  $n$  quelconque).

Supposons que les matrices  $g$  et  $g'$  aient la même image. Alors on a une égalité

$$\gamma g k = \gamma' g' k',$$

avec  $\gamma, \gamma' \in G(\mathbf{Q})$  et  $k, k' \in G(\hat{\mathbf{Z}})$ ; par suite

$$\gamma^{-1} \gamma' = g k k'^{-1} g'^{-1} = g g'^{-1} k k'^{-1}.$$

Mais l'intersection  $G(\mathbf{Q}) \cap G(\mathbf{R}) \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$  est réduite à  $G(\mathbf{Z})$ ; cela entraîne l'existence d'un élément  $\sigma$  de  $G(\mathbf{Z})$  tel que

$$\gamma' = \gamma \sigma, \quad g = \sigma g', \quad k = \sigma k'.$$

Ainsi  $g$  et  $g'$  ont la même image si et seulement si ces matrices sont congrues modulo  $G(\mathbf{Z})$ . On a démontré:

PROPOSITION 10. *L'application  $\pi_2 \circ \pi_1$  où*

$$\pi_1: G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A}) \rightarrow Z_\infty G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$$

et

$$\pi_2: Z_\infty G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}) / G(\hat{\mathbf{Z}}) \rightarrow Z(\mathbf{R}) G(\mathbf{Z}) \backslash G(\mathbf{R})$$

sont définies comme précédemment, n'est autre que la projection canonique de  $G(\mathbf{Q}) Z(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A})$  sur  $Z(\mathbf{R}) G(\mathbf{Z}) \backslash G(\mathbf{R})$ .

C. L'image du tore  $T(\mathbf{A})$  dans  $Z(\mathbf{R}) G(\mathbf{Z}) \backslash G(\mathbf{R})$

L'image de  $T(\mathbf{Q}) Z(\mathbf{A}) \backslash T(\mathbf{A})$  dans  $Z_\infty G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}) / G(\hat{\mathbf{Z}})$  est

$$Z_\infty T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}}).$$

Dans le cas particulier où l'on considère un corps de nombres  $E$  sur  $\mathbf{Q}$ , muni d'une base fondamentale  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ , on déduit de la proposition 3 du chapitre II et de la remarque qui suit qu'il y a un isomorphisme  $v$  de  $T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}})$ , sur  $E^\times \backslash \mathbf{A}_E^\times / (\prod r_\mathfrak{p}^\times)$ , où  $r_\mathfrak{p}$  désigne le sous-anneau compact maximal de  $E_\mathfrak{p}$ . Ainsi  $Z_\infty T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}})$  s'identifie à l'ensemble  $\mathbf{R}^\times \cdot E^\times \backslash \mathbf{A}_E^\times / (\prod r_\mathfrak{p}^\times)$  qui se projette dans le groupe des classes d'idéaux de  $E$

$$E_\infty^\times \cdot E^\times \backslash \mathbf{A}_E^\times / (\prod r_\mathfrak{p}^\times),$$

où on a noté  $E_\infty$  le produit des complétés aux places infinies  $\prod_{v \in P_\infty} E_v$ .

Soient  $h$  le nombre de classes de  $E$  et  $(a_j)_{j=1 \text{ à } h}$ , un système de représentants de ces classes dans  $\mathbf{A}_E^\times$ , on a une bijection

$$\mathbf{R}^\times \cdot E^\times \backslash \mathbf{A}_E^\times / (\prod r_\mathfrak{p}^\times) \rightarrow \bigcup_{j=1 \text{ à } h} a_j \cdot (\mathbf{R}^\times \backslash E_\infty^\times).$$

