

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 31 (1985)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SÉRIES D'EISENSTEIN, INTÉGRALES TOROÏDALES ET UNE FORMULE DE HECKE  
**Autor:** Wielonsky, Franck  
**Kapitel:** DÉFINITION ET CONVERGENCE DES SERIES D'EISENSTEIN  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-54560>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

ce qui prouve que

$$\Omega^{-1}(I_E(c)) = I_T(v^{-1}(c))$$

et démontre la proposition.

### Chapitre III

#### DÉFINITION ET CONVERGENCE DES SÉRIES D'EISENSTEIN

Dans tout ce chapitre,  $k$  désignera un corps global et  $\mathbf{A}_k$  les adèles de  $k$ .

#### 1. MESURES SUR $\mathbf{A}_k$ ET $\mathbf{A}_k^\times$

On s'intéresse d'abord aux places infinies de  $k$  (dans le cas où l'extension  $k$  est un corps de nombres). Sur le corps  $\mathbf{R}$ , on choisit la mesure de Lebesgue usuelle notée  $dx$  et sur le groupe multiplicatif  $\mathbf{R}^\times$ , on choisit la mesure de Haar  $\frac{dx}{|x|}$ . Sur le corps  $\mathbf{C}$ , on choisit la mesure

$$|dz \wedge d\bar{z}| = 2dx dy$$

et sur le groupe multiplicatif  $\mathbf{C}^\times$ , on prend comme mesure la mesure de Haar :

$$|z|^{-2} |dz \wedge d\bar{z}|.$$

Pour chaque place finie  $v$  de  $k$ , on note  $\alpha_v$  une mesure de Haar sur  $k_v$  complété de  $k$  en cette place. Soit  $r_v$  le sous-anneau compact maximal de  $k_v$ , on suppose que pour presque tout  $v$ , le réel positif  $m_v = \alpha_v(r_v)$  est égal à 1. Alors sur le corps global  $\mathbf{A}_k$ , il existe une unique mesure notée  $\alpha$  qui coïncide avec la mesure produit  $\prod \alpha_v$  sur chacun des sous-groupes ouverts  $\prod_{v \in P} k_v \cdot \prod_{v \notin P} r_v$  de  $\mathbf{A}_k$  où  $P$  est un ensemble fini de places de  $k$  contenant au moins les places infinies. Alors  $\alpha$  est une mesure de Haar sur le corps  $\mathbf{A}_k$ .

Sur le groupe multiplicatif  $k_v^\times$ , on sait que la mesure  $\frac{d\alpha_v(x)}{|x|_v}$  est une mesure de Haar. ( $|x|_v$  désignant le module de  $x \in k_v$ ).

Soit  $\pi_v$  une uniformisante de  $k_v$ ; on choisira comme mesure de Haar sur  $k_v^\times$ , la mesure  $d\mu_v$  définie par

$$d\mu_v(x) = \frac{|\pi_v|_v}{|\pi_v|_v - 1} \cdot \frac{d\alpha_v(x)}{|x|_v},$$

de sorte que l'on a le :

LEMME. *Pour toute place finie  $v$ ,*

$$\int_{|x|_v=1} d\mu_v(x) = m_v.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} m_v &= \int_{x \in r_v} d\alpha_v(x) = \int_{|x|_v \leq 1} d\alpha_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|x|_v = |\pi_v|_v^{+n}} d\alpha_v(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |\pi_v|_v^{-n} \int_{|x|_v=1} d\alpha_v(x) = \left(1 - \frac{1}{|\pi_v|_v}\right)^{-1} \int_{|x|_v=1} d\alpha_v(x) \\ &= \frac{|\pi_v|_v}{|\pi_v|_v - 1} \int_{|x|_v=1} \frac{d\alpha_v(x)}{|x|_v} = \int_{|x|_v=1} d\mu_v(x). \end{aligned}$$

