**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 31 (1985)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DU CAP-PRODUIT À COEFFICIENTS LOCAUX

**Autor:** Hausmann, Jean-Claude / Zahnd, Antoine

**Kapitel:** 3. Remarques, applications

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-54557

Pour prouver $\mathscr{H}^t(i + 1, 0)$, il suffit donc d'établir que

$$\partial : H_{i+1}(X; M \otimes N) \to \to H_i(X; T)$$

est injectif pour $i \geqslant 0$. On a la suite exacte:

$$H_{i+1}(X; L \otimes N) \to H_{i+1}(X; M \otimes N) \xrightarrow{\delta} H_i(X; T),$$

d'où l'injectivité de $\partial$ est conséquence du lemme suivant:

(2.3) LEMME. *Soit* $X = K(\pi, 1)$, $N$ *un* $\pi$-*module à gauche et* $L$ *un* $\pi$-*module libre. Alors* $H_j(X; L \otimes N) = 0$ *pour* $j > 0$.

*Démonstration.* Grâce à l'isomorphisme

$$H^j(X; (L_1 \oplus L_2) \otimes N) = H_j(X; L_1 \otimes N) \oplus H_j(X; L_2 \otimes N),$$

il suffit de démontrer (2.3) pour $L = \mathbf{Z}\pi$. Rappelons que

$$P \otimes_\pi Q = H_0(X; P \otimes Q)$$

(voir [Br, p. 55]). On a alors:

$$\begin{aligned}(\mathbf{Z}\pi \otimes N) \otimes_\pi C_j(\tilde{X}) &= H_0(X; (\mathbf{Z}\pi \otimes N) \otimes C_j(\tilde{X})) = \\ &= H_0(X; \mathbf{Z}\pi \otimes (N \otimes C_j(\tilde{X}))) = \mathbf{Z}\pi \otimes_\pi (N \otimes C_j(\tilde{X})) = \\ &= N \otimes C_j(\tilde{X}).\end{aligned}$$

On en déduit que $H_j(X; \mathbf{Z}\pi \otimes N) = H_j(\tilde{X}; N) = 0$, la dernière égalité étant due au fait que $\tilde{X}$ est contractile.

*Démonstration du lemme 3.* Il suffit de démontrer que $\mathscr{H}^t(i, k)$ implique $\mathscr{H}(i + 1, k)$ pour $i \geqslant k$. Soient $M$ un $\pi$-module à droite et $N$ un $\pi$-module à gauche. Choisissons une suite exacte $0 \to K \to L \to M \to 0$ avec $L$ un $\mathbf{Z}\pi$-module libre. Comme $K$ est sans $\mathbf{Z}$-torsion, l'hypothèse $\mathscr{H}^t(i, k)$ et le même raisonnement que pour la démonstration du lemme 2 montrent que $\phi^{(i+1)k}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$.

## 3. REMARQUES, APPLICATIONS

1) La preuve du théorème (2.1) utilise abondamment le fait que l'on a affaire à l'homologie et à la cohomologie à coefficients locaux. Notre méthode ne donne donc pas de caractérisation du cap-produit pour l'homo-

logie et la cohomologie à coefficients constants. De même, et curieusement, elle ne semble pas permettre de montrer que des propriétés analogues à I-IV puissent caractériser le cup-produit. Observons qu'une telle caractérisation du cup-produit existe pour la cohomologie des groupes finis (voir [Ws, § 4.2]).

2) Nous ignorons si les propriétés I à IV impliquent que

$\phi_X^{nn}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$ sans les hypothèses restrictives sur $M$ ou $N(n > 0)$. Observons que le cap-produit

$$H^n(X; M) \times H_n(X; N) \to H_0(X; M \otimes N)$$

est induite par l'application « évaluation »:

$$\begin{gathered}(M \otimes_\pi C_n(\tilde{X})) \times \mathrm{Hom}_\pi(C_n(\tilde{X}); N) \to M \otimes_\pi N \\ (m \otimes_\pi z, \alpha) \to m \otimes_\pi \alpha(z) .\end{gathered}$$

3) Supposons que la famille d'applications $\phi_X^{ik}(M, N)$ soit induite par une famille d'applications:

$$\varphi_X^{ik}(M, N): (M \otimes_\pi C_i(\tilde{X})) \times \mathrm{Hom}_\pi(C_k(\tilde{X}); N) \to (M \otimes N) \otimes_\pi C_{i-k}(\tilde{X})$$

telle que

$$\partial\varphi^{ik}(z, \alpha) = (-1)^k \varphi^{i-1,k}(\partial z, \alpha) + \varphi^{i,k+1}(z, \delta\alpha)\,(\varphi^{ik} = \varphi_X^{ik}(M, N)).$$

Alors, les conditions II et III du théorème (2.1) sont automatiquement vérifiées.

4) Une caractérisation axiomatique du cap-produit telle que celle présentée dans cet article peut être utile pour reconnaître cette opération exprimée dans d'autres théories homologiques (homologie simpliciale, cubique, etc.). Si $\Psi_*: \hat{H}_*(X; M) \xrightarrow{\cong} H_*(X; M)$ et $\Psi^*: \hat{H}^*(X; N) \xrightarrow{\cong} H^*(X; N)$ sont des isomorphismes de théories (co-)homologiques et si

$$\hat{\cap}: \hat{H}_i(X; M) \times \hat{H}^k(X; N) \to \hat{H}_{i-k}(X; M \otimes N)$$

est un cap-produit satisfaisant aux propriétés I à IV, alors $\Psi_*(z \mathbin{\hat{\cap}} \alpha) = \Psi_*(z) \cap \Psi^*(\alpha)$ (avec les restrictions sur $M$ du théorème (2.1)).