En combinant cette bijection avec l'isomorphisme

$$Z_\infty T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^\times \cdot E^\times \backslash \mathbf{A}_E^\times / (\prod r_\mathfrak{p}^\times),$$

on peut écrire

$$Z_\infty T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}}) = \bigcup_{j=1 \text{ à } h} H_j \cdot (Z_\infty T(\mathbf{Z}) \backslash T_\infty(\mathbf{A})),$$

où la réunion est disjointe et où la classe de la matrice  $H_j \in T(\mathbf{A})$  dans  $T_\infty(\mathbf{A}) \cdot T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}})$  correspond à la classe de l'élément  $a_j$  de  $\mathbf{A}_E^\times$  dans  $E_\infty^\times \cdot E^\times \backslash \mathbf{A}_E^\times / (\prod r_\mathfrak{p}^\times)$ . On choisit de plus  $H_j$  telle que

$$(H_j)_\infty = 1.$$

On cherche à présent l'image du quotient  $Z_\infty T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}})$  dans  $Z(\mathbf{R}) G(\mathbf{Z}) \backslash G(\mathbf{R})$ . Si on note  $h_j$  l'image de la matrice  $H_j$  dans  $Z(\mathbf{R}) G(\mathbf{Z}) \backslash G(\mathbf{R})$ , alors l'image de  $Z_\infty T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}})$  est  $\bigcup_{j=1 \text{ à } h} h_j (Z(\mathbf{R}) T(\mathbf{Z}) \backslash T(\mathbf{R}))$ .



Reste à déterminer un système de matrices  $h_j$ . Pour chaque élément  $a_j$  de  $A_E^\times$  dans le système de représentants des classes d'idèles, on note  $a_j = [\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj}]$  un idéal de  $E$  dont la classe correspond par  $I_E$  (voir la proposition du chapitre II) à la classe  $a_j$ .

*Définition 1.* On note  $P_j$  l'élément de  $G(\mathbf{Q})$ , matrice de passage de la base fondamentale  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  de  $E$  à la base  $[\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj}]$  de l'idéal  $a_j$ , dont la  $i^e$  ligne est constituée des coordonnées du vecteur  $\alpha_{ij}$  dans la base  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ .

D'autre part, on a le diagramme d'isomorphismes commutatif suivant déduit de la proposition 4 du chapitre II

$$\begin{array}{ccccc} E_\infty^\times \backslash A_E^\times / (\prod r_\mu^\times) & \xrightarrow{\nu^{-1}} & T_\infty(\mathbf{A}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}}) & \subset & G_\infty(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A}) / G(\hat{\mathbf{Z}}) \\ I_E \downarrow \wr & & I_T \downarrow \wr & & I_T \downarrow \wr \\ \text{Idéaux de } E & \xrightarrow[\Omega^{-1}]{} & \Omega^{-1}(\text{Idéaux de } E) & \subset & \text{Réseaux de } \mathbf{Q}^n \end{array}$$

Le réseau image par  $I_T$  de la matrice  $(1, P_j, \dots, P_j, \dots)$  de  $G(\mathbf{A})$  est le réseau associé à l'idéal  $a_j$  par l'application  $\Omega^{-1}$ . En effet, quelque soit la place  $v$  finie, les vecteurs qui engendrent le réseau  $(r_v^n \cdot P_j)$  ont pour coordonnées dans la base canonique les coordonnées de  $\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj}$  dans la base  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ .

On en déduit que

$$H_j = (1, \prod_p (H_j)_p) \equiv (1, P_j, \dots, P_j, \dots) \bmod G(\hat{\mathbf{Z}})$$

et par suite la matrice  $h_j$  est l'image de  $(1, P_j, \dots, P_j, \dots)$  dans  $Z_\infty G(\mathbf{Z}) \backslash G(\mathbf{R})$ , c'est-à-dire  $P_j^{-1}$ . Par suite:

PROPOSITION 11. *L'image du tore  $Z_\infty T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}})$  dans  $Z(\mathbf{R}) G(\mathbf{Z}) \backslash G(\mathbf{R})$*

*est la réunion  $\bigcup_{j=1}^h P_j^{-1} \cdot (Z(\mathbf{R}) T(\mathbf{Z}) \backslash T(\mathbf{R}))$ .*

## 2. LA FORMULE INTÉGRALE DE HECKE

On suppose toujours que  $E$  un corps de nombres sur  $\mathbf{Q}$ . En choisissant pour  $g$  la matrice identité, la formule adélique donnée dans le théorème 1 du chapitre précédent devient

$$\int_{T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A}) \backslash T(\mathbf{A})} E(\varphi, x, \omega) d\mu_{Z \backslash T}(x) = \zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}).$$

On définit le quasi-caractère  $\omega$  de  $\mathbf{A}^\times / \mathbf{Q}^\times$  de la manière suivante :

$$\omega(t) = |t|_{\mathbf{A}}^s, \quad t \in \mathbf{A}^\times,$$

avec  $s \in \mathbf{C}$  et  $\sigma = \text{Res} > 1$ .