Alors on définit la mesure de Haar  $\mu$  sur  $\mathbf{A}_k^\times$  comme l'unique mesure coïncidant avec la mesure produit  $\prod_v \mu_v$  sur chacun des sous-groupes

$$\prod_{v \in P} k_v^\times \cdot \prod_{v \notin P} r_v^\times.$$

## 2. SÉRIES D'EISENSTEIN

Dans la suite,  $G$  désignera le groupe algébrique  $GL_n$ ;  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $e = (0, \dots, 0, 1)$  le dernier élément de la base canonique de  $V$  et  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$  l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat définies sur le vectoriel  $V(\mathbf{A}_k)$  de la manière suivante :

On dira d'abord qu'une fonction  $f$  à valeurs complexes définie sur le vectoriel  $V(\mathbf{A}_k)$  est décomposable si elle s'écrit comme un produit

$$f(x) = \prod_v f_v(x_v).$$

Pour les places infinies éventuelles, on demande que  $f_v$  soit dans  $\mathcal{S}(V(k_v))$  l'espace des fonctions  $C^\infty$  à valeurs complexes à décroissance rapide, i.e. quel que soit  $\alpha \in \mathbf{N}^{an}$  (avec  $a = 1$  si  $k_v = \mathbf{R}$  et  $a = 2$  si  $k_v = \mathbf{C}$ ) et quel

que soit  $N > 1$  il existe  $C > 0$  tel que

$$|\partial^\alpha f_v(t_v)| \leq C(1 + \|t_v\|)^{-N}$$

quel que soit  $t_v \in k_v$ .

Pour les places finies  $v$ , on demande que  $f_v$  soit dans l'espace des fonctions à valeurs complexes localement constantes et à support compact. On notera également cet espace  $\mathcal{S}(V(k_v))$ . Enfin pour presque toute place finie  $v$ ,  $f_v$  est la fonction caractéristique du réseau  $r_v^n$ .

Le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$  est alors l'espace des combinaisons linéaires finies de fonctions décomposables telles que  $f_v \in \mathcal{S}(V(k_v))$  pour toute place  $v$ .

**PROPOSITION 5.** Soit  $x$  une matrice de  $G(\mathbf{A}_k)$ ,  $\varphi$  une fonction de  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$ ,  $\omega$  un quasi-caractère de  $\mathbf{A}_k^\times$  (i.e. un morphisme continu de  $\mathbf{A}_k^\times$  dans  $\mathbf{C}^\times$  trivial sur  $k^\times$ ),  $\sigma$  l'unique réel tel que

$$|\omega| = \omega_\sigma \quad \text{où} \quad \omega_\sigma(t) = |t|_{\mathbf{A}_k}^\sigma;$$

alors l'intégrale

$$M(\varphi, x, \omega) = \int_{\mathbf{A}_k^\times} \varphi(\text{et } x)\omega(\det tx)d\mu(t)$$

converge pour  $\sigma$  réel plus grand que  $1/n$ .

*Démonstration.* On peut supposer que la matrice  $x$  est la matrice unité et que la fonction  $\varphi$  est décomposable:

$$\varphi = \prod_v \varphi_v, \quad \varphi_v \in \mathcal{S}(V(k_v))$$

et  $\varphi_v$  est la fonction caractéristique de  $r_v^n$  pour presque toute place finie  $v$ . Soit  $K_v$  le support de la fonction  $\varphi_v$ , il existe un entier  $c_v$  tel que

$$K_v \subset \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n,$$

où  $r_v^n$  désigne le  $r_v$ -module engendré dans  $V(k_v)$  par la base canonique. Soit  $\sigma_v$  la fonction caractéristique de  $\pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$  et  $M_v$  le réel positif défini par

$$M_v = \sup_{x \in V(k_v)} |\varphi_v(x)|;$$

on a l'égalité suivante:

$$|\varphi_v(x)| \leq M_v \cdot \sigma_v(x).$$

D'autre part

$$\int_{k_v^\times} \sigma_v(et_v) \cdot |t_v|_v^{n\sigma} d\mu_v(t_v) = \int_{|t_v|_v \leq |\pi_v|_v^{-c_v}} |t_v|_v^{n\sigma} d\mu_v(t_v),$$

car

$$et_v = (0, \dots, 0, t_v) \in \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$$

si et seulement si

$$|t_v|_v \leq |\pi_v|_v^{-c_v}.$$

Mais

$$\int_{|t_v|_v \leq |\pi_v|_v^{-c_v}} |t_v|_v^{n\sigma} d\mu_v(t_v) = \sum_{r_v = -c_v}^{\infty} \int_{|t_v|_v = |\pi_v|_v^{r_v}} |\pi_v|_v^{r_v n\sigma} d\mu_v(t_v).$$

