Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 31 (1985)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION AUX TRAVAUX DE J. ECALLE
Autor: Malgrange, Bernard
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54569

L'Enseignement Mathématique, t. 31 (1985), p. 261-282

INTRODUCTION AUX TRAVAUX DE J. ECALLE

par Bernard MALGRANGE

Cet exposé est la rédaction de conférences faites à l'I.H.E.S. en novembre 1982 et à Strasbourg en mai 1983.

Il résume sans démonstrations les principes de la théorie de J. Ecalle des « fonctions résurgentes », et leur application au groupe des germes d'automorphismes de $(\mathbf{C}, 0)$ tangents à l'identité. Pour les démonstrations et des détails complémentaires, je renvoie à [E 1] et [E 2]. D'autres applications se trouveront dans le travail [E 3] et les suivants...

CHAPITRE I. — FONCTIONS RÉSURGENTES

(I.1) CONVENTIONS RELATIVES À LA MONODROMIE LOCALE

Pour $r > 0$, on note $D(r)$ le disque $\{|x|<r\} \subset \mathbf{C}$, et l'on pose $D(r)^* = D(r) - \{0\}$. On choisit un point base $a \in D(r)^*$, et l'on note $(\tilde{D}(r)^*, a)$ le revêtement universel de $D(r)^*$ de point-base a (= les classes d'homotopies de chemins de $D(r)^*$ d'origine a). Soit $\mathcal{O}(r)$ (resp. $\tilde{\mathcal{O}}(r)$) l'espace des fonctions holomorphes sur $D(r)$ (resp. $(\tilde{D}(r)^*, a)$); on fait dans la suite les conventions usuelles suivantes:

i) Soit $\mathcal{O}_a$ l'espace des germes de fonctions holomorphes en a; l'application $f \mapsto f_a \in \mathcal{O}_a$ de « restriction au voisinage de a » identifie $\mathcal{O}(r)$ (resp. $\tilde{\mathcal{O}}(r)$) au sous-espace de $\mathcal{O}_a$ formé des germes qui se prolongent à $D(r)$ (resp. $(\tilde{D}(r)^*, a)$). En particulier, on a ainsi une injection naturelle $\mathcal{O}(r) \to \tilde{\mathcal{O}}(r)$; elle se décrit aussi comme l'image réciproque de la projection $(\tilde{D}(r)^*, a) \to D(r)$.

ii) Soit b un autre point de $D(r)^*$, et γ un chemin de $D(r)^*$ d'origine a et d'extrémité b; la donnée de γ établit un isomorphisme entre $(\tilde{D}(r)^*, a)$

et $(\tilde{D}(r)^*, b)$; l'isomorphisme correspondant de $\tilde{\mathcal{O}}(r)$ et de l'espace des fonctions holomorphes sur $(D(r)^*, b)$ se lit dans la description i) par le prolongement analytique le long de γ du germe f_a.

En particulier l'automorphisme de monodromie $T: \tilde{\mathcal{O}}(r) \to \tilde{\mathcal{O}}(r)$ est l'isomorphisme obtenu en prenant $b = a$, et γ un lacet d'origine a entourant une fois l'origine dans le sens direct.

iii) Si l'on remplace r par $r' < r$ et si $|a| < r'$, on a un plongement canonique évident $\tilde{\mathcal{O}}(r) \to \tilde{\mathcal{O}}(r')$; si $|a| > r'$, on se ramène au cas précédent en déplaçant le point-base le long du rayon $[a, 0[$.

(I.2) Microfonctions

La construction qu'on va faire ici, et qui est appelée « germe qualifié » par Ecalle, est un cas particulier de la notion de microfonction holomorphe de Sato [S.K.K.]; un autre aspect de la même construction se trouve chez Deligne [D], à propos de la théorie des cycles évanescents.

Posons $\tilde{\mathscr{C}}(r) = \tilde{\mathcal{O}}(r)/\mathcal{O}(r)$, l'injection $\mathcal{O}(r) \to \tilde{\mathcal{O}}(r)$ étant celle définie au numéro précédent. On a deux flèches $\tilde{\mathcal{O}}(r) \overset{\text{can}}{\to} \tilde{\mathscr{C}}(r) \overset{\text{var}}{\to} \tilde{\mathcal{O}}(r)$ (notations de Deligne) qui sont définies ainsi:

- « can » est la projection canonique $\tilde{\mathcal{O}}(r) \to \tilde{\mathscr{C}}(r)$;
- « var » est l'unique flèche qui rende le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{O}}(r) \arrow[rr, "T - id"] \arrow[dr, "\text{can}"'] & & \tilde{\mathcal{O}}(r) \\ & \tilde{\mathscr{C}}(r) \arrow[ur, "\text{var}"'] & \end{tikzcd}$$

Cette flèche (« la variation ») est bien définie parce que T agit trivialement sur $\mathcal{O}(r)$.

Dans la suite, on abrègera souvent les notations en écrivant « u » (resp. « v ») au lieu de « can » (resp. « var »). Si l'on note encore T l'action de la monodromie sur $\tilde{\mathscr{C}}(r)$, définie par passage au quotient à partir de $T \mid \tilde{\mathcal{O}}(r)$, il est clair qu'on a $T \mid \tilde{\mathcal{O}}(r) = v \circ u + id$ et $T \mid \tilde{\mathscr{C}}(r) = u \circ v + id$.

Il pourra aussi être commode de ne pas fixer r et de se placer dans les germes en 0, en suivant les conventions de (1.iii); on posera pour

$$r \to 0: \quad \mathcal{O}(=\mathcal{O}_0) = \varinjlim \mathcal{O}, \quad \tilde{\mathcal{O}} = \varinjlim \tilde{\mathcal{O}}(r), \quad \tilde{\mathscr{C}} = \varinjlim \tilde{\mathscr{C}}(r).$$

(Chez Ecalle, l'espace $\mathscr{C}$ est noté $\mathscr{A}$).

