Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 31 (1985)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DU CAP-PRODUIT À COEFFICIENTS LOCAUX

Autor: Hausmann, Jean-Claude / Zahnd, Antoine

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54557

L'Enseignement Mathématique, t. 31 (1985), p. 71-79

PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DU CAP-PRODUIT À COEFFICIENTS LOCAUX

par Jean-Claude HAUSMANN et Antoine ZAHND

Soit X un CW-complexe connexe par arc et soient M et N deux $\pi_1(X)$-modules. Le but de cet article est de caractériser la famille d'applications « cap-produit »:

$$H_i(X; M) \times H^k(X; N) \to H_{i-k}(X; M \otimes N)$$
$$(z, \alpha) \mapsto z \cap \alpha$$

par quatre de ses propriétés: naturalité en X, comportement par rapport aux suites exactes courtes de coefficients (en M et en N) ainsi que description explicite en dimension $i = k = 0$. La caractérisation est complète, sauf peut-être dans le cas $i = k > 0$ où notre technique nécessite l'hypothèse que M est sans $\mathbf{Z}$-torsion ou que N est un $F\pi_1(X)$-module pour un corps F (Théorème (2.1)).

Un point essentiel de notre démonstration est l'utilisation du théorème de Kan-Thurston [KT] qui permet de se ramener au cas où X est un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$. Dans ce cas, la naturalité en X n'est même plus nécessaire (Proposition (2.2)).

Le § 3 contient quelques remarques et suggestions d'applications.

Les auteurs remercient M. Kervaire pour d'utiles conversations.

1. Définition et propriétés du cap-produit

Soit X un CW-complexe. Soit $S_j(X)$ l'ensemble des j-simplexes singuliers de X, i.e. des applications continues $\sigma : \Delta^j \to X$, où

$$\Delta^j = \{(x_0, ..., x_j) \in \mathbf{R}^{j+1} \mid x_r \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \Sigma x_r = 1\} .$$

Le groupe $C_j(X)$ des j-chaînes singulières de X est le groupe abélien libre de base $S_j(X)$. Pour $i, k \leqslant j$, on définit la i^e face avant ${}^i\sigma : \Delta^i \to X$ et la k^e face arrière $\sigma^k : \Delta^k \to X$ de $\sigma \in S_j(X)$ de la façon habituelle:

$$
\begin{aligned}
{}^{i}\sigma(x_0, \dots x_i) &= \sigma(x_0, \dots x_i, 0, \dots, 0) \\
\sigma^{k}(x_0, \dots, x_k) &= \sigma(0, \dots, 0, x_0, \dots, x_k)
\end{aligned}
$$

Supposons dorénavant que X est connexe par arc et soit $\tilde{X}$ son revêtement universel. L'action de $\pi = \pi_1(X)$ sur $\tilde{X}$ munit le groupe $C_j(\tilde{X})$ d'une structure de π-module (à gauche). Ce π-module est π-libre de base $\{\tilde{\sigma} \mid \sigma \in S_j(X)\} \subset S_j(\tilde{X})$, où $\tilde{\sigma} \in S_j(\tilde{X})$ est un relevé de $\sigma \in S_j(X)$. L'opérateur bord $\partial\colon C_j(\tilde{X}) \to C_{j-l}(\tilde{X})$ est l'application π-linéaire définie sur $\tilde{\sigma} \in S_j(\tilde{X})$ par

$$\partial \tilde{\sigma}(x_0, \dots, x_{j-1}) = \sum_{r=0}^{j} (-1)^r \tilde{\sigma}(x_0, ., x_{r-1}, 0, x_r, \dots, x_{j-1}).$$

Soit M un π-module à droite. Le groupe d'homologie $H_r(X; M)$ est défini comme le r^e groupe d'homologie du complexe

$$(M \otimes_\pi C_*(\tilde{X}); id_M \otimes_\pi \partial).$$

Si N est un π-module à gauche, le groupe de cohomologie $H^r(\tilde{X}; N)$ est le r^e groupe d'homologie du complexe $\big(Hom_\pi(C_*(\tilde{X}); N); \delta\big)$, où $\delta(\alpha)(z) = (-1)^r \cdot \alpha\big(\partial(z)\big)$ pour $z \in C_r(\tilde{X})$.

