

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 31 (1985)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SÉRIES D'EISENSTEIN, INTÉGRALES TOROÏDALES ET UNE FORMULE DE HECKE  
**Autor:** Wielonsky, Franck  
**Kapitel:** Calcul des intégrales toroïdales des séries d'Eisenstein  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-54560>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Chapitre V

## CALCUL DES INTÉGRALES TOROÏDALES DES SÉRIES D'EISENSTEIN

On désigne toujours par  $k$  un corps global, par  $\mathbf{A}_k$  les adèles de  $k$ , par  $E$  une extension algébrique de  $k$  de dimension  $n$  et l'espace vectoriel  $E_{\text{vect}}$  sous-jacent à  $E$  est noté  $V(k)$ .

On rappelle que l'on a le diagramme d'isomorphismes commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (E \otimes \mathbf{A}_k)^\times & \xrightarrow{\pi} & T(\mathbf{A}_k) \\ & \searrow \mu & \downarrow \nu \\ & & \mathbf{A}_E^\times \end{array}$$

Soit  $\mu_E$  la mesure de Haar sur le groupe des idèles de  $\mathbf{A}_E$ ; on note  $\mu_T$  la mesure de Haar du groupe multiplicatif  $T(\mathbf{A}_k)$  transportée par l'isomorphisme  $\nu^{-1}$ , ainsi que la mesure induite sur le quotient  $T(k) \backslash T(\mathbf{A}_k)$ . On note de plus  $\mu$  la mesure de Haar sur chacun des quotients  $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$  et  $Z(k) \backslash Z(\mathbf{A}_k)$ .

Il existe une unique mesure de Haar notée  $d\mu_{Z \backslash T}$  sur le quotient  $T(k)Z(\mathbf{A}_k) \backslash T(\mathbf{A}_k)$  telle que pour toute fonction  $f \in \mathcal{K}(T(k) \backslash T(\mathbf{A}_k))$ , on ait

$$\int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k) \backslash T(\mathbf{A}_k)} \int_{Z(k) \backslash Z(\mathbf{A}_k)} f(x\xi) d\mu(\xi) d\mu_{Z \backslash T}(x) = \int_{T(k) \backslash T(\mathbf{A}_k)} f(x) d\mu_T(x).$$

On calcule à présent l'intégrale des séries d'Eisenstein sur le tore  $T(k)Z(\mathbf{A}_k) \backslash T(\mathbf{A}_k)$ . Soit  $g$  dans  $G(\mathbf{A}_k)$ ,  $\varphi$  dans  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$  et  $\omega$  un quasi-caractère de  $\mathbf{A}_k^\times$ ; on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
& \int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k) \backslash T(\mathbf{A}_k)} E(\varphi, tg, \omega) d\mu_{Z \backslash T}(t) \\
&= \int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k) \backslash T(\mathbf{A}_k)} \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det z \cdot tg) \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi z \cdot tg) d\mu(z) d\mu_{Z \backslash T}(t) \\
&= \int_{T(k) \backslash T(\mathbf{A}_k)} \omega(\det tg) \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi tg) d\mu_T(t).
\end{aligned}$$

En observant que si  $t$  est un élément de  $T(\mathbf{A}_k)$ , on a l'égalité

$$\det t = N_{E \backslash k}(\nu(t));$$

l'intégrale précédente devient

$$\begin{aligned}
& \omega(\det g) \int_{E^\times \backslash \mathbf{A}_E^\times} \sum_{\xi \in E^\times} \varphi(\xi tg) \cdot \omega(N_{E \backslash k}(t)) d\mu_E(t) \\
&= \omega(\det g) \cdot \int_{\mathbf{A}_E^\times} \varphi(tg) \cdot \omega(N_{E \backslash k}(t)) d\mu_E(t).
\end{aligned}$$

Pour  $\varphi$  une fonction de  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$  et  $\omega$  un quasi-caractère de  $\mathbf{A}_E^\times$ , on pose

$$\zeta(\varphi, \omega) = \int_{\mathbf{A}_E^\times} \varphi(t) \omega(t) d\mu_E(t)$$

et

$$\varphi_g(t) = \varphi(tg) \quad \text{pour } g \in G(\mathbf{A}_k);$$

on a démontré:

**THÉORÈME 1.** Soit  $k$  un corps global,  $E$  une extension algébrique finie de  $k$  de dimension  $n$ ,  $g$  une matrice de  $G(\mathbf{A}_k)$ ,  $\varphi$  une fonction de  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$ ,  $\omega$  un quasi-caractère de  $\mathbf{A}_k^\times$ ; on a l'identité suivante:

$$\int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k) \backslash T(\mathbf{A}_k)} E(\varphi, tg, \omega) d\mu_{Z \backslash T}(t) = \omega(\det g) \cdot \zeta(\varphi_g, \omega \circ N_{E \backslash k}).$$

*Remarque.* L'intégrale

$$\int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k) \backslash T(\mathbf{A}_k)} E(\varphi, tg, \omega) d\mu_{Z \backslash T}(t)$$

est appelée une *intégrale toroïdale* de séries d'Eisenstein.