Pour comprendre la signification de l'espace $\tilde{\mathscr{C}}$, l'interprétation suivante est commode, quoiqu'elle ne soit pas indispensable. Supposons qu'on ait choisi un point base $a > 0$; alors, la donnée de $f \in \tilde{\mathcal{O}}(r)$ définit une fonction holomorphe g dans le disque coupé $D(r) - \mathbf{R}_+$, à savoir celle qui coïncide avec f dans l'intersection d'un voisinage de a avec le demi-espace $\operatorname{Im} x > 0$; à $u(f)$ correspond la classe de g modulo $\mathcal{O}(r)$; autrement dit, en notant $g_\pm$ les restrictions de g à $D(r) \cap \{\operatorname{Im} x \gtrless 0\}$, à $u(f)$ correspond l'hyperfonction $[g]$ sur $]-r, r[$ à support dans $[0, r[$ définie par la paire (g_+, g_-). Dans cette représentation, l'application canonique se lit comme la flèche $g \mapsto [g]$. Quant à la variation, elle s'interprète de la manière suivante: sur $\mathbf{R}_+ - \{0\}$, $[g]$ « est » une fonction analytique, donnée par la différence des valeurs de g au-dessous et au-dessus de $\mathbf{R}$ (je prends ici la convention opposée à la convention usuelle); par exemple au voisinage de a, on a $[g]_a = (Tf)_a - f_a$, donc $[g]_a$ est égal à la variation de $u(f)$. La variation s'interprète donc ici comme la *restriction de* $[g]$ *à* $\mathbf{R}_+ - \{0\}$, ou si l'on veut, « l'oubli de 0 ».

On va examiner maintenant les opérations de base sur $\tilde{\mathscr{C}}$: convolution, transformation de Fourier (Laplace, Borel); ce seront des cas particuliers des notions analogues pour les hyperfonctions ou les distributions à support sur $\mathbf{R}_+$.

(I.3) Convolution

Pour simplifier, je prends le point base sur $\mathbf{R}_+ - \{0\}$; on s'y ramène, soit par rotation des coordonnées, soit comme en (I.1). Soient $f, g \in \tilde{\mathscr{C}}$, et soient $\tilde{f}$ et $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{O}}(r)$, pour $r > 0$ convenable, tels que le germe de $u(\tilde{f})$ (resp. $u(\tilde{g})$) en 0 soit égal à f (resp. g); soient a, ε avec $0 < \varepsilon < a < r$, et soit $\gamma_{a,\varepsilon}$ le chemin composé de $[a+i0, \varepsilon+i0]$, du cercle de rayon ε autour de 0, parcouru dans le sens direct, et de $[\varepsilon-i0, a-i0]$. Pour $x \notin \mathbf{R}_+$, x voisin de 0, l'intégrale $\tilde{h}(x) = \int_{\gamma_{a,\varepsilon}} \tilde{f}(x-y)\tilde{g}(y)dy$ est bien définie et indépendante de ε si ε est assez petit; ceci donne une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+$ au voisinage de 0, dont on vérifie facilement qu'elle se prolonge en un élément de $\tilde{\mathcal{O}}$; on voit aussi facilement que si l'on change a et les représentants $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$, on modifie $\tilde{h}$ par une fonction holomorphe en 0; donc finalement $u(\tilde{h})$ ne dépend que de f et g. On pose par définition

$u(\tilde{h}) = f * g$, et l'on appelle cette opération la convolution sur $\tilde{\mathscr{C}}$; ses propriétés sont les propriétés usuelles:

i) elle est associative et commutative;

ii) elle admet pour élément unité, la (micro) fonction

$$\delta \underset{\text{déf}}{=} \operatorname{can}\left(\frac{1}{2\pi i x}\right)$$

(ceci se voit immédiatement par la formule de Cauchy);

iii) on a: $\frac{d}{dx}(f*g) = \frac{df}{dx} * g = f * \frac{dg}{dx}$; en particulier, on a:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d\delta}{dx} * f;$$

iv) sur $\mathscr{C}$, $\frac{d}{dx}$ est inversible (évident, car deux primitives dans $\tilde{\mathcal{O}}$ diffèrent par une constante !); l'inverse de $\frac{d}{dx}$ est donc la convolution par $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}\delta = \operatorname{can}\left(\frac{\log x}{2\pi i}\right)$; peu importe la détermination de $\log x$ choisie ici, car deux déterminations diffèrent par une constante. Suivant l'usage, on notera Y cette microfonction (« microfonction d'Heaviside »);

v) la multiplication par x est une $*$-dérivation, i.e. on a
$x(f*g) = (xf)*g + f*(xg)$.

Dans la suite, il sera commode de poser $\partial f = -xf$ (cf. théorème (I.4.5)).

Remarque (I.3.1.). De même que les distributions, ou les hyperfonctions, les éléments de $\tilde{\mathscr{C}}$ ne se multiplient pas entre eux; la seule multiplication définie va de $\mathcal{O} \times \tilde{\mathscr{C}}$ dans $\tilde{\mathscr{C}}$, et s'obtient par passage au quotient à partir de la multiplication usuelle $\mathcal{O} \times \tilde{\mathcal{O}} \to \tilde{\mathcal{O}}$. En particulier, on a la formule usuelle $Y^{*n} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}Y$.

Remarque (I.3.2). On peut voir que $f * g$ ne dépend pas du point base choisi, avec les conventions de changement de point-base faites au n° 1. Ceci nous servira par la suite.

(I.4) TRANSFORMATIONS DE LAPLACE ET BOREL

Il est possible de définir en général la transformée de Laplace d'un élément de $\mathscr{C}$; on n'utilisera ici qu'un cas particulier. Il sera commode de prendre le point-base $a \in \mathbf{R}_+ - \{0\}$ et de prendre la détermination de $\log x$ donnée par $\arg a = 0$. J'examinerai seulement le cas des « microfonctions de classe de Nilsson », c'est-à-dire celle qui proviennent d'un $\check{f} \in \tilde{\mathcal{O}}$ somme finie de fonctions de la forme $x^\alpha (\log x)^p g(x)$, $\alpha \in \mathbf{C}$, p entier $\geqslant 0$, g holomorphe en 0 [1]). En considérant le même chemin $\gamma_{a,\varepsilon}$ qu'au n° précédent, on regarde l'intégrale $\int_{\gamma_{a,\varepsilon}} \check{f}(x) e^{-x\xi} dx$; son développement asymptotique à l'infini, au voisinage de $\mathbf{R}_+$, modulo fonctions à décroissances rapides, ne dépend que de $f = u(\check{f})$, et pas de $\check{f}$, a, et ε; on appellera ce développement « transformée de Laplace de f ». Ceci conduit aux formules suivantes, essentiellement classiques.

i) Supposons d'abord $\alpha \notin \mathbf{Z}$.