Posons  $q_v = |\pi_v|_v^{-1} > 1$ ; on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{r_v = -c_v}^{\infty} q_v^{-r_v n\sigma} \cdot \int_{|t_v|_v = 1} d\mu_v(t_v) &= m_v q_v^{c_v n\sigma} \cdot \sum_{r_v = 0}^{\infty} q_v^{-r_v n\sigma} \\ &= m_v q_v^{c_v n\sigma} (1 - q_v^{-n\sigma})^{-1} \quad \text{lorsque } \sigma > 0. \end{aligned}$$

Les réels  $M_v$  et  $m_v$  sont presque toujours égaux à 1 et l'entier  $c_v$  presque toujours nul, donc le produit des intégrales

$$\int_{k_v^\times} |\varphi_v(et_v)| \cdot |t_v|_v^{n\sigma} d\mu_v(t_v)$$

aux places finies est convergent lorsque le produit  $\prod_v (1 - q_v^{-n\sigma})^{-1}$  converge, c'est-à-dire quand  $n\sigma > 1$  ou encore  $\sigma > 1/n$ .

Aux places infinies l'intégrale converge si elle converge à l'origine autrement dit si  $\sigma > 0$ . La proposition 5 est démontrée.

Soit  $P$  le sous-groupe de  $G$  des matrices qui s'écrivent

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

où  $a$  est une matrice de  $GL_{n-1}$ ,  $b$  est un vecteur colonne ayant  $(n-1)$  composantes,  $d$  est un élément de l'anneau de base tel que  $d \cdot \det a$  soit inversible dans cet anneau; on définit les séries d'Eisenstein de la manière suivante :

PROPOSITION 6. Pour  $x \in G(\mathbf{A}_k)$ ,  $\omega$  un quasi-caractère de  $\mathbf{A}_k^\times$  tel que

$$|\omega| = \omega_\sigma, \quad \sigma \in \mathbf{R},$$

la série

$$E(\varphi, x, \omega) = \sum_{\gamma \in P(k) \backslash G(k)} M(\varphi, \gamma x, \omega)$$

converge pour  $\sigma > 1$ ; on l'appelle la série d'Eisenstein associée à la fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$ .

Énonçons d'abord le résultat suivant:

LEMME. L'intégrale

$$I_1 = \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} |t|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\varphi(\xi tx)| d\mu(t)$$

est convergente si  $\sigma > 1$ .

*Démonstration.* Comme la fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$  est quelconque, on peut supposer  $x = 1$ .

A)  $k$  de caractéristique 0.

Soit  $P_\infty$  l'ensemble des places infinies de  $k$ , on pose:

$$\Omega(P_\infty) = \prod_{v \in P_\infty} k_v^\times \cdot \prod_{v \notin P_\infty} r_v^\times.$$

On sait que le groupe  $\Omega(P_\infty) \cdot k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$  est fini, isomorphe au groupe  $C_k$  des classes d'idéaux de  $k$ . Soit  $Y$  un système de représentants dans  $\mathbf{A}_k^\times$  du quotient  $\Omega(P_\infty) \cdot k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$ ; l'application canonique de  $Y \cdot \Omega(P_\infty)$  dans  $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$  est surjective.