Ainsi

$$\omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}(t) = |t|_{\mathbf{A}_E}^s, \quad t \in \mathbf{A}_E^\times.$$

On définit la fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}))$  par

$$\varphi = \prod \varphi_p$$

avec, pour les *places finies*,

$$\varphi_p(t_p) = \chi_{L_p}(t_p), \quad t_p \in E \otimes \mathbf{Q}_p,$$

où  $\chi_{L_p}$  est la fonction caractéristique du réseau  $L_p$  engendré dans  $E \otimes \mathbf{Q}_p$  par la base fondamentale  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  de  $E$  sur  $\mathbf{Q}$ .

On note  $\mu_p$  comme au chapitre II, l'isomorphisme de  $E \otimes \mathbf{Q}_p$  sur  $\prod_{\ell \neq p} E$ ; le réseau  $L_p$  étant engendré par une base fondamentale, on a

$$\mu_p(L_p) = \prod_{\ell \neq p} r_\ell,$$

de sorte que

$$\varphi_p \circ \mu_p^{-1} = \prod_{\ell \neq p} \chi_{r_\ell}.$$

Pour la place *infinie*, on pose

$$\varphi_\infty(t) = e^{-\pi F(t)}, \quad t \in E \otimes \mathbf{R},$$

avec la fonction  $F$  définie par

$$F(t) = \sum_{i=1}^{r_1} \sigma_i(t)^2 + 2 \sum_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} |\sigma_i(t)|^2,$$

où  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq r_1}$  désignent les  $r_1$  plongements de  $E$  dans  $\mathbf{R}$ ,  $(\sigma_i)_{r_1+1 \leq i \leq r_1+r_2}$

les  $r_2$  plongements de  $E$  dans  $\mathbf{C}$  non conjugués deux à deux et

$$\sigma_{r_1+r_2+i} = \overline{\sigma_{r_1+i}} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq r_2.$$

La fonction  $F$  peut également s'exprimer pour un élément  $t = t_1\omega_1 + \dots + t_n\omega_n$  de  $E \otimes \mathbf{R}$  de la manière suivante :

$$F(t_1\omega_1 + \dots + t_n\omega_n) = \sum_{i=1}^{r_1} (t_1\omega_1^{(i)} + \dots + t_n\omega_n^{(i)})^2 + 2 \sum_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} |t_1\omega_1^{(i)} + \dots + t_n\omega_n^{(i)}|^2 = (t_1, \dots, t_n) \Delta \cdot {}^t \overline{\Delta} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix},$$

où on a noté  $\omega_j^{(i)} = \sigma_i(\omega_j)$  et  $\Delta$  la matrice

$$\begin{pmatrix} \omega_1^{(1)} & \dots & \omega_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_n^{(1)} & \dots & \omega_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Enfin, on note comme au chapitre V :

$\mu_E$  la mesure de Haar sur  $\mathbf{A}_E^\times$  obtenue en prenant  $\mu_E = \prod \mu_\rho$  avec  $\mu_\rho(r_\rho^\times) = 1$  pour toute place finie  $\rho$  de  $E$ ,  $d\mu_\rho(x) = \frac{dx}{|x|}$  pour les places réelles de  $E$  et  $d\mu_\rho(x) = |x|^{-2} \cdot |dx \wedge d\bar{x}|$  pour les places complexes de  $E$ ,  
 $\mu_T$  la mesure de Haar sur  $T(\mathbf{A})$  et  $T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A})$ ,  
 $\mu$  la mesure de Haar sur  $\mathbf{A}^\times$ ,  $\mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{A}^\times$  et  $Z(\mathbf{Q}) \backslash Z(\mathbf{A})$ ,  
 $\mu_{Z \backslash T}$  la mesure de Haar sur  $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A}) \backslash T(\mathbf{A})$ .