On a d'abord $\mathscr{L}(\operatorname{can} x^\alpha) \sim \int_{\gamma_{a,\varepsilon}} x^\alpha e^{-x\xi} dx \sim (e^{2\pi i\alpha} - 1) \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\xi^{\alpha+1}}$, (avec $\arg \xi = 0$, $\xi \to \infty$ en restant sur $\mathbf{R}_+$).

Il est plus commode d'écrire ceci autrement, en posant

$$\operatorname{Pf}(x^\alpha) = \operatorname{can}\big((e^{2\pi i\alpha} - 1)^{-1} x^\alpha\big);$$

c'est une microfonction dont la variation vaut x^α; pour $\operatorname{Re} \alpha > -1$, c'est la distribution définie par la fonction intégrable qui vaut x^α si $x > 0$ et 0 si $x < 0$; alors, on a:

$$\mathscr{L}\operatorname{Pf} x^\alpha \sim \Gamma(\alpha+1)/\xi^{\alpha+1} \tag{I.4.1}$$

(On se permettra dans la suite d'écrire $=$ pour $\sim$).

Plus généralement, étant donné p, il existe une et une seule fonction $\check{f}(x) = \sum_0^p \lambda_k x^\alpha (\log x)^k$ vérifiant $(T - \mathrm{id})\check{f} = x^\alpha (\log x)^p$; on posera

$$\operatorname{Pf} x^\alpha (\log x)^p = u(\check{f})$$

(une autre manière de faire consisterait à traiter d'abord le cas $\operatorname{Re} \alpha > -1$ par les distributions, comme ci-dessus, et à faire le prolongement analytique en α de la formule obtenue). On aura alors

---

[1]) Cela suffira pour l'application qu'on a en vue ici; d'autres applications de la théorie d'Ecalle exigent de regarder un cas un peu plus général; voir ses travaux.

$$v(\mathrm{Pf} x^\alpha (\log x)^p) = x^\alpha (\log x)^p ,$$

et

$$\text{(I.4.2)} \qquad \mathscr{L}\mathrm{Pf}\, x^\alpha (\log x)^p = \frac{d^p}{d\alpha^p} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\xi^{\alpha+1}} = \sum_0^p C_{k,\alpha} \frac{(\log \xi)^k}{\xi^{\alpha+1}} ,$$

avec des $C_{k,\alpha}$ convenables.

Finalement, pour $\tilde{f} = \sum_{\substack{n \geqslant 0 \\ 0 \leqslant k \leqslant p}} a_{n,k} x^{\alpha+n} (\log x)^k$ et $f = u(\tilde{f})$, on écrit $f = \mathrm{Pf}(\Sigma b_{n,p} x^{\alpha+n} (\log x)^k)$, la somme figurant au 2^e^ membre étant égale à $(T-1)\tilde{f}$; le développement asymptotique $\mathscr{L} f$ est la série *formelle*

$$\Sigma b_{n,k} \mathscr{L}\mathrm{Pf} x^{\alpha+n} (\log x)^k ,$$

qui s'écrit

$$\Sigma d_{n,k} \frac{(\log \xi)^k}{\xi^{\alpha+n+1}} ,$$

avec des $d_{n,k}$ convenables.

Cette série n'est pas convergente en général : il est classique qu'on obtient ainsi exactement les séries qui « convergent au sens de Gevrey », i.e. qui sont telles que, pour $k = 0, ..., p$, les séries $\Sigma \dfrac{d_{n,k}}{n!} T^n$ convergent au voisinage de 0. Je laisse le lecteur examiner cette question, et aussi les formules relatives à la transformée de Laplace inverse, ou transformée de Borel.

ii) Pour $\alpha \in \mathbf{Z}$, il faut opérer de façon un peu différente.

Tout d'abord, pour $\alpha \geqslant 0$, il n'y a aucune ambiguïté : on définit $\mathrm{Pf}\, x^n (\log x)^p$ $(n \geqslant 0)$ comme la distribution définie par la fonction intégrable $x^n (\log x)^p$ pour $x > 0$, 0 pour $x < 0$. En particulier, $\mathrm{Pf}\, x^n = x^n Y$; on a

$$\text{(I.4.3)} \qquad \mathscr{L}\, \mathrm{Pf}\, x^n = \frac{n!}{\xi^{n+1}} ; \qquad \mathscr{L}\, \mathrm{Pf}\, x^n (\log x)^p = \frac{d^p}{d\alpha^p} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\xi^{\alpha+1}} \bigg|_{\alpha=n} .$$

Si maintenant, on a $f = u(x^n (\log x)^p)$, avec $n < 0$, je ne sais pas quelle est la manière la plus simple d'écrire les formules ; on peut par exemple faire ainsi ; on écrit :

$$\mathscr{L} f = \mathscr{L} u(x^\alpha (\log x)^p) \bigg|_{\alpha=n} = \frac{d^p}{d\alpha^p} \mathscr{L} u(x^\alpha) \bigg|_{\alpha=n} = \frac{d^p}{d\alpha^p} \frac{(e^{2\pi i\alpha}-1)\Gamma(\alpha+1)}{\xi^{\alpha+1}} \bigg|_{\alpha=n}$$
$$= - \frac{d^p}{d\alpha^p} \frac{2\pi i e^{\pi i \alpha}}{\Gamma(-\alpha)\xi^{\alpha+1}} \bigg|_{\alpha=n} .$$

On n'aura vraiment besoin que du cas particulier $f = \delta^{(n)} \left(= \dfrac{d^n}{dx^n} \delta \right)$, auquel cas, on a, bien sûr

$$\mathscr{L}\delta^{(n)} = \xi^n . \tag{I.4.4.}$$

La propriété fondamentale de la transformation de Laplace est donnée par le théorème classique suivant (qui s'étend, moyennant une définition convenable, à $\tilde{\mathscr{C}}$ tout entier).