Supposons qu'un élément  $\alpha$  de  $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$  s'écrive de deux manières distinctes:

$$\alpha = y_1 \omega_1 = y_2 \omega_2,$$

avec

$$y_1, y_2 \in Y \quad \text{et} \quad \omega_1, \omega_2 \in \Omega(P_\infty).$$

Alors il existe  $\alpha$  dans  $k^\times$  tel que

$$\alpha y_1 \omega_1 = y_2 \omega_2,$$

ce qui entraîne l'égalité de  $y_1$  et  $y_2$  car ce sont des représentants du quotient  $k^\times \cdot \Omega(P_\infty) \backslash \mathbf{A}_k^\times$ . Ainsi

c'est-à-dire  $\alpha \in r^\times$ ,  $r$  désignant l'anneau des entiers de  $k$ . On a donc un isomorphisme

$$Y \cdot r^\times \setminus \Omega(P_\infty) \rightarrow k^\times \setminus \mathbf{A}_k^\times.$$

L'intégrale  $I_1$  se réécrit

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{y \in Y} \int_{t \in r^\times \setminus \Omega(P_\infty)} |yt|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\varphi(\xi yt)| d\mu(t) \\ &\leq \sum_{y \in Y} \int_{t \in \Omega(P_\infty)} |yt|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\varphi(\xi yt)| d\mu(t). \end{aligned}$$

La fonction  $\varphi$  étant quelconque, on se borne à étudier la convergence de

$$\int_{t \in \Omega(P_\infty)} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\varphi(\xi t)| \cdot |t|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} d\mu(t),$$

ou encore celle de

$$I_2 = \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \int_{t \in \Omega(P_\infty)} |\varphi(\xi t)| \cdot |t|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} d\mu(t),$$

ce qui se réécrit

$$(1) \quad I_2 = \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \left[ \prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \cdot \prod_{v \notin P_\infty} J_v(\xi) \right],$$

avec

$$\begin{aligned} I_v(\xi) &= \int_{t_v \in k_v^\times} |\varphi_v(\xi t_v)| \cdot |t_v|_{k_v}^{n\sigma} d\mu_v(t_v), \\ J_v(\xi) &= \int_{t_v \in r_v^\times} |\varphi_v(\xi t_v)| \cdot d\mu_v(t_v), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |t_v|_{k_v} &= |t_v| & \text{si } k_v &= \mathbf{R}, \\ &= |t_v|^2 & \text{si } k_v &= \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration de la proposition 2, on note  $K_v$  le support de la fonction  $\varphi_v$ ,  $c_v$  l'entier tel que

$$K_v \subset \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n.$$

De plus, on note  $\sigma_v$  la fonction caractéristique de  $\pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$  et  $M_v$  le réel positif défini par

$$M_v = \sup_{x \in V(k_v)} |\varphi_v(x)|$$

(l'entier  $c_v$  est nul et le réel  $M_v$  vaut 1 pour presque toutes les places finies  $v$ ). Alors

$$(2) \quad \prod_{v \in P_\infty} J_v \leq \prod_{v \in P_\infty} M_v \int_{t_v \in r_v^\times} \sigma_v(\xi t_v) d\mu_v(t_v).$$

Donnons une condition sur  $\xi$  pour qu'en toute place finie  $v$ ,  $\xi t_v \in \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$ .

Soit  $f = \prod_{v \in P_\infty} |\pi_v|_v^{-c_v} \in \mathbf{N} \subset r$  ( $r$  anneaux des entiers de  $k$ ), alors

$$|f|_v = |\pi_v|_v^{c_v};$$

on a les équivalences successives suivantes:

$$\xi t_v \in \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n \Leftrightarrow |\xi|_v \leq |\pi_v|_v^{-c_v} \Leftrightarrow |\xi|_v \leq |f|_v^{-1} \Leftrightarrow |f\xi|_v \leq 1 \Leftrightarrow f\xi \in r_v^n;$$

et on en déduit que  $\xi t_v$  sera dans  $\pi_v^{-c_v} r_v^n$  pour tout  $v$  fini si et seulement si  $\xi \in f^{-1} r^n$ . Si  $\xi \notin f^{-1} r^n$ , l'une au moins des intégrales  $J_v(\xi)$  est nulle et il suffit donc, dans la définition de  $I_2$ , de sommer sur les  $\xi \in f^{-1} r^n$ . On en déduit alors de (1) et (2) la majoration

$$I_2 \leq \sum_{\xi \in f^{-1} r^n} \left( \prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \cdot \prod_{v \in P_\infty} M_v \int_{t_v \in r_v^\times} d\mu_v(t_v) \right),$$

puis

$$I_2 \leq \left( \prod_{v \in P_\infty} M_v \cdot m_v \right) \sum_{\xi \in f^{-1} r^n} \left[ \prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \right],$$

où  $m_v$  est le réel positif défini en III.1.

