Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1985)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SÉRIES D'EISENSTEIN, INTÉGRALES TOROÏDALES ET UNE FORMULE DE HECKE

Autor: Wielonsky, Franck

Kapitel: Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54560

L'Enseignement Mathématique, t. 31 (1985), p. 93-135

SÉRIES D'EISENSTEIN, INTÉGRALES TOROÏDALES ET UNE FORMULE DE HECKE

par Franck WIELONSKY

INTRODUCTION

Soit E un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$; alors d'après une formule de Hecke, on sait exprimer la fonction Zéta de E comme une somme finie d'intégrales de séries d'Epstein (cf. [He], [S] ou [T] pour une formulation précise).

L'objet de ce travail est de donner une version adélique et généralisée de cette formule en suivant une suggestion faite par Zagier (cf. [Z] pour le cas des extensions quadratiques (cf. aussi [Ha])). Celle-ci exprime une égalité entre la fonction Zéta d'une extension algébrique E de dimension finie n sur un corps global k et l'intégrale sur un tore d'une série d'Eisenstein.

Le chapitre I est consacré à l'étude de ce tore: le choix d'une base sur k de l'espace vectoriel $V(k)$ sous-jacent à E détermine un plongement π de E et plus généralement de $E \otimes_k K$, où K est une extension de k, dans une sous-algèbre $B(K)$ de $M_n(K)$ dont l'ensemble des éléments inversibles $T(K)$ forme un tore maximal dans $G(K)$. (On note pour simplifier G le groupe algébrique GL_n).

Dans le chapitre II, on établit d'autres résultats de nature algébrique qui sont utiles dans la suite.

Les séries d'Eisenstein adéliques sont étudiées dans les chapitres III et IV. (Pour les séries d'Eisenstein sur $SL_2(\mathbf{R})$, on peut trouver des démonstrations de la convergence et du prolongement analytique dans [L]). Soient x une matrice de $G(\mathbf{A}_k)$, φ une fonction dans l'espace de Schwartz-Bruhat $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$, $e = (0, ..., 0, 1)$ le dernier élément de la base canonique de l'espace vectoriel V. ω un quasi-caractère de $\mathbf{A}_k^\times$, σ l'unique réel tel que:

$$|\omega| = \omega_\sigma \quad \text{où} \quad \omega_\sigma(t) = |t|_{A_k}^\sigma, \quad t \in \mathbf{A}_k^\times$$

μ une mesure de Haar sur le groupe $\mathbf{A}_k^\times$.

On pose

$$M(\varphi, x, \omega) = \int_{\mathbf{A}_k^\times} \varphi(etx)\omega(\det tx)d\mu(t).$$

On montre d'abord la convergence de cette intégrale pour $\sigma > 1/n$. La série d'Eisenstein $E(\varphi, x, \omega)$ est alors définie par

$$E(\varphi, x, \omega) = \sum_{\gamma \in P(k)\backslash G(k)} M(\varphi, \gamma x, \omega),$$

où $P(k)$ est un sous-groupe parabolique de $G(k)$.

Nous montrons ensuite que cette série converge pour $\sigma > 1$ en utilisant une expression intégrale de celle-ci à savoir:

$$E(\varphi, x, \omega) = \int_{k^\times\backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx) \sum_{\xi \in V(k)-\{0\}} \varphi(\xi tx)d\mu(t).$$

On décompose alors cette intégrale en un produit d'intégrales locales correspondant à chaque place du corps global k.

La finitude du groupe C_k des classes d'idéaux de k en caractéristique 0, la finitude du groupe des classes de diviseurs de degré 0 et le théorème de Riemann-Roch pour le corps de fonctions k en caractéristique p interviennent également dans la preuve de la convergence de ces séries. On établit ensuite le prolongement analytique de ces séries à l'ensemble de tous les quasi-caractères et l'équation fonctionnelle qu'elles vérifient, déduite de la formule de Poisson pour les séries θ définies par:

$$\theta(\varphi, x, t) = \sum_{\xi \in V(k)-\{0\}} \varphi(\xi tx), \qquad t \in \mathbf{A}_k^\times.$$

On dispose alors des notions nécessaires pour démontrer la formule recherchée. C'est l'objet du chapitre V. Un énoncé précis de cette formule est le suivant: Soient Z le centre de G, $\mu_{Z\backslash T}$ une mesure de Haar sur le quotient $T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)$, $\zeta(\varphi, \omega)$ l'intégrale de Tate

$$\zeta(\varphi, \omega) = \int_{\mathbf{A}_E^\times} \varphi(t)\omega(t)d\mu_E(t)$$

et

$$\varphi_g(t) = \varphi(tg) \qquad \text{pour} \qquad g \in G(\mathbf{A}_k);$$

on a

$$\int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} E(\varphi, tg, \omega)d\mu_{Z\backslash T}(t) = \omega(\det g)\cdot\zeta(\varphi_g, \omega \circ N_{E/k}).$$

On termine ce travail en montrant comment on peut retrouver la formule classique de Hecke à partir de la formule adélique. Pour cela, on construit une projection du quotient $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ dans le quotient $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$ en utilisant la décomposition bien connue du groupe $G(\mathbf{A})$:

$$G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{Q}) \cdot G^{+}(\mathbf{R}) \cdot G(\hat{\mathbf{Z}}).$$

Pour obtenir la formule classique, on calcule quelle est l'image par cette projection du domaine d'intégration $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$ qui apparaît dans la formule généralisée. En particulier, cela fait intervenir des résultats obtenus dans le chapitre II.

Cet article reproduit une thèse de 3ᵉ cycle effectuée sous la direction de Gilles Lachaud. Qu'il trouve ici exprimée ma reconnaissance pour l'aide qu'il m'a apportée.

Chapitre I

Plongement d'un corps de nombres dans une algèbre de matrices rationnelles

Dans ce qui suit, k désigne un corps global ($\mathbf{A}$-field dans la terminologie de [6] p. 43) et E une algèbre étale sur k ([3] chap. V, p. 28, déf. 1).

Exemple. On prend pour k le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels et pour E une extension de dimension finie de $\mathbf{Q}$; alors E est une extension séparable de $\mathbf{Q}$ et donc une algèbre étale ([3] chap. V, p. 35, déf. 1).

On note E_{vect} l'espace vectoriel sous-jacent à E; et on pose:

$$n = \dim E_{\text{vect}} = [E:k].$$

Si $x \in E$, on note u_x l'endomorphisme k-linéaire de E_{vect} défini par

$$u_x(y) = xy \quad (y \in E),$$

de telle sorte que

$$u_{x+y} = u_x + u_y \qquad u_{xy} = u_x \circ u_y, \qquad x, y \in E;$$

autrement dit, l'application $u: E \to End(E_{\text{vect}})$ définie par $u: x \mapsto u_x$ est un homomorphisme de k-algèbres.