

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	31 (1985)
<b>Heft:</b>	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE ET PRINCIPE DE HASSE FIN POUR CERTAINS SYSTÈMES DE FORMES
<b>Autor:</b>	Danset, Renaud
<b>Kapitel:</b>	C) Adèles
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-54555">https://doi.org/10.5169/seals-54555</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## C) ADÈLES

Pour toutes les relations, définitions et propriétés des adèles utilisées ci-après, une référence est Godement (Adèles et idèles, cf. bibliographie).

Soit  $\mathbf{A}$  l'ensemble des adèles sur  $\mathbf{Q}$ .

Soit  $\psi$  le caractère de Tate.

Soit  $\varphi$  une fonction de Schwarz-Bruhat sur  $\mathbf{A}^n$ , telle que

1)  $\varphi$  est décomposable (i.e.:  $\varphi(x) = \varphi_\infty(x_\infty) \prod_p \varphi_p(x_p)$ )

2) Pour tout  $p$  premier, on a

$$\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$$

(on note  $1_E$  la fonction caractéristique d'un ensemble  $E$ ),

3)  $\varphi_\infty = \theta * 1_{P\mathcal{B}}$  (produit de convolution)

avec  $\theta$  fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}^n$ , à support compact inclus dans un voisinage de 0 et, en pratique, aussi petit qu'il sera nécessaire mais fixé et donc indépendant de la variable  $P$ .

*Remarque.* Il s'agit là d'une différence notable avec le travail de Birch (« forms in many variables » cf. bibliographie) qui utilise la fonction  $1_{P\mathcal{B}}$ , caractéristique de la boîte  $P\mathcal{B}$ , discontinue au bord de celle-ci. En définissant  $\varphi_\infty$  comme ci-dessus on obtient d'abord une fonction de Schwarz-Bruhat ce qui permet l'usage d'une formule de Poisson au paragraphe 1. En revanche, on complique légèrement le paragraphe 3 (cf. la remarque importante qui suit la démonstration du Lemme 3-2).

Soit  $\xi \in \mathbf{A}^r$ , on définit la somme

$$H(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{Q}^n} \varphi(x) \psi(\langle \xi, f(x) \rangle)$$

avec  $\langle \xi, f(x) \rangle = \sum_{i=1}^r \xi_i f_i(x)$ .

Cette somme  $H(\xi)$  est absolument convergente et constante sur les classes modulo  $\mathbf{Q}^r$ , essentiellement parce que le caractère de Tate est trivial sur  $\mathbf{Q}$ .

Ainsi, pour tout  $v \in \mathbf{Z}^r$ , l'application  $\xi \mapsto H(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle)$  définit une fonction sur  $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$  et on a l'égalité

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle) d\xi = \sum_{x \in \mathbf{Q}^n} \varphi(x) \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} \psi(\langle \xi, f(x) - v \rangle) d\xi.$$

Si  $f(x) \neq v$ , le caractère  $\xi \mapsto \psi(\langle \xi, f(x) - v \rangle)$  n'est pas trivial sur le groupe  $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$  et son intégrale est nulle.

Si  $f(x) = v$ , ce caractère est trivial et comme  $\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} d\xi = 1$ , puisque les mesures de Haar sur  $\mathbf{A}^r$  et  $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$  sont choisies pour qu'il en soit ainsi ! On obtient l'importante égalité

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle) d\xi = \sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^n \\ f(x) = v}} \varphi_\infty(x)$$

(la somme  $\sum$  du second membre ne porte que sur les  $x \in \mathbf{Z}^n$  car  $\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$  pour tout  $p$ , de plus cette somme représente à peu près le nombre de solutions entières du système  $f = v$ , présentes dans la boîte  $P\mathcal{B} \subset \mathbf{R}^n$ ).

On cherche principalement, dans le présent travail, à comparer la somme  $H(\xi)$  avec l'intégrale de même forme, appelée transformée de Gauss globale (en fait associée au système  $f$ , au caractère  $\psi$  et à la fonction  $\varphi$ )

$$F^*(\xi) = \int_{\mathbf{A}^r} \varphi(x) \psi(\langle \xi, f(x) \rangle) dx.$$

On veut obtenir la formule asymptotique suivante : il existe  $\delta > 0$ , tel que

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle) d\xi = \int_{\mathbf{A}^r} F^*(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle) d\xi + O(P^{n-rd-\delta})$$

*Remarque.* L'intégrale portant sur  $F^*$  est la seule raisonnable car cette fonction n'est pas en général constante sur les classes modulo  $\mathbf{Q}$ . De plus cette intégrale n'est autre, selon les notations d'Igusa (cf. bibliographie) que  $\widehat{F^*(-v)} = F(v)$  appelée série singulière globale (cf. le paragraphe 5F). Le chapeau  $\widehat{\phantom{x}}$  désigne la transformée de Fourier associée au caractère de Tate (cf. Godement...).

#### D) MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE

Soit  $\xi \in \mathbf{A}^r$ ; on utilisera désormais les notations suivantes

$$|\xi_\infty| = \max_{1 \leq i \leq r} |\xi_{i,\infty}| \quad \text{et, pour tout } p, \quad |\xi_p|_p = \max_{1 \leq i \leq r} |\xi_{i,p}|_p;$$

on définit aussi la fonction

$$Q(\xi) = \prod_p \max(1, |\xi_p|_p)$$