Mais les fonctions  $\varphi_v$  où  $v$  est une place infinie sont à décroissance rapide donc:

$$\prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \leq \prod_{v \in P_\infty} C_{v,N} \int_{t_v \in k_v^\times} (1 + \|\xi t_v\|)^{-N} \cdot |t_v|^{\alpha n \sigma} d\mu_v(t_v),$$

où  $\alpha = 1$  si  $k_v = \mathbf{R}$ ,  $\alpha = 2$  si  $k_v = \mathbf{C}$ .

On fait le changement de variables suivant:

si  $v$  est une place réelle:  $u_v = \|\xi\| \cdot t_v$ ,  
 si  $v$  est une place complexe:  $u_v = \|\xi\|^{\frac{1}{2}} \cdot t_v$ ,

alors  $|u_v|_{k_v} = \|\xi\| \cdot |t_v|_{k_v}$  de sorte que

$$\prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \leq \|\xi\|^{-n\sigma d} \prod_{v \in P_\infty} C_{v,N} \int_{u_v \in k_v^\times} (1 + |u_v|_{k_v})^{-N} \cdot |u_v|_{k_v}^{n\sigma} d\mu_v(u_v),$$

où  $d$  désigne la dimension de  $k$  sur  $\mathbf{Q}$ .

— Si  $k_v = \mathbf{R}$ , l'intégrale correspondante dans le produit se réécrit:

$$\int_{t \in \mathbf{R}^\times} (1 + |t|)^{-N} \cdot |t|^{n\sigma} \frac{dt}{|t|}$$

intégrale qui converge à l'infini si  $N$  est choisi assez grand et en 0 si  $\sigma > 0$ .

— Si  $k_v = \mathbf{C}$ , l'intégrale se réécrit:

$$\begin{aligned} 2 \int_{z \in \mathbf{C}^\times} (1 + |z|^2)^{-N} \cdot |z|^{2n\sigma-2} dx dy &= 2 \int_\rho \int_\theta (1 + \rho^2)^{-N} \cdot \rho^{2n\sigma-1} d\rho d\theta \\ &= 4\pi \int_\rho (1 + \rho^2)^{-N} \cdot \rho^{2n\sigma-1} d\rho, \end{aligned}$$

intégrale qui converge à l'infini si  $N$  est choisi assez grand et en 0 si  $2n\sigma - 1 > -1$  c'est-à-dire si  $\sigma > 0$ .

Il reste à montrer la convergence de la série

$$\sum_{\xi \in f^{-1}r^n} \|\xi\|^{-n\sigma d} = \sum_{\xi \in r^n} \|f^{-1}\xi\|^{-n\sigma d} = |f|^{n\sigma d} \cdot \sum_{\xi \in r^n} \|\xi\|^{-n\sigma d};$$

on est donc ramené à la convergence de

$$\sum_{\xi \in r^n} \|\xi\|^{-n\sigma d}.$$

Si la norme utilisée est la norme définie par

$$\|\xi\| = \sup_i |\xi_i| \quad \text{pour} \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n),$$

on obtient les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in r^n} \|\xi\|^{-n\sigma d} &= \sum_{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in r^n} \sup_i |\xi_i|^{-n\sigma d} \\ &= \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \sup_i |z_1^i \omega_1 + \dots + z_d^i \omega_d|^{-n\sigma d}, \end{aligned}$$

avec  $z = (z_1^1, \dots, z_d^1, \dots, z_1^n, \dots, z_d^n)$ , et  $(\omega_1, \dots, \omega_d)$  est une base fondamentale du  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel  $k$ . Ainsi

$$\sum_{\xi \in \mathbf{r}^n} \|\xi\|^{-n\sigma d} \leq |\omega_{i_0}|^{-n\sigma d} \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \sup_i |z_1^i + \dots + z_d^i|^{-n\sigma d},$$

où  $\omega_{i_0}$  est un élément de la base fondamentale tel que

$$|\omega_{i_0}| = \sup_{i=1 \text{ à } n} |\omega_i|.$$

On a encore les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in \mathbf{r}^n} \|\xi\|^{-n\sigma d} &\leq |\omega_{i_0}|^{-n\sigma d} \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} d^{-n\sigma d} \sup_i \sup_j |z_j^i|^{-n\sigma d} \\ &= |d\omega_{i_0}|^{-n\sigma d} \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \sup_{i,j} |z_j^i|^{-n\sigma d} \\ &= |d\omega_{i_0}|^{-n\sigma d} \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \|z\|^{-n\sigma d}. \end{aligned}$$