Le cap produit:

$$\cap\colon \big(M \otimes_\pi C_i(\tilde{X})\big) \times Hom_\pi\big(C_k(\tilde{X}); N\big) \to (M \otimes N) \otimes_\pi C_{i-k}(\tilde{X})$$

est l'application $\mathbf{Z}$-bilinéaire qui, pour $m \in M$, $\tilde{\sigma} \in S_i(\tilde{X})$ et $\alpha \in Hom_\pi\big(C_k(\tilde{X}); N\big)$ a pour définition:

$$(m \otimes_\pi \tilde{\sigma}) \cap \alpha = \big(m \otimes \alpha({}^{k}\tilde{\sigma})\big) \otimes_\pi \tilde{\sigma}^{i-k}.$$

Le symbole $\otimes$ dénote le produit sur $\mathbf{Z}$ par opposition à $\otimes_\pi$ qui désigne celui sur $\mathbf{Z}\pi$. Le groupe $M \otimes N$ est muni de la structure de π-module à droite donnée par $(m \otimes n)g = mg \otimes g^{-1}n$. Grâce à cette structure, on vérifie immédiatement que l'application « cap-produit » ci-dessus est bien définie. Un calcul direct donne la formule:

$$\partial(e \cap \alpha) = (-1)^k \partial e \cap \alpha + e \cap \delta\alpha, \; e = m \otimes_\pi z \in M \otimes_\pi C_i(\tilde{X}).$$

Cette formule montre que le cap-produit ci-dessus induit un cap-produit en homologie:

$$\cap\colon H_i(X; M) \times H^k(X; N) \to H_{i-k}(X; M \otimes N)$$

Parmi les nombreuses propriétés classiques du cap-produit, nous allons en dégager quatre que nous prouverons être caractéristiques au § 3. Nous introduisons directement le langage qui sera utilisé au § 3.

(1.1) PROPOSITION. *La famille d'applications*

$$\Phi_X^{ik}(M, N): H_i(X; M) \times H^k(X, \mathrm{N}) \to H_{i-k}(X; M \otimes N)$$

donnée par le cap-produit $\Phi_X^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$ *satisfait aux propriétés I, II, III et IV décrite ci-dessous.*

Propriété I: Soit $f: X \to Y$ une application continue entre CW-complexes connexes par arc. Soit M un $\pi_1(Y)$-module à droite et N un $\pi_1(Y)$-module à gauche, qui seront aussi considérés au besoin comme $\pi_1(X)$-modules via l'homomorphisme $\pi_1 f$. Alors, pour tout $z \in H_i(X; M)$ et $\alpha \in H^k(Y; N)$ on a la formule:

$$f_* \Phi_X^{ik}(M, N)\big(z, f^*(\alpha)\big) = \Phi_Y^{ik}(M, N)\big(f_*(z), \alpha\big).$$

Propriété II: Soit $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ une suite exacte de π-modules à gauche. Soit M un π-module à droite et S le π-module $\mathit{ker}(M \otimes N \to M \otimes N'')$. On a donc une suite exacte courte

$$0 \to S \to M \otimes N \to M \otimes N'' \to 0$$

et une surjection $\mu: M \otimes N' \twoheadrightarrow S$. Alors, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
H_i(X; M) \times H^k(X; N'') \arrow[r, "\Phi_X^{ik}(M, N'')"] \arrow[dd, "\mathrm{id} \times \delta"'] & H_{i-k}(X; M \otimes N'') \arrow[dr, "\partial"] & \\
 & & H_{i-k-1}(X; S) \\
H_i(X; M) \times H^{k+1}(X; N') \arrow[r, "\Phi_X^{i(k+1)}(M, N')"] & H_{i-k-1}(X; M \otimes N') \arrow[ur, "\mu_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Propriété III: Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de π-modules à droite. Soit N un π-module à gauche et T le π-module $\mathit{ker}(M \otimes N \to M'' \otimes N)$. On a donc une suite courte $0 \to T \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ et une surjection $\nu: M' \otimes N \twoheadrightarrow T$. Alors, le diagramme suivant est $(-1)^k$-commutatif:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
H_i(X, M'') \times H^k(X; N) \arrow[rr, "\Phi_X^{ik}(M'', N)"] \arrow[d, "\partial \times \mathrm{id}"'] & & H_{i-k}(X; M''\otimes N) \arrow[dr, "\partial"] & \\
& & & H_{i-k-1}(X; T) \\
H_{i-1}(X; M') \times H^k(X; N) \arrow[rr, "\Phi_X^{(i-1)k}(M', N)"] & & H_{i-k-1}(X; M'\otimes N) \arrow[ur, "\upsilon_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Pour énoncer la propriété IV on utilise les identifications classiques:

$$H_0(X; M) = M \Big/ \{m\text{-}m\alpha \mid m \in M, \alpha \in \mathbf{Z}\pi\},$$

$$H^0(X; N) = \{n \in N \mid gn = n \quad \text{pour tout} \quad g \in \pi\} \subset N.$$

On vérifie que l'application $M \times H^0(X; N) \subset M \times N \to M \otimes N$ donnée par $(m, n) \to m \otimes n$ produit, par passage aux quotients, une application $H_0(X; M) \times H^0(X; N) \to H_0(X; M \otimes N)$ que l'on notera $(m, n) \mapsto m \mathbin{\overline{\otimes}} n$.