#### A) Calcul de $\zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}})$

Pour  $\sigma > 1$ , on a les égalités suivantes :

$$\zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}) = \int_{\mathbf{A}_E^\times} \varphi(t) \cdot |t|_{\mathbf{A}_E}^s d\mu_E(t) = \prod_\rho \int_{E_\rho^\times} \varphi_\rho |t_\rho| \cdot |t_\rho|^s d\mu_\rho(t_\rho)$$

(cf. [6], Prop. 10, p. 119).

Alors en utilisant [6], Prop. 11, p. 120 et lemme 8, p. 127, on obtien

$$\zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}) = \pi^{-r_1 s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} (2\pi)^{r_2(1-2)} \Gamma(s)^{r_2} \cdot \prod_{\rho \text{ fini}} (1 - |\pi_\rho|^s)^{-1},$$

où  $\pi_\rho$  désigne une uniformisante de  $E_\rho$ . Notons

$$G_{\infty}(s) = \pi^{-r_1 s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \cdot (2\pi)^{r_2(1-s)} \cdot \Gamma(s)^{r_2};$$

alors

$$\zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}) = G_{\infty}(s) \cdot \zeta_E(s),$$

où  $\zeta_E$  désigne la fonction zeta de Dedekind de l'extension  $E$ .

### B) Calcul de l'intégrale toroïdale

Dans la suite, on notera  $I$  l'intégrale toroïdale :

$$I = \int_{T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A}) \backslash T(\mathbf{A})} E(\varphi, x, \omega) d\mu_{Z \backslash T}(x).$$

On a vu que l'image par  $\pi_1$  du quotient  $(T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A}) \backslash T(\mathbf{A}))$  est

$$Z_{\infty} T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}})$$

Mais ce groupe est isomorphe au quotient suivant :

$$(T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A}) \backslash T(\mathbf{A})) / (T(\hat{\mathbf{Z}}) / Z(\hat{\mathbf{Z}}))$$

LEMME. Soit  $\xi$  un élément de  $G(\hat{\mathbf{Z}})$ ; alors

$$E(\varphi, x\xi, \omega) = E(\varphi, x, \omega).$$

Démonstration. On a

$$E(\varphi, x, \omega) = \sum_{\gamma \in P(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{Q})} M(\varphi, \gamma x, \omega)$$

et

$$M(\varphi, x, \omega) = |\det x|_{\mathbf{A}}^s \cdot \int_{\mathbf{A}^{\times}} \varphi(\text{et } x) \cdot |t|_{\mathbf{A}}^{ns} d\mu(t).$$

Il suffit de montrer

$$M(\varphi, x, \omega) = M(\varphi, x\xi, \omega).$$

Mais  $\xi \in G(\hat{\mathbf{Z}})$  donc  $|\det \xi|_{\mathbf{A}} = 1$ ; de plus en chaque place finie  $p$ ,  $\xi_p \in G(\mathbf{Z}_p)$  donc  $\text{et}_p x_p \in L_p$  si et seulement si  $\text{et}_p x_p \xi_p \in L_p$ , ce qui prouve le lemme.

Le groupe  $T(\hat{\mathbf{Z}})/Z(\hat{\mathbf{Z}})$  étant compact, on choisit une mesure de Haar sur celui-ci de manière à ce qu'il soit de mesure 1. Si on prend sur le

groupe  $Z_\infty T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}})$  la mesure quotient notée  $\dot{\mu}_{Z \backslash T}$ , on obtient comme nouvelle expression de l'intégrale  $I$

$$I = \int_{Z_\infty T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}})} E(\varphi, x, \omega) d\dot{\mu}_{Z \backslash T}(x),$$

puisque la série  $E$  est invariante par l'action de  $T(\hat{\mathbf{Z}})$ .