On sait que la série  $\sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \|z\|^{-n\sigma d}$  converge pour  $\sigma > 1$ .

### B) $k$ de caractéristique $p$

On suppose que  $k$  est une extension algébrique de dimension finie du corps  $\mathbf{F}_p(T)$ . Pour chaque place  $v$  de  $k$ ,  $k_v$  est de caractéristique  $p$  et si  $x$  est un élément de  $k_v^\times$ , le nombre  $|x|_v$  est dans le sous-groupe  $\Gamma_0$  de  $\mathbf{R}_+^\times$  engendré par  $p$ . La même chose est vraie pour le module  $|z|_{\mathbf{A}_k}$  où  $z$  est un élément de  $\mathbf{A}_k^\times$ . L'image de  $\mathbf{A}_k^\times$  par le morphisme  $z \mapsto |z|_{\mathbf{A}_k}$  est un sous-groupe non trivial du groupe  $\Gamma_0$ . Supposons qu'il soit engendré par un entier  $Q = p^N$  avec  $N$  entier  $\geq 1$ .

Choisissons  $z_1$  dans  $\mathbf{A}_k$  tel que:  $|z_1|_{\mathbf{A}_k} = Q$ . Alors  $\mathbf{A}_k^\times$  est le produit direct de  $\mathbf{A}_k^1$  et du sous-groupe noté  $\Gamma$  engendré par  $z_1$  évidemment isomorphe à  $\mathbf{Z}$ . D'autre part, on pose

$$\Omega(\phi) = \prod_v r_v^\times,$$

on sait que le groupe quotient  $\Omega(\phi) \cdot k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1$  est fini. C'est le groupe isomorphe au groupe des classes de diviseurs de degré 0. (Voir [6], p. 97).

Soit  $Y$  un système de représentants dans  $\mathbf{A}_k^1$  de ce quotient; l'application canonique de  $\Gamma \cdot Y$  dans  $\Omega(\phi) \cdot k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$  est bijective et on a également un isomorphisme

$$k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times \rightarrow \Gamma \cdot Y(\Omega(\phi) \cap k^\times \backslash \Omega(\phi))$$

ou encore

$$k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times \rightarrow \Gamma \cdot Y(\mathbf{F}_q \backslash \Omega(\phi)),$$

où  $\mathbf{F}_q$  est le corps des constantes de  $k$  c'est-à-dire le corps fini maximal contenu dans  $k$ . Ainsi l'intégrale  $I_1$  se réécrit

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{y \in Y} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_{t \in \mathbf{F}_q \backslash \Omega(\phi)} |z_1^m|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\varphi(\xi z_1^m y t)| d\mu(t) \\ &\leq \sum_{y \in Y} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_{t \in \Omega(\phi)} |z_1^m|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\varphi(\xi z_1^m y t)| d\mu(t). \end{aligned}$$

La fonction  $\varphi$  étant quelconque, on se borne à étudier la convergence de

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_{t \in \Omega(\phi)} |z_1^m|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\varphi(\xi z_1^m t)| d\mu(t),$$

ou encore celle de

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{m \in \mathbf{Z}} |z_1|_{\mathbf{A}_k}^{mn\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \int_{t \in \Omega(\phi)} |\varphi(\xi z_1^m t)| d\mu(t) \\ &= \sum_{m \in \mathbf{Z}} |z_1|_{\mathbf{A}_k}^{mn\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \prod_v \int_{t_v \in r_v^\times} |\varphi_v(\xi z_{1,v}^m t_v)| d\mu_v(t_v), \end{aligned}$$

où  $z_{1,v}$  désigne la composante en la place  $v$  de l'idèle  $z_1$ .