THÉORÈME (I.4.5). *Pour* $f, g \in \tilde{\mathscr{C}}$, *de classe de Nilsson, on a*

$$\mathscr{L}(f*g) = \mathscr{L}f \cdot \mathscr{L}g \,; \qquad \mathscr{L}(xf) = -\frac{d}{d\xi}(\mathscr{L}f)$$

d'où

$$\mathscr{L}(\partial f) = \frac{d}{d\xi}\mathscr{L}f \,; \qquad \mathscr{L}\left(\frac{df}{dx}\right) = \xi(\mathscr{L}f) .$$

(I.5) HYPERFONCTIONS D'ECALLE (OU FONCTIONS RÉSURGENTES)

Après ces préliminaires, venons-en au sujet proprement dit. Soit Ω un sous-groupe discret de $\mathbf{C}$; choisissons r tel que $D(r) \cap \Omega = \{0\}$, et choisissons un point $a \in D^*(r)$. Soit $(\widetilde{\mathbf{C}-\Omega}, a)$ le revêtement universel de $\mathbf{C} - \Omega$ de point base a; on a une application canonique $(\tilde{D}^*(r), a) \xrightarrow{i} (\widetilde{\mathbf{C}-\Omega}, a)$, obtenue en considérant les chemins de $D^*(r)$ d'origine a comme des chemins de $\mathbf{C} - \Omega$, ce qui donne un sens à la définition suivante.

DÉFINITION (I.5.1). *On appelle* $\tilde{\mathscr{O}}(\Omega)$ *l'espace des fonctions holomorphes sur* $(\widetilde{\mathbf{C}-\Omega}, a)$ *et on appelle* $\tilde{\mathscr{C}}(\Omega)$ *le sous-espace de* $\tilde{\mathscr{C}}(r)$ *formé des* f *tels que* var f *se prolonge en un élément de* $\tilde{\mathscr{O}}(\Omega)$.

Remarques.

i) On peut voir que cette définition équivaut à la suivante: $f \in \tilde{\mathscr{C}}(r)$ appartient à $\tilde{\mathscr{C}}(\Omega)$ s'il existe $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{O}}(\Omega)$ tel qu'on ait can $\tilde{f} = f$.

ii) Il sera commode, pour $f \in \tilde{\mathscr{O}}(\Omega)$, de faire la convention suivante: on appellera « détermination principale » de f la fonction $i^*f \in \tilde{\mathscr{O}}(r)$.

Il est visible que les définitions précédentes ne dépendent pas de r, supposé assez petit, moyennant le changement de point-base expliqué en (1,iii).

Le premier résultat de la théorie est alors le suivant.

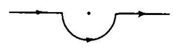
THÉORÈME (I.5.1). *$\tilde{\mathscr{C}}(\Omega)$ est une sous-algèbre de convolution de $\tilde{\mathscr{C}}$.*

Pour la démonstration, je renvoie à (E 1), p. 70. L'idée est, en gros, d'effectuer le prolongement analytique de $f * g$ par des intégrations sur des chemins de $\mathbf{C} - \Omega$ symétriques par rapport à leur milieu, et des homotopies convenables dans cette famille de chemins.

Pour énoncer les théorèmes suivants, je me bornerai au cas où $\Omega = \mathbf{Z}$; on passerait de là au cas d'un sous-groupe quelconque en appliquant les résultats aux sous-demi-groupes $\mathbf{N}\omega$, $\omega \in \Omega$.

Supposons donc qu'on ait $\Omega = \mathbf{Z}$; et supposons le point-base a choisi dans $]0, r[$; si ce n'est pas le cas, on s'y ramène par (1,iii): *faire attention que les définitions qui vont suivre dépendent du chemin γ choisi pour s'y ramener* (voir le n° 6 à ce propos).

Soit $n > 0$. On note γ_n un chemin de $\mathbf{C} - \mathbf{Z}$ d'origine a, et d'extrémité $n + a$ fabriqué ainsi: on part du chemin rectiligne $[a, n+a]$ et on le remplace au voisinage de $b = (1, \ldots, n)$ par un petit demi-cercle

« au-dessus »  ou « au-dessous » 

pour $b = 1, \ldots, n-1$, toujours « au-dessus » pour $b = n$ (à homotopie près, il y a donc 2^{n-1} tels chemins).

Soit p (resp. $q = n-1-p$) le nombre de points $b \in \{1, \ldots, n-1\}$ contournés par-dessus (resp. par-dessous); on pose

$$\varepsilon(\gamma_n) = \frac{p!\,q!}{n!}. \tag{I.5.3}$$

DÉFINITION (I.5.4). *Soit $f \in \tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$, et γ_n un chemin du type précédent. On note $\Delta_{\gamma_n} f$ l'élément de $\tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$ obtenu de la manière suivante: on considère le germe* $\operatorname{var} f \in \mathcal{O}_a$; *soit $g \in \mathcal{O}_{n+a}$ le germe obtenu par prolongement analytique de* $\operatorname{var} f$ *le long de γ_n, et soit $h \in \mathcal{O}_a$ le germe $g \circ \tau$, τ la translation $x \mapsto (x+a)$; il est visible qu'on a $h \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbf{Z})$; alors, on pose* $\Delta_{\gamma_n} f = \operatorname{can} h$.

Soit en particulier γ_n^+ le chemin obtenu en contournant tous les points $(1, \ldots n)$ « par-dessus »; on pose $\Delta_n^+ = \Delta_{\gamma_n^+}$. On considère alors la série formelle de l'indéterminée t,

$$\Delta^+[[t]] = \mathrm{id} + \sum_{n \geq 1} \Delta_n^+ t^n$$

qui est une application $\tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z}) \to \tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})[[t]]$; on munit $\tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$ du produit de convolution (théorème 5.2) et $\tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})[[t]]$ du produit habituel des anneaux de séries formelles: $(\Sigma f_p t^p) * (\Sigma g_q t^q) = \Sigma f_p * g_q t^{p+q}$. Le résultat est alors le suivant.

THÉORÈME (I.5.5). $\Delta^+[[t]]$ *est un homomorphisme d'algèbres.*

On trouvera une démonstration de ce résultat dans [E 1], p. 80; elle est fondée sur un argument de déformation de contours. Voici une esquisse d'une autre démonstration, qui m'a été suggérée par A. Voros.

Pour $f \in \tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$, désignons par f_+ l'hyperfonction sur $\mathbf{R}$ à support $[0, +\infty[$ définie ainsi: on prend au voisinage de 0 l'hyperfonction $[f]$ définie au n° 2 à partir de f; on la prolonge par 0 à gauche de 0; à droite de 0, on la prolonge par la « valeur au bord » du prolongement analytique de var f dans le demi-plan $\operatorname{Im} x > 0$; on définit f_- de la même manière à partir du demi-plan $\operatorname{Im} x < 0$.