Propriété IV: $\phi_X^{00}(M, N)(m, n) = m \mathbin{\overline{\otimes}} n$.

2. Le théorème de caractérisation

(2.1) Théorème. *Soit*

$$\phi_X^{ik}(M, N): H_i(X; M) \times H^k(X; N) \to H_{i-k}(X; M \otimes N)$$

une famille d'applications définies pour tout $i, k \geqslant 0$ *et tout triple* (X, M, N), *où* X *est un* CW*-complexe connexe par arc,* M *un* $\pi_1(X)$*-module à droite et* N *un* $\pi_1(X)$*-module à gauche. Supposons que la famille* $\phi_X^{ik}(M, N)$ *satisfait aux propriétés* I *à* IV. *Alors* $\phi_X^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$, *sauf peut-être lorsque* $i = k > 0$. *Cette dernière restriction est inutile lorsque* M *est sans* $\mathbf{Z}$*-torsion ou que* N *est un* $F\pi_1(X)$*-module pour un corps* F.

Le reste de ce paragraphe est dévolu à la démonstration du théorème (2.1). Un théorème de Kan-Thurston [KT] affirme que, pour tout

CW-complexe connexe par arc X, on peut trouver une application $f^X: TX \to X$ telle que:

a) $f^X_*: H_*(TX; P) \to H_*(X; P)$ est un isomorphisme pour tout $\pi_1(X)$-module P

b) $TX = K(\pi_1(TX), 1)$, i.e. $\tilde{TX}$ est contractile.

Ce résultat permet de réduire la démonstration du théorème (2.1) au cas d'espace d'Eilenberg-McLane. Le cas général découlera du calcul suivant (avec les abréviations $\phi^{ik}_X = \phi^{ik}_X(M, N)$ et $f = f^X$):

$$\phi^{ik}_X(z, \alpha) = \phi^{ik}_X(f_*(y), \alpha) = f_*\phi^{ik}_{TX}(y, f^*(\alpha)) = f_*(y \cap f^*(\alpha)) = z \cap \alpha .$$

La propriété I ne sera plus utilisée, car nous allons démontrer la proposition suivante:

(2.2). PROPOSITION. *Soit* $X = K(\pi, 1)$. *Soit*

$$\phi^{ik}(M, N): H_i(X; M) \times H^k(X; N) \to H_{i-k}(X; M \otimes N)$$

une famille d'applications définies pour tout $i, k \geqslant 0$, *tout* π*-module à droite* M *et tout* π*-module à gauche* N. *Si* $\phi^{ik}(M, N)$ *satisfait aux propriétés II, III et IV, alors* $\phi^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$, *sauf peut-être pour* $i = k > 0$. *Lorsque* M *est sans* **Z***-torsion ou que* N *est un* $F\pi$*-module pour un corps* F, *on a également* $\phi^{ii}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$.

Démonstration. Considérons les énoncés suivants:

$\mathscr{H}(i, k)$: $\phi^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$, pour toute paire (M, N) de π-modules comme dans l'énoncé de (2.2).

$\mathscr{H}^t(i, k)$: $\phi^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$ pour toute paire (M, N) de π-modules comme dans l'énoncé de (2.2), avec M sans **Z**-torsion ou N un $F\pi$-module.

L'hypothèse $\mathscr{H}(0, 0)$ est vraie: elle est équivalente à la propriété IV. On va démontrer tout d'abord les deux lemmes suivants:

LEMME 1. *Pour tout* $i \geqslant k \geqslant 0$ $\mathscr{H}^t(i, k)$ *entraîne* $\mathscr{H}^t(i, k+1)$.

LEMME 2. $\mathscr{H}^t(i, 0)$ *entraîne* $\mathscr{H}^t(i+1, 0)$.

Puisque $\mathscr{H}(0, 0)$ est vraie, les lemmes 1 et 2 impliquent que $\mathscr{H}^t(i, k)$ est vraie pour tout $i, k \geqslant 0$. On démontrera enfin le

LEMME 3. $\mathscr{H}^t(i, k)$ pour tout i, k, entraîne $\mathscr{H}(i, k)$ lorsque $i > k$, ce qui achèvera la démonstration de (2.2).