On a vu que le quotient  $Z_\infty T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}})$  s'écrit comme une réunion disjointe

$$\bigcup_{j=1}^h H_j(Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z}) \backslash T(\mathbf{R})).$$

Notons  $\mu_{T_\infty}$  la mesure induite par  $\mu_{Z \backslash T}$  sur le quotient  $Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z}) \backslash T(\mathbf{R})$ ; alors

$$I = \int_{Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z}) \backslash T(\mathbf{R})} \sum_{j=1}^h E(\varphi, H_j x, \omega) d\mu_{T_\infty}(x).$$

Pour chaque indice  $j$  de 1 à  $h$ , les matrices  $H_j$  et  $(h_j, 1, \dots, 1, \dots) = (P_j^{-1}, 1, \dots, 1, \dots)$  sont dans une même classe de  $G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}) / G(\hat{\mathbf{Z}})$ . (Cf. la remarque au-dessus de la proposition 11).

Comme les séries  $E$  sont invariantes par l'action de  $G(\mathbf{Q})$  à gauche et de  $G(\hat{\mathbf{Z}})$  à droite, on obtient

$$I = \int_{Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z}) \backslash T(\mathbf{R})} \sum_{j=1}^h E(\varphi, h_j x, \omega) d\mu_{T_\infty}(x).$$

On calcule à présent les séries  $E(\varphi, x, \omega)$  dans le cas particulier où  $x = (x_\infty, 1, \dots, 1)$ . Alors

$$\begin{aligned} E(\varphi_1(x_\infty, 1, \dots, 1, \dots), \omega) &= |\det x_\infty|^s \cdot \int_{\mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{A}^\times} |t|_{\mathbf{A}}^{ns} \cdot \sum_{\xi \in V(\mathbf{Q}) - \{0\}} \varphi(\xi t x) d\mu(t) \\ &= |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{\xi \in V(\mathbf{Q}) - \{0\}} \int_{\mathbf{R}_+^\times \cdot \prod_p \mathbf{Z}_p^\times} |t|_{\mathbf{A}}^{ns} \cdot \varphi(\xi t x) d\mu(t) \\ &= |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{\xi \in V(\mathbf{Q}) - \{0\}} \left( \int_0^{+\infty} t^{ns} \varphi_\infty(\xi t x_\infty) \frac{dt}{t} \cdot \prod_p \int_{\mathbf{Z}_p^\times} \varphi_p(\xi t) d\mu_p(t) \right). \end{aligned}$$

Soit  $\xi$  un élément de  $V(\mathbf{Q}) - \{0\}$ , de coordonnées  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ; alors l'intégrale

$\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \varphi_p(\xi t) d\mu_p(t)$  est non nulle lorsque

$$\text{Max}(|\xi_1|_p, \dots, |\xi_n|_p) \leq 1.$$

Pour que le produit sur l'ensemble des nombres premiers des intégrales précédentes soit non nul, il faut donc choisir  $\xi$  de coordonnées  $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$  vérifiant :

$$\xi_i \in \bigcap_p (\mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}_p) ;$$

donc  $\xi_i$  doit être un élément de  $\mathbf{Z}$ . Par conséquent

$$E(\varphi, (x_\infty, 1, \dots, 1, \dots), \omega) = |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \int_0^{+\infty} t^{ns-1} \cdot \varphi_\infty(\xi t x_\infty) dt .$$

D'autre part on a

$$\int_0^{+\infty} t^{ns-1} \cdot \varphi_\infty(\xi t x_\infty) dt = \int_0^{+\infty} t^{ns-1} \cdot e^{-\pi t^2 F(\xi x_\infty)} dt .$$

Faisons le changement de variables

$$u = \pi t^2 \cdot F(\xi x_\infty) ;$$

l'intégrale ci-dessus devient

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{ns}{2}\right) \cdot \pi^{-\frac{ns}{2}} \cdot F(\xi x_\infty)^{-\frac{ns}{2}}$$

et puisque

$$F(t_1 \omega_1 + \dots + t_n \omega_n) = (t_1, \dots, t_n) \Delta \cdot {}^t \bar{\Delta} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned} (*) \quad & E(\varphi, (x_\infty, 1, \dots, 1, \dots), \omega) \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{ns}{2}\right) \pi^{-\frac{ns}{2}} \cdot |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{q \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} (q x_\infty \Delta \cdot {}^t \bar{\Delta} {}^t \bar{x}_\infty {}^t q)^{-\frac{ns}{2}} . \end{aligned}$$