Je laisse le lecteur vérifier que, pour $f, g \in \tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$, on a $(f*g)_+ = f_+ * g_+$ (le premier produit est pris dans $\tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$, le second dans les hyperfonctions à support borné à gauche).

Posons d'autre part, $f_{0,-} = f_-$; et, pour $n \geqslant 1$, soit $f_{n,-}$ l'hyperfonction $(\Delta_n^+ f)$ translatée de n vers la droite. On a visiblement $f_+ = \sum_{n \geqslant 0} f_{n,-}$, d'où $(f*g)_+ = \sum_{p,q} (f_{p,-} * g_{q,-})$. Mais $f_{p,-} * g_{q,-}$ est le translaté par $p + q$ de $\Delta_p^+ f_- * \Delta_q^+ g_- = (\Delta_p^+ f * \Delta_q^+ g)_-$. On a donc une décomposition $(f*g)_+ = \sum_{p+q=n} h_{n,-}$ avec $h_{n,-} = \sum_{p+q=n} (\Delta_p^+ f * \Delta_q^+ g)_-$ (translaté de n). Si alors on définit $(f*g)_{n,-}$ à partir de $(f*g)$ comme on l'a fait ci-dessus pour $f_{n,-}$ à partir de f, on trouve l'égalité $\Sigma(f*g)_{n,-} = \Sigma h_{n,-}$.

Montrons, par récurrence sur n, que ceci entraîne $(f*g)_{n,-} = h_{n,-}$, ce qui équivaut au théorème annoncé; au voisinage de 0, seul le 1[er] terme des deux séries est $\neq 0$, d'où $(f*g)_{0,-} = h_{0,-}$; à droite de 0, les deux membres sont valeurs au bord de leur prolongement du côté $\operatorname{Im} x < 0$; comme ils coïncident près de 0, ils coïncident partout, donc on a partout $(f*g)_{0,-} = h_{0,-}$, et $\sum_{n \geqslant 1} (f*g)_{n,-} = \sum_{n \geqslant 1} h_{n,-}$; on recommence alors le raisonnement avec $n = 1$ et ainsi de suite.

(I.6) CALCUL DIFFÉRENTIEL ÉTRANGER

Pour $n > 0$, définissons les opérateurs Δ_n sur $\tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$ par l'identité de séries formelles (non commutatives, peu importe).

(I.6.1) $$\log(\mathrm{id}+\sum_{n\geq 1}\Delta_n^+ t^n) = \sum_{n\geq 1}\Delta_n t^n .$$

On a le résultat suivant.

THÉORÈME (I.6.2).

1) *Les* Δ_n *sont des dérivations de* $\tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$.

2) *On a* $\Delta_n = \sum_{\gamma_n} \varepsilon(\gamma_n)\Delta_{\gamma_n}$.

La première assertion résulte formellement du théorème (5.5). Pour la seconde, voir (E 1), p. 80.

On obtient donc ainsi toute une famille de dérivations, dites « dérivations étrangères » de l'algèbre $\tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$, à savoir celles qui sont données par un $n > 0$ et le choix du point-base, et de même du côté négatif: plus précisément, soit $\tilde{\mathbf{C}}^*$ un revêtement universel de $\mathbf{C}^*$, et π la projection $\tilde{\mathbf{C}}^* \to \mathbf{C}^*$: on aura une dérivation étrangère attachée à chaque point de $\pi^{-1}(\mathbf{Z}-\{0\})$.

Ces dérivations forment une algèbre de Lie libre, de dimension infinie (elles « n'ont pas de relations entre elles »).

Pour écrire les formules qui suivent, je reprends les notations un peu ambiguës du n° 5, qui sous-entendent le choix d'un point-base.

(I.6.3) Soit $f \mapsto xf$ la « dérivation interne » de $\tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$ (cf. n° 3,v); de (6.2.2) on déduit immédiatement qu'on a $\Delta_n(x^p f) = (x+n)^p \Delta_n f$, autrement dit $\Delta_n \partial^p = (\partial - n)^p \Delta_n$ (p entier ≥ 0).

Les résultats qui suivent sont les analogues dans cette théorie du théorème des fonctions composées et du théorème d'inversion locale. Pour les énoncer, il est nécessaire d'introduire une classe particulière d'hyperfonctions que je vais maintenant définir.

Reprenons d'abord les notations du n° 1; pour $r > 0$, soit $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathrm{int}}(r)$ l'espace des fonctions $g \in \mathcal{O}(r)$ qui possèdent la propriété suivante: pour tout $b \in \tilde{D}^*(r)$, l'intégrale $\int_{[0,b[} |g|\,|dx|$ est absolument convergente, et ceci uniformément lorsque b parcourt un secteur $|b| \leq r_0 < r$, $\alpha \leq \arg b \leq \beta$. Sur $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathrm{int}}(r)$, on a un relèvement canonique de l'application « var », qui peut par exemple être défini ainsi: si le point-base a est sur $\mathbf{R}_+^*$, cas auquel on peut se ramener par changement de base, on définit ce relèvement comme étant la distribution à support sur $\mathbf{R}_+$ définie par la fonction intégrable égale à g sur $\mathbf{R}_+^*$ et à zéro sur $\mathbf{R}_-$ (il est immédiat que cette distribution appartient à $\mathscr{C}(r)$). Par extension de la notation utilisée au n° 4, on notera ce relèvement Pf g, et on posera $\tilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{int}}(r) = \mathrm{Pf}\, \tilde{\mathscr{O}}_{\mathrm{int}}(r)$.

Une manière équivalente de définir Pf consiste à considérer l'intégrale de Cauchy: pour $x \in D(r) - R_+$, on pose $\mathbf{G}(x) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_0^a \frac{g(y)}{y - x}\, dy$; G se prolonge visiblement en un élément de $\tilde{\mathscr{O}}$, et l'on pose $\mathrm{Pf}\, g = \mathrm{can}\, G$.

En théorie des distributions, on a l'habitude d'identifier une fonction localement intégrable et la distribution qu'elle définit; comme cas particulier, on pourrait ici identifier $\tilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{int}}$ et $\tilde{\mathscr{O}}_{\mathrm{int}}$ (pour la clarté de l'exposé, j'éviterai de le faire); la convolution sur $\tilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{int}}$ se ramène immédiatement à la convolution des fonctions intégrables, et l'on voit facilement qu'on a

$$\tilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{int}} * \tilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{int}} \subset \tilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{int}} .$$

DÉFINITION (I.6.4). *On note* $\mathscr{C}$ *la sous-algèbre de convolution de* $\tilde{\mathscr{C}}$ *égale à* $\mathbf{C}\delta + \tilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{int}}$.