Déterminons un idèle  $z_1$  particulier; on le choisit tel que:  $z_1 = (z_{1,v})_v$  avec  $z_{1,v} = 1$  pour  $v \neq v_0$ ,  $z_{1,v_0} = \pi_{v_0}$ ,  $v_0$  étant une place quelconque de  $k$ .

Alors l'intégrale  $I_2$  se réécrit:

$$I_2 = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \left( |\pi_{v_0}|^{mn\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \left[ \prod_{v \neq v_0} J_v(\xi) \cdot \int_{t_{v_0} \in r_{v_0}^\times} |\varphi_{v_0}(\xi t_{v_0} \pi_{v_0}^m)| d\mu_{v_0}(t_{v_0}) \right] \right),$$

où comme précédemment  $J_v(\xi)$  désigne l'intégrale

$$J_v(\xi) = \int_{t_v \in r_v^\times} |\varphi_v(\xi t_v)| \cdot d\mu_v(t_v).$$

On suppose toujours que  $\varphi = \prod \varphi_v$  est une fonction décomposable de  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$  et que, pour toute place  $v$ ,  $|\varphi_v| \leq M_v \sigma_v$ , où  $\sigma_v$  est la fonction caractéristique de  $\pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$ . Pour que le produit contenu dans l'expression  $I_2$  soit non nul, il faut que l'élément  $\xi$  de  $V(k) - \{0\}$  vérifie les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} \|\xi\|_v &\leq |\pi_v^{-c_v}|_v \quad \text{pour } v \neq v_0, \\ \|\xi\|_{v_0} &\leq |\pi_{v_0}^{-c_{v_0}-m}|_{v_0}. \end{aligned}$$

Posons

$$L_v = p_v^{-c_v}, \quad L_{v_0, m} = p_{v_0}^{-(c_{v_0}+m)}, \quad \text{et } L_m = (L_v)_v;$$

alors  $L_m$  est un système cohérent de  $k_v$ -réseaux de rang 1. (Voir [6], p. 97).

Soit  $\Lambda(L_m) = k \cap (\prod_v L_v)$ ,  $\Lambda(L_m)$  est un espace vectoriel sur le corps  $F_q$  des constantes de  $k$  dont on note sa dimension  $\lambda(L_m)$ . (Voir [6], p. 97). Le produit contenu dans  $I_2$  est non nul (pour  $m$  fixé) si et seulement si  $\xi \in \Lambda(L_m)$ .

D'autre part, soit  $a_m$  le diviseur associé au système  $L_m$ :

$$a_m = \sum_{v \neq v_0} c_v v + (c_{v_0} + m)v_0;$$

on sait que si son degré

$$\deg a_m = \sum_{v \neq v_0} c_v \deg v + (c_{v_0} + m) \deg v_0$$

est strictement négatif, c'est-à-dire si

$$m < -c_{v_0} - (\deg v_0)^{-1} \cdot \sum_{v \neq v_0} c_v \deg v = M,$$

alors  $\lambda(L_m) = 0$  (voir [6], p. 100).

Il suffit donc dans l'expression  $I_2$  de sommer pour  $m \geq M$  de sorte que

$$I_2 \leq \left( \prod_v M_v m_v \right) \sum_{m \geq M} |\pi_{v_0}|^{mn\sigma} \cdot \sum_{\xi \in \Lambda(L_m)^n - \{0\}} (1). \quad (1)$$

On doit étudier la convergence de

$$\sum_{m \geq M} |\pi_{v_0}|^{mn\sigma} (q^{n\lambda(L_m)} - 1).$$

Sachant que pour  $m$  assez grand, le théorème de Riemann-Roch donne l'égalité

$$\lambda(L_m) = \deg a_m - g + 1,$$

où  $g$  est le genre de  $k$  (voir [6], Cor. 2 du Théorème 2, p. 101), on est ramené à la convergence de

$$\sum_{m \geq M} q^{-mn\sigma \deg v_0} q^{nm \deg v_0} = \sum_{m \geq M} q^{\deg v_0(1-\sigma)mn}.$$

Cette série converge pour  $\sigma > 1$ .

