

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 31 (1985)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE ET PRINCIPE DE HASSE FIN
POUR CERTAINS SYSTÈMES DE FORMES
Autor: Danset, Renaud
Kapitel: D) SUR LES TRAVAUX DE DAVENPORT
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-54555>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

D) SUR LES TRAVAUX DE DAVENPORT

Il est le grand spécialiste de la méthode du cercle, il en vit toutes les subtilités ! et le travail de Birch généralise son « Cubic forms in 32 variables ».

Le but poursuivi est le

Théorème. Toute forme cubique ayant au moins N variables et à coefficients entiers représente zéro.

D'où trois articles de Davenport pour successivement $N = 32, 29$ et enfin 16.

Il faut d'abord remarquer qu'il s'agit d'une démonstration par l'absurde. En effet, la formule asymptotique que fournit la méthode du cercle est manifestement fausse pour beaucoup de formes (par exemple les formes dégénérées qui sont rationnellement équivalentes à des formes comprenant moins de variables : le terme principal est en P^{n-d} avec n , nombre de variables !). Il convient donc de les exclure ce qui peut se faire pour $d = 3$ (cette chance ne se poursuit pas pour $d > 3$) en supposant seulement que les formes étudiées ne représentent pas zéro.

S'il est possible d'appliquer la méthode du cercle, on obtiendra une évidente contradiction (une infinité de solutions entières pour des formes qui ne représentent pas zéro !) et donc le théorème recherché.

L'hypothèse (H4) ne coûte pas cher justement parce que la forme cubique $C(x)$ ne représente pas zéro (Davenport « 32 variables », lemme 6.1).

L'hypothèse (H3) est connue de Davenport qui rappelle, dans le paragraphe 2 de son « 32 variables », sa démonstration de l'existence pour toute forme cubique ayant au moins 10 variables, d'une solution non singulière dans \mathbf{Q}_p , pour tout p . (Ce résultat a été cité au paragraphe A de l'Introduction).

Toute l'habileté réside donc dans la définition d'une bonne propriété T qui entraîne les hypothèses (H1) et (H2).

Dans « 32 variables », au lemme 4.2, Davenport propose, pour une forme cubique $C(x)$ à coefficients entiers, la propriété T_1 suivante :

« Ne pas représenter zéro et ne pas être équivalente (par $GL_n(\mathbf{Q})$) à une forme du type $a_0 u_0^3 + C_1(u_1, \dots, u_m)$, en $(m+1)$ variables u_0, u_1, \dots, u_m , où m est le plus petit entier supérieur ou égal à $n - 4\Omega$ (rappel : $\Omega = \frac{k}{\Delta}$) ».

C'est loin d'être beau, mais cela fonctionne, après de nombreux efforts que Davenport améliore dans son « 29 variables » sans toutefois modifier la propriété T_1 .

Enfin dans l'article « 16 variables », Davenport propose, au lemme 13, la propriété T_2 :

« Ne pas représenter zéro et ne pas être équivalente (par $GL_n(\mathbf{Q})$) à une forme du type $C_1(u_1, \dots, u_{n-r}) + C_2(v_1, \dots, v_r)$ pour $1 \leq r \leq n-1$ ».

Non seulement T_2 est plus simple que T_1 mais la démonstration associée simplifie nettement les précédentes. Enfin si C est rationnellement équivalente à $C_1(u_1, \dots, u_{n-r}) + C_2(v_1, \dots, v_r)$, les sommes $S(\alpha)$ construites sur C sont le produit des mêmes sommes construites sur C_1 et C_2 et on obtient un raisonnement rapide par itération qui conduit au pire sur les formes diagonales connues depuis longtemps: un bien joli travail de précision!

Malheureusement aucune généralisation pour $d \geq 4$ ne paraît possible (dixit Davenport).

Enfin Davenport fait remarquer que pour démontrer le cas $N = 17$, sa démonstration est encore plus simple et qu'il suffit de la propriété T_3 :

« Ne pas représenter zéro »

(cf. Davenport, « Analytic Methods... », Lemme 36).

E) SUR LES TRAVAUX DE W. M. SCHMIDT

Dans son article « Simultaneous rational zeros of quadratic forms », W. M. Schmidt considère le système $f = 0$ pour r formes quadratiques à coefficients entiers.

Soit $\mathbf{Q}(f) = \{\mu_1 f_1 + \dots + \mu_r f_r \mid (\mu_1, \dots, \mu_r) \in \mathbf{Q}^r - \{0\}\}$
le pinceau rationnel engendré par f .

Soit $\mathbf{C}(f) = \{\mu_1 f_1 + \dots + \mu_r f_r \mid (\mu_1, \dots, \mu_r) \in \mathbf{C}^r - \{0\}\}$
le pinceau complexe engendré par f .

Dans son lemme 6, pour obtenir les hypothèses (H1) et (H2), Schmidt propose la propriété T_1 :

« Pour tout $g \in \mathbf{Q}(f)$, on a $\text{rang } g > 2r^2 + 3r$ ».

Il consacre à l'hypothèse (H3) son paragraphe 5 où il utilise les théorèmes 2 et 6 de son article « Simultaneous p -adic zeros of quadratic forms ». Il parvient ainsi à la propriété T_2 :

« Pour tout $g \in \mathbf{Q}(f)$, on a $\text{rang } g > 4r^3 + r^2$ »

qui implique donc les hypothèses (H3), (H2) et (H1).

Enfin il montre que la propriété T_3 :

« Pour tout $g \in \mathbf{C}(f)$, on a $\text{rang } g > 4r^2 + 4r$ »

implique la propriété T_2 . Il en déduit son principal résultat:

$\{(H_4) \text{ et } T_3\} \Rightarrow \{\text{le système } f \text{ représente zéro}\}$.