Reprenons maintenant les notations du n° 5, en nous limitant au cas $\Omega = \mathbf{Z}$ pour simplifier un peu l'exposé. Soit $f \in \tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$ et soit γ *n'importe quel* chemin de $\mathbf{C} - \mathbf{Z}$ d'origine a le point-base et d'extrémité $n + a$, $n \in \mathbf{Z}$; on définit $\Delta_\gamma f$ de manière analogue à (5.4).

DÉFINITION (I.6.5). *On note* $\mathscr{C}(\mathbf{Z})$ *l'ensemble des* $f \in \tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$ *qui possèdent les propriétés suivantes:*

i) $f \in \mathscr{C}$;

ii) *pour tout* γ, *on a* $\Delta_\gamma f \in \mathscr{C}$.

La seconde propriété signifie aussi ceci: au voisinage de $n \in \mathbf{Z}$, toute détermination de var f est de la forme $\dfrac{a}{z - n}$ + (translaté de n d'un élément de $\mathrm{can}^{-1} \tilde{\mathscr{C}}_{\mathrm{int}}$).

Remarque sur les notations. Chez Ecalle, $\tilde{\mathscr{C}}$ (resp. $\mathscr{C}$) est noté $\tilde{\mathscr{A}}$ (resp. $\mathscr{A}$); $\tilde{\mathscr{C}}(\Omega)$ (resp. $\mathscr{C}(\Omega)$) est noté $\bar{\mathbf{A}}(\Omega)$ (resp. $\mathbf{A}(\Omega)$).

Dans les énoncés qui suivent, on munit $\tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$, (ou plus généralement $\tilde{\mathscr{C}}(\Omega)$), de la topologie définie ainsi: $\tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$ est le quotient de $\tilde{\mathscr{O}}(\mathbf{Z})$ par les fonctions dont la détermination principale est holomorphe en 0 (voir remarque suivant la définition (5.1)); on munit alors $\tilde{\mathscr{O}}(\mathbf{Z})$ de la convergence uniforme sur tout compact de $\widetilde{\mathbf{C} - \mathbf{Z}}$, et $\tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$ de la topologie quotient (le sous-espace qu'on identifie à 0 est évidemment fermé).

Une manière équivalente de faire est la suivante: on choisit un $r < 1$, on munit $\tilde{\mathcal{O}}(r)$ de la convergence uniforme sur tout compact de $D(r)^*$, et $\mathscr{C}(r) = \tilde{\mathcal{O}}(r)/\mathcal{O}(r)$ de la topologie quotient; on injecte alors $\tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$ dans $(\mathscr{C}(r), \tilde{\mathcal{O}}(\mathbf{Z}))$ par l'application (id, var), et on prend la topologie induite.

On peut maintenant énoncer les résultats annoncés plus haut.

THÉORÈME (I.6.6). *Pour* $f \in \mathscr{C}(\mathbf{Z})$ *la série* $\exp_* f = \sum_{n \geq 0} f^{*n}$ *converge vers un élément de* $\mathscr{C}(\mathbf{Z})$ (on pose $f^{*0} = \delta$).

Pour la démonstration, voir (E 1) p. 84. A noter que le résultat ne s'étend pas à $\tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$.

Soient maintenant $f \in \tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$ et $g = \delta' + h$, avec $h \in \mathscr{C}(\mathbf{Z})$.

THÉORÈME (I.6.7). (« Fonctions composées »)

i) *La série* $f \circledast g = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (\partial^n f) * h^{*n}$ *converge vers un élément de* $\tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$.

ii) *Pour* g *fixé, l'application* $f \mapsto f \circledast g$ *est continue de* $\tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$ *dans* $\tilde{\mathscr{C}}(\mathbf{Z})$; *c'est un homomorphisme pour la convolution; enfin elle envoie* $\mathscr{C}(\mathbf{Z})$ *dans* $\mathscr{C}(\mathbf{Z})$.

Pour les démonstrations, voir (E 1) p. 87. Heuristiquement, et même rigoureusement dans les cas intéressants, cette opération est la transformée de Laplace inverse (ou « de Borel ») de la composition usuelle

$$\hat{f}(\xi + \hat{h}) = \Sigma \frac{\hat{f}^{(n)}(\xi)}{n!} \hat{h}^n ;$$

on lui donnera donc le nom harmonieux de *composition-convolution*.

Sous les hypothèses du théorème précédent, les formules pour les dérivations s'écrivent:

$$\partial(f \circledast g) = (\partial f \circledast g) * \partial g \tag{I.6.8}$$

$$\Delta_n(f \circledast g) = (\partial f \circledast g) * \Delta_n g + \exp_*(-nh) * \big((\Delta_n f) \circledast g\big) . \tag{I.6.9}$$

Ces formules résultent formellement de la définition de $f \circledast g$, du fait que ∂ et Δ_n sont des dérivations pour la convolution, et de (I.6.3). A remarquer que si l'on avait laissé $\Delta_n f$ « au-dessus de n », au lieu de le ramener en 0, on aurait $[\Delta_n, \partial] = 0$; alors, le facteur exponentiel disparaîtrait dans (I.6.9). Toutefois, ceci exigerait d'autres définitions que celles qu'on a prises.

Supposons maintenant qu'on ait $f = \delta' + k$, $k \in \mathscr{C}(\mathbf{Z})$; on vérifie immédiatement qu'on a $\delta' \circledast g = g$ (analogue de $\xi \circ \hat{g} = \hat{g}$), d'où $f \circledast g \in \delta' + \mathscr{C}(\mathbf{Z})$. On peut voir que l'opération $\circledast$ est associative sur $\delta' + \mathscr{C}(\mathbf{Z})$. Je ne sais pas si les éléments de $\delta' + \mathscr{C}(\mathbf{Z})$ sont tous inversibles; on a toutefois le résultat suivant ([E 1], p. 88).