Le résultat de la proposition 6 se déduit alors de :

PROPOSITION 7. On a l'égalité

$$E(\varphi, x, \omega) = \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx) \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi tx) d\mu(t)$$

pour  $\omega$  quasi-caractère d'exposant  $\sigma > 1$ .

Démonstration. On construit l'application suivante :

$$\begin{aligned} P(k) \backslash G(k) \times k^\times &\rightarrow V(k) - \{0\} \\ (\gamma, u) &\mapsto eu \gamma_0 \end{aligned}$$

où  $\gamma_0$  est une matrice dans la classe de  $\gamma$  dont le premier élément non nul sur la dernière ligne est égal à 1.

Puisque cette application est bijective, on peut écrire la série absolument convergente  $\sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi tx)$  comme

$$\sum_{u \in k^\times} \sum_{\gamma \in P(k) \backslash G(k)} \varphi(eu \gamma_0 tx),$$

et par suite

$$\begin{aligned} &\int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx) \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi tx) d\mu(t) \\ &= \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \sum_{u \in k^\times} \sum_{\gamma \in P(k) \backslash G(k)} \omega(\det tx) \varphi(eu \gamma_0 tx) d\mu(t) \\ &= \int_{\mathbf{A}_k^\times} \sum_{\gamma \in P(k) \backslash G(k)} \omega(\det tx) \varphi(et \gamma_0 x) d\mu(t) \\ &= \sum_{\gamma \in P(k) \backslash G(k)} \int_{\mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx) \varphi(et \gamma_0 x) d\mu(t) \end{aligned}$$

puisqu'on a ici convergence absolue. Mais l'intégrale

$$M(\varphi, \gamma_0 x, \omega) = \int_{\mathbf{A}_k^\times} \varphi(et \gamma_0 x) \omega(\det tx) d\mu(t)$$

ne dépend pas du représentant choisi dans la classe  $\gamma$  de  $P(k) \backslash G(k)$ , ainsi on a bien

$$\begin{aligned}
& \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx) \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi tx) d\mu(t) \\
&= \sum_{\gamma \in P(k) \backslash G(k)} \int_{\mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx) \varphi(\gamma x) d\mu(t) \\
&= E(\varphi, x, \omega).
\end{aligned}$$

### Chapitre IV

#### LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE DES SÉRIES D'EISENSTEIN

Dans la suite,  $k$  désigne un corps global,  $E$  une extension de dimension  $n$  sur  $k$  et  $V(k)$  l'espace vectoriel sur  $k$  sous-jacent à  $E$ .

##### 1. LA FORMULE DE POISSON

Soit  $\chi$  un caractère de  $\mathbf{A}_k$  non trivial, trivial sur  $k$  et soit  $(x, y)$  la formule bilinéaire symétrique sur  $V(\mathbf{A}_k)$  non dégénérée définie par

$$(x, y) = \text{Tr}(xy),$$

où  $\text{Tr}$  désigne la trace absolue  $\text{Tr}_{E/k}$ ; alors on peut identifier  $V(\mathbf{A}_k)$  avec son dual topologique par l'isomorphisme qui à un élément  $x$  de  $V(\mathbf{A}_k)$  associe le caractère  $\chi(x, y)$  de  $V(\mathbf{A}_k)$ .

Soit  $\alpha$  la mesure de Tamagawa de  $\mathbf{A}_E$  pour laquelle le quotient  $E \backslash \mathbf{A}_E$  est de mesure 1, avec l'identification précédente; la transformée de Fourier d'une fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$  est définie par

$$\hat{\varphi}(y) = \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(x) \overline{\chi(x, y)} d\alpha(x), \quad \text{pour } y \in V(\mathbf{A}_k),$$

et la formule de Poisson pour le sous-groupe discret à quotient compact  $V(k)$  dans  $V(\mathbf{A}_k)$  s'écrit

$$\sum_{x \in V(k)} \varphi(x) = \sum_{y \in V(k)} \hat{\varphi}(y) \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k)),$$

l'orthogonal de  $V(k)$  s'identifiant à  $V(k)$ .