Dans le cas qui nous intéresse, les matrices  $x_\infty$  ont pour valeurs

$$x_\infty = P_j^{-1} x, \quad x \in Z(\mathbf{R}) T(\mathbf{Z}) \setminus T(\mathbf{R}) .$$

On rappelle que l'on a un isomorphisme

$$\pi : (E \otimes \mathbf{R})^\times \rightarrow T(\mathbf{R})$$

$$y \mapsto \pi(y) .$$

De plus, on vérifie facilement que l'on a le

LEMME. Soit  $y$  un élément de  $(E \otimes \mathbf{R})^\times$ ;

$$\pi(y) = \Delta D(y) \Delta^{-1},$$

où  $D(y)$  est la matrice diagonale  $(y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$ .

Soit  $v$  l'isomorphisme défini au chapitre II, en prenant pour  $v$  la place infinie, on voit que  $v$  applique  $T(\mathbf{R})$  sur  $(\mathbf{R}^+)^{r_1} \times (\mathbf{C}^\times)^{r_2}$  et que

$$v \circ \pi(y) = (y^{(1)}, \dots, y^{(r_1+r_2)}).$$

Pour  $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(r_1+r_2)})$  un élément de  $(\mathbf{R}^\times)^{r_1} \times (\mathbf{C}^\times)^{r_2}$ , on note

$$Ny = \prod_{i=1}^{r_1+r_2} |y_i|^{e_i} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{y} = \prod_{i=1}^{r_1+r_2} \frac{dy_i}{|y_i|^{e_i}},$$

avec

$$e_i = 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq r_1$$

et

$$e_i = 2 \quad \text{pour} \quad r_1 + 1 \leq i \leq r_1 + r_2.$$

*Définition 2.* Soit  $P$  une matrice d'ordre  $n$  réelle, symétrique, définie positive; on définit la série d'Epstein  $Z(P, s)$  où  $s$  est un nombre complexe vérifiant  $\operatorname{Re} s > \frac{n}{2}$ :

$$Z(P, s) = \frac{1}{2} \sum_{q \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} (q P {}^t q)^{-s}.$$

Avec cette définition et en utilisant la relation (\*), l'intégrale  $I$  se réécrit à présent

$$I = \Gamma\left(\frac{ns}{2}\right) \cdot \pi^{-\frac{ns}{2}} \cdot J,$$

où  $J$  est définie par

$$J = \sum_{j=1}^h \int_{y=(y_1, \dots, y_{r_1+r_2}) \in \mathcal{D}} (Ny)^s \cdot Z\left(P_j^{-1} \Delta D(y) \overline{D(y)} {}^t \Delta {}^t P_j^{-1}, \frac{ns}{2}\right) \frac{dy}{y}$$

et  $\mathcal{D}$  est un domaine fondamental dans  $(\mathbf{R}^\times)^{r_1} \times (\mathbf{C}^\times)^{r_2}$  correspondant par l'isomorphisme  $v$  à un domaine fondamental de  $Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z}) \backslash T(\mathbf{R})$ .

Posons comme nouvelles variables

$$\tau_1 = |y_1|^2; \dots; \tau_{r_1+r_2} = |y_{r_1+r_2}|^2$$

et pour toute matrice  $P$  de  $G(\mathbf{R})$ , écrivons

$$P^0 = (\det P)^{-1/n} \cdot P;$$

il vient

$$J = 2^{r_1-1} (4\pi)^{r_1} \cdot 2^{-(r_1+r_2)} \cdot |d_E|^{-s/2} \cdot K,$$

avec

$$K = \sum_{j=1}^h \int Z \left( (P_j^0)^{-1} \Delta^0 D(\tau) {}^t \overline{\Delta^0} {}^t (P_j^0)^{-1}, \frac{ns}{2} \right) \prod_{i=1}^{r_1+r_2} \frac{d\tau_i}{\tau_i},$$

où l'intégrale porte sur les  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{r_1+r_2}) \in U/H$  et où  $d_E = \det(\Delta)^2$  désigne le discriminant de  $E$ ,  $D(\tau)$  la matrice diagonale

$$(\tau_1, \dots, \tau_{r_1+1}, \dots, \tau_{r_1+r_2}, \tau_{r_1+1}, \dots, \tau_{r_1+r_2}),$$