THÉORÈME (I.6.10). (« Inversion locale »). *Soit* $g \in \delta' + \mathscr{C}(\mathbf{Z})$ *et supposons que la détermination principale de* $\operatorname{var} g$ *soit de monodromie finie autour de* 0 *(c'est-à-dire soit une fonction uniforme de* $x^{1/p}$, p *entier convenable). Alors* g *admet un inverse dans* $\delta' + \mathscr{C}(\mathbf{Z})$, *et cet inverse a la même propriété.*

CHAPITRE II. — AUTOMORPHISMES DE $(\mathbf{C}, 0)$ TANGENTS À L'IDENTITÉ

(II.1) GÉNÉRALITÉS

Soit G le groupe des germes d'automorphismes de $(\mathbf{C}, 0)$ tangents à l'identité; un élément de G est donc une application holomorphe

$$z \longmapsto f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots ,$$

la série f étant convergente au voisinage de 0. On se propose de déterminer les classes de conjugaison de G.

Pour cela, on regarde d'abord le même problème pour le groupe $\hat{G}$ des automorphismes formels (i.e. ici, f est une série formelle); ici la classification est facile, et bien connue: en effet, tout f s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\exp(\xi)$, $\xi = (b_2 z^2 + \dots)\dfrac{d}{dz}$; le problème revient donc à classer les champs de vecteurs formels s'annulant à un ordre $\geqslant 2$, ou encore, en remplaçant ξ par $\dfrac{1}{\xi}$, les formes méromorphes formelles à pôle d'ordre $\geqslant 2$. La classification de ces formes sous $\hat{G}$ (qui coïncide d'ailleurs avec la classification des formes méromorphes convergentes sous G) est donnée par 2 invariants:

i) le coefficient du terme le plus polaire;

ii) le résidu.

En revenant à $\hat{G}$, on voit que la classe de f est donnée par 2 invariants:

i) le premier $a_p \neq 0$;

ii) un autre invariant, fabriqué avec $a_p, \ldots, a_{2p-1}$; on peut par exemple prendre le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans $\frac{1}{f(z) - z}$.

Exemple. $f(z) = z - z^2 + z^3 +$ (n'importe quoi); alors f est formellement conjugué à $f_0 = \frac{z}{1+z}$.

Dans la suite, pour simplifier l'exposé, je travaillerai uniquement sur l'exemple de cette classe formelle; je renvoie aux articles d'Ecalle pour les modifications — inessentielles, mais un peu fastidieuses — à apporter dans le cas général.

Soient donc $f(z) = z - z^2 + z^3 + O(z^4) \in G$, et $f_0(z) = \frac{z}{1+z}$; il est commode de faire le changement de variables $\frac{1}{z} = \xi$, et de poser $g(\xi) = 1/f\left(\frac{1}{\xi}\right)$; on a alors $g_0(\xi) = \xi + 1$, $g(\xi) = \xi + 1 + \sum\limits_{n \geqslant 2} \frac{a_n}{\xi^n}$; il existe une série formelle méromorphe et une seule en $\frac{1}{\xi}$ de la forme $\varphi(\xi) = \xi + O\left(\frac{1}{\xi}\right)$ qui vérifie $\varphi \circ g = g_0 \circ \varphi (= \varphi + 1)$. Son inverse ψ est de la même forme et vérifie $g \circ \psi = \psi \circ g_0 (= \psi(\xi + 1))$. Ecalle les nomme respectivement « l'itérateur direct » et « l'itérateur inverse ».

On voit facilement ceci: soit g' une autre série analogue à g, et soit φ' son itérateur: pour que g et g' soient conjugués, il faut et il suffit que $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ soit convergent; en particulier, pour que g soit conjugué à g_0, il faut et il suffit que φ soit convergent.

Pour se faire une idée des obstructions à cette convergence, examinons d'abord le problème analogue pour une déformation infinitésimale d'ordre 1 de g_0, c'est-à-dire considérons la famille à 1 paramètre $g = g_0 + t\bar{g}$, $\bar{g}(\xi) = O(\xi^{-2})$; l'itérateur infinitésimal $\varphi = \xi + t\bar{\varphi}$, $\bar{\varphi} = O(\xi^{-1})$ vérifie $\varphi \circ g = g_0 \circ \varphi \pmod{t^2}$, c'est-à-dire $\bar{\varphi}(\xi + 1) - \bar{\varphi}(\xi) = -\bar{g}(\xi)$; cette équation détermine la série formelle $\bar{\varphi}$ comme on le voit immédiatement en calculant terme à terme. L'obstruction à la convergence peut se voir classiquement de 2 manières.

1re manière (« Méthode sectorielle »)

Dans un demi-plan $\operatorname{Re}\xi \gg 0$, l'équation $\varphi_+(\xi+1) - \varphi_+(\xi) = -\bar{g}(\xi)$ a une solution et une seule tendant vers 0 à l'infini, à savoir la série $\sum_{n\geqslant 0} \bar{g}(\xi+n)$, et φ_+ se prolonge au plan privé d'une « demi bande arrondie » $\{|\xi| < R\} \cup \{|\operatorname{Im}\xi| < R; \operatorname{Re}\xi < 0\} = B_R^-$ (pour $R \gg 0$).

De même $\varphi_-(\xi) = -\sum_{n<0} \bar{g}(\xi+n)$ est une solution de la même équation hors de la demi bande arrondie B_R^+ définie de façon analogue; alors pour que φ converge, il faut et il suffit qu'on ait, pour $|\operatorname{Im}\xi| > R$: $\Sigma\bar{g}(\xi+n) = 0$; plus généralement, on voit que g et g' sont analytiquement conjugués à l'ordre 1 si et seulement si l'on a, pour $|\operatorname{Im}\xi| \gg 0$: $\Sigma\bar{g}(\xi+n) = \Sigma\bar{g}'(\xi+n)$.