Démonstration du lemme 1. Soit (M, N) une paire de π-module comme dans l'énoncé $\mathscr{H}^t(i, k+1)$. Considérons une suite exacte de π-modules à gauche $0 \to N \to I \to Q \to 0$ avec I un π-module injectif. Comme M est sans $\mathbf{Z}$-torsion, la suite $0 \to M \otimes N \to M \otimes I \to M \otimes Q \to 0$ est aussi exacte et le diagramme de la propriété II se réduit à un diagramme commutatif carré:

$$\begin{tikzcd}
H_i(X; M) \times H^k(X; Q) \arrow[r, "\Phi^{ik}(M, Q)"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \delta"'] & H_{i-k}(X; M\otimes Q) \arrow[d, "\partial"] \\
H_i(X; M) \times H^{k+1}(X; N) \arrow[r, "\Phi^{i(k+1)}(M, N)"] & H_{i-k-1}(X; M\otimes N)
\end{tikzcd}$$

Comme I est injectif et $X = K(\pi, 1)$, on a $H^j(X; I) = 0$ pour $j > 0$ et donc $\delta: H^k(X; Q) \to H^{k+1}(X; N)$ est surjectif pour $k \geqslant 0$. On a donc, en utilisant $\mathscr{H}^t_{(i, k)}$:

$$\begin{aligned}
\phi^{i(k+1)}(M, N)(z, \alpha) &= \phi^{i(k+1)}(M, N)(z, \delta(\beta)) = \\
&= \partial(\phi^{ik}(M, Q)(z, \beta)) = \partial(z \cap \beta) = z \cap \alpha,
\end{aligned}$$

ce qui prouve $\mathscr{H}^t(i, k+1)$ lorsque M est sans $\mathbf{Z}$-torsion. Dans le cas où N est un $F\pi$-module, on procède de même: on prend une suite $0 \to N \to I \to Q \to 0$, avec I un $F\pi$-module injectif. Une telle suite étant $\mathbf{Z}$-scindée, la suite $0 \to M \otimes N \to M \otimes I \to M \otimes Q \to 0$ est encore exacte.

Démonstration du Lemme 2. Soit (M, N) une paire de module comme dans l'énoncé de (2.2). Considérons une suite exacte de π-modules à droite $0 \to K \to L \to M \to 0$ avec L un π-module libre. On en déduit une suite exacte $0 \to T \to L \otimes N \to M \otimes N \to 0$ et une surjection $\nu: K \otimes N \twoheadrightarrow T$. Observons que K est sans $\mathbf{Z}$-torsion; on peut donc appliquer l'hypothèse $\mathscr{H}^t_{(i, 0)}$ à la paire (K, N). Ceci, combiné avec la propriété III permet le calcul suivant:

$$\begin{aligned}
\partial(\phi^{(i+1)0}\ (M, N)(z, \alpha)) &= (-1)^0 \nu_*(\phi^{i0}(K, N)(\partial z, \alpha)) = \nu_*(\partial z \cap \alpha) = \\
&= \partial(z \cap \alpha).
\end{aligned}$$

Pour prouver $\mathscr{H}^t(i+1, 0)$, il suffit donc d'établir que

$$\partial : H_{i+1}(X; M \otimes N) \to \to H_i(X; T)$$

est injectif pour $i \geqslant 0$. On a la suite exacte:

$$H_{i+1}(X; L \otimes N) \to H_{i+1}(X; M \otimes N) \xrightarrow{\delta} H_i(X; T),$$

d'où l'injectivité de ∂ est conséquence du lemme suivant:

(2.3) LEMME. *Soit* $X = K(\pi, 1)$, N *un* π*-module à gauche et* L *un* π*-module libre. Alors* $H_j(X; L \otimes N) = 0$ *pour* $j > 0$.

Démonstration. Grâce à l'isomorphisme

$$H^j(X; (L_1 \oplus L_2) \otimes N) = H_j(X; L_1 \otimes N) \oplus H_j(X; L_2 \otimes N),$$

il suffit de démontrer (2.3) pour $L = \mathbf{Z}\pi$. Rappelons que

$$P \otimes_\pi Q = H_0(X; P \otimes Q)$$

(voir [Br, p. 55]). On a alors:

$$\begin{aligned}(\mathbf{Z}\pi \otimes N) \otimes_\pi C_j(\tilde{X}) &= H_0(X; (\mathbf{Z}\pi \otimes N) \otimes C_j(\tilde{X})) = \\ &= H_0(X; \mathbf{Z}\pi \otimes (N \otimes C_j(\tilde{X}))) = \mathbf{Z}\pi \otimes_\pi (N \otimes C_j(\tilde{X})) = \\ &= N \otimes C_j(\tilde{X}).\end{aligned}$$

On en déduit que $H_j(X; \mathbf{Z}\pi \otimes N) = H_j(\tilde{X}; N) = 0$, la dernière égalité étant due au fait que $\tilde{X}$ est contractile.