$H$  le sous-espace de  $(\mathbf{R}_+^\times)^{r_1+r_2}$  défini par l'équation

$$\prod_{i=1}^{r_1+r_2} \tau_i^{e_i} = 1$$

et  $U$  l'image dans  $H$  des unités du corps de nombres  $E$ .

On fait encore le changement de variables suivant:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_+^{r_1+r_2} &\rightarrow \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^r \\ (\tau_1, \dots, \tau_{r_1+r_2}) &\mapsto (u, x_1, \dots, x_r) \end{aligned}$$

où  $r = r_1 + r_2 - 1$  et

$$\tau_j = u \cdot \prod_{i=1}^r |\varepsilon_i^{(j)}|^{2x_i} \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq r_1 + r_2,$$

où  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$  est un système d'unités fondamentales de  $E$ .

Le Jacobien de ce changement de variables est

$$\left( \prod_{i=1}^{r_1+r_2} \tau_i \right) u^{-1} \cdot 2^{r_1-1} \cdot n R,$$

où  $R$  désigne le régulateur de  $E$  défini par

$$R = \frac{1}{n} \cdot 2^{r_2} \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1^{(1)} & \dots & \varepsilon_r^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon_1^{(r+1)} & \dots & \varepsilon_r^{(r+1)} \end{vmatrix}$$



D'autre part, les unités de  $E$  ont pour image le réseau  $\mathbf{Z}^r$  dans  $\mathbf{R}^r$  et les racines de l'unité contenues dans  $E$  ont pour image le vecteur nul. Si on note  $w$  le nombre de ces racines alors le cardinal de  $U$  est  $\frac{w}{2}$ .

Finalement l'expression  $K$  devient

$$K = 2^{r_1} \cdot w^{-1} n R \sum_{j=1}^h \int_{x \in [0,1]^r} Z\left(P_{j,x}^0, \frac{ns}{2}\right) dx,$$

où on a noté  $P_{j,x}$  la matrice

$$P_{j,x} = P_j^{-1} \Delta D(\tau) {}^t \overline{\Delta} {}^t (P_j^{-1}).$$

Réécrivons à présent l'égalité du théorème 1 avec les expressions qui viennent d'être calculées.

PROPOSITION 12 (Formule de Hecke). *Soit*

$$\Lambda_E(s) = (2^{r_2} \pi^{n/2} |d_E|^{1/2})^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} \zeta_E(s)$$

et pour une matrice  $P$  réelle, symétrique, définie positive, posons

$$\Lambda(P, s) = \pi^{-s} \Gamma(s) Z(P, s).$$

Alors

$$w \cdot \Lambda_E(s) = 2^{r_1-1} \cdot n R \sum_{j=1}^h \int_{x \in [0,1]^r} \Lambda\left(P_{j,x}^0, \frac{ns}{2}\right) dx.$$

*Remarque.* Il serait intéressant de faire le calcul précédent dans un cas plus général où l'on considère un quasi-caractère  $\omega$  de  $\mathbf{A}^\times$  quelconque. Ainsi  $\omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}$  correspond à un caractère de Hecke sur le groupe des idéaux de  $E$  (cf. [4], chap. 8, §3, p. 156) et la difficulté est alors de calculer l'intégrale toroïdale aux places finies sur lesquelles le quasi-caractère  $\omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}$  se ramifie.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOREL, A. *Linear algebraic groups*. Benjamin (1969).
- [2] BOREVITCH, Z. I. et I. R. CHAFAREVITCH. *Théorie des Nombres*. Gauthiers Villars (1967).
- [3] BOURBAKI, N. *Algèbre, chapitres V, VII*. Masson (1981).
- [4] GOLDSTEIN, L. J. *Analytic number theory*. Prentice Hall (1971).