Démonstration du lemme 3. Il suffit de démontrer que $\mathscr{H}^t(i, k)$ implique $\mathscr{H}(i+1, k)$ pour $i \geqslant k$. Soient M un π-module à droite et N un π-module à gauche. Choisissons une suite exacte $0 \to K \to L \to M \to 0$ avec L un $\mathbf{Z}\pi$-module libre. Comme K est sans $\mathbf{Z}$-torsion, l'hypothèse $\mathscr{H}^t(i, k)$ et le même raisonnement que pour la démonstration du lemme 2 montrent que $\phi^{(i+1)k}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$.

3. REMARQUES, APPLICATIONS

1) La preuve du théorème (2.1) utilise abondamment le fait que l'on a affaire à l'homologie et à la cohomologie à coefficients locaux. Notre méthode ne donne donc pas de caractérisation du cap-produit pour l'homo-

logie et la cohomologie à coefficients constants. De même, et curieusement, elle ne semble pas permettre de montrer que des propriétés analogues à I-IV puissent caractériser le cup-produit. Observons qu'une telle caractérisation du cup-produit existe pour la cohomologie des groupes finis (voir [Ws, § 4.2]).

2) Nous ignorons si les propriétés I à IV impliquent que

$\phi_X^{nn}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$ sans les hypothèses restrictives sur M ou $N (n > 0)$. Observons que le cap-produit

$$H^n(X; M) \times H_n(X; N) \to H_0(X; M \otimes N)$$

est induite par l'application « évaluation »:

$$\begin{gathered}(M \otimes_\pi C_n(\tilde{X})) \times \mathrm{Hom}_\pi(C_n(\tilde{X}); N) \to M \otimes_\pi N \\ (m \otimes_\pi z, \alpha) \to m \otimes_\pi \alpha(z)\,.\end{gathered}$$

3) Supposons que la famille d'applications $\phi_X^{ik}(M, N)$ soit induite par une famille d'applications:

$$\varphi_X^{ik}(M, N): (M \otimes_\pi C_i(\tilde{X})) \times \mathrm{Hom}_\pi(C_k(\tilde{X}); N) \to (M \otimes N) \otimes_\pi C_{i-k}(\tilde{X})$$

telle que

$$\partial\varphi^{ik}(z, \alpha) = (-1)^k \varphi^{i-1,k}(\partial z, \alpha) + \varphi^{i,k+1}(z, \delta\alpha)\,(\varphi^{ik} = \varphi_X^{ik}(M, N))\,.$$

Alors, les conditions II et III du théorème (2.1) sont automatiquement vérifiées.

4) Une caractérisation axiomatique du cap-produit telle que celle présentée dans cet article peut être utile pour reconnaître cette opération exprimée dans d'autres théories homologiques (homologie simpliciale, cubique, etc.). Si $\Psi_*: \hat{H}_*(X; M) \xrightarrow{\simeq} H_*(X; M)$ et $\Psi^*: \hat{H}^*(X; N) \xrightarrow{\simeq} H^*(X; N)$ sont des isomorphismes de théories (co-)homologiques et si

$$\hat{\cap}: \hat{H}_i(X; M) \times \hat{H}^k(X; N) \to \hat{H}_{i-k}(X; M \otimes N)$$

est un cap-produit satisfaisant aux propriétés I à IV, alors $\Psi_*(z \,\hat{\cap}\, \alpha) = \Psi_*(z) \cap \Psi^*(\alpha)$ (avec les restrictions sur M du théorème (2.1)).

BIBLIOGRAPHIE

[Br] BROWN, K. *Cohomology of groups.* Springer-Verlag, 1982.

[KT] KAN, D. and W. THURSTON. Every connected space has the homology of a $K(\pi, 1)$. *Topology 15* (1976), 253-258.

[Ws] WEISS, E. *Cohomology of groups.* Academic Press, 1969.

(Reçu le 6 décembre 1983)

Jean-Claude Hausmann

Antoine Zahnd

Section de Mathématiques
Université de Genève
Case postale 240
CH-1211 Genève 24

vide-leer-empty