2e manière (transformation de Borel)

Posons $\bar{g} = \sum_{n\geqslant 2} \frac{a_n}{\xi^n}$, $\bar{\varphi} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{b_n}{\xi^n}$ et considérons leurs transformées de Borel $\bar{g}_B = Y\Sigma \frac{a_n}{(n-1)!} x^n$, $\bar{\varphi}_B = Y\Sigma \frac{b_n}{(n-1)!} x^n$; la première est un élément de $\tilde{\mathscr{C}}$, dont la variation $\Sigma \frac{a_n}{(n-1)!} x^n$ se prolonge en une série entière, et même entière de type exponentiel, parce que $\bar{g}$ converge à l'infini; a priori, la seconde est seulement une « microfonction formelle » qu'il suffit de définir par son expression, sans avoir besoin de définition générale. L'égalité $\bar{\varphi}(\xi+1) - \bar{\varphi}(\xi) = -\bar{g}(\xi)$ se traduit ici par l'égalité $(e^{-x}-1)\bar{\varphi}_B = -\bar{g}_B$; en particulier, on a $\operatorname{var}\bar{\varphi}_B = \frac{-1}{(e^{-x}-1)} \operatorname{var}\bar{g}_B$; donc en fait, $\operatorname{var}\bar{\varphi}_B$ est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, avec des pôles simples sur $2\pi i\mathbf{Z} - \{0\}$; des obstructions à la convergence de φ sont ici les *résidus* de $\operatorname{var}\bar{\varphi}_B$. Ce sont en fait les seules obstructions: plus généralement si $\bar{g}'$ est une autre fonction analogue à $\bar{g}$, et si $\operatorname{var}\bar{\varphi}_B$ et $\operatorname{var}\bar{\varphi}'_B$ ont les mêmes résidus, alors $\operatorname{var}\bar{\varphi}_B - \operatorname{var}\bar{\varphi}'_B$ est entière, et de la forme $\frac{1}{(e^{-x}-1)} \times$ (fonction entière de type exponentiel); il en résulte par des raisonnements classiques que $\operatorname{var}(\bar{\varphi}_B - \bar{\varphi}'_B)$ est entière de type exponentiel, donc que $\bar{\varphi} - \bar{\varphi}'$ converge à l'infini, donc que g et g' sont analytiquement conjugués à l'ordre 1 (la réciproque est évidente).

Pour voir l'équivalence des 2 méthodes, il suffit de voir que les résidus de $\operatorname{var}\bar{\varphi}_B$ sont égaux aux coefficients de Fourier de la série $\Sigma\bar{g}(\xi+n)$; je laisse cette question au lecteur.

Nous allons voir maintenant comment les deux méthodes précédentes se généralisent au problème envisagé.

(II.2) LA MÉTHODE SECTORIELLE

Je serai ici très rapide, et renverrai pour les démonstrations à mon exposé [M]. Cette méthode se trouve essentiellement dans [E]; une variante a été retrouvée indépendamment par Voronin [V].

Soient g, g_0, φ comme ci-dessus.

THÉORÈME (II.2.1) (Kimura [K]). *Pour* $R \gg 0$, *il existe une unique fonction* φ_+ (resp. φ_-), *holomorphe dans* $\mathbf{C} - B_R^-$ (resp. $\mathbf{C} - B_R^+$) *et possédant les propriétés suivantes:*

i) *dans tout secteur* $\{|\arg \xi| < \pi - \varepsilon\} - B_R^-$, φ_+ *admet* φ *pour développement asymptotique à l'infini; énoncé analogue pour* φ_-.

ii) *On a* $\varphi_+ \circ g = g_0 \circ \varphi_+$ *sur* $\mathbf{C} - B_{R'}^+$, *avec* $R' > R$ *convenable; énoncé analogue pour* φ_-.

Considérons alors la fonction $\varphi_+\varphi_-^{-1}$, définie dans $|\operatorname{Im} \xi| \gg 0$; dans tout secteur $\varepsilon < \arg \xi < \pi - \varepsilon$ et $-\pi + \varepsilon < \arg \xi < -\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, cette fonction admet ξ pour développement asymptotique; posons alors $\varphi_+\varphi_-^{-1} = \xi + \chi$; χ est asymptotique à 0; de plus, le fait que $\varphi_+\varphi_-^{-1}$ commute à g_0 montre qu'on a $\chi(\xi+1) = \chi(\xi)$. Donc, on a

$$\text{(II.2.2)}\quad \begin{aligned} &\text{dans} \quad \operatorname{Im} \xi \gg 0: \chi(\xi) = \sum_{n \geqslant 1} \chi_n e^{2\pi i n \xi} \\ &\text{et dans} \quad \operatorname{Im} \xi \ll 0: \chi(\xi) = \sum_{n \leqslant -1} \chi_n e^{2\pi i n \xi}. \end{aligned}$$

Soit alors g' une autre fonction analogue à g. Notons χ_g et $\chi_{g'}$ les « fonctions χ » correspondantes.

THÉORÈME (II.2.3).

1) *Pour que* g *et* g' *soient conjugués, il faut et il suffit qu'on ait* $\chi_g = \chi_{g'}$.

2) *Réciproquement, soit* χ *une fonction périodique dans* $|\operatorname{Im} \xi| \gg 0$, *du type* (2.2). *Alors il existe* $g \in G$, *formellement conjugué à* g_0, *et telle qu'on ait* $\chi_g = \chi$.

La première assertion est immédiate. On trouvera dans [M] une démonstration rapide de la seconde. D'autres méthodes, plus explicites, se trouvent dans [E 2].

(II.3) Transformation de Borel et résurgence

La méthode précédente assez élémentaire, n'utilisait pas les résultats du chapitre I. Ici, au contraire, ils vont jouer un rôle essentiel.

Soient g, g_0 et φ comme précédemment, et définissons la « microfonction formelle » φ_B comme au n° 1. Observons d'abord que les fonctions φ_+ et φ_- définies au théorème (2.1) vérifient la majoration suivante: dans tout secteur $\varepsilon \leqslant \arg\xi \leqslant \pi - \varepsilon$ et $-\pi + \varepsilon \leqslant \arg\xi \leqslant -\varepsilon$ ($\varepsilon>0$), $\varphi_+ - \varphi_-$ est, à l'infini, de l'ordre de $e^{-2\pi|\mathrm{Im}\xi|}$ [en effet, on a $\varphi_+\varphi_-^{-1} = \xi + \chi(\xi)$, d'où $\varphi_+ - \varphi_- = \chi\circ\varphi_-$ et il suffit d'utiliser les propriétés asymptotiques de φ_- et χ pour obtenir le résultat cherché]. On peut déduire de là, et de la théorie de la sommabilité de Borel que var φ_B est en fait holomorphe dans le plan privé des deux demi-droites $[2\pi i, i\infty[$ et $[-2\pi i, -i\infty[$. Je renvoie pour ces questions aux travaux sur la sommabilité de Borel, notamment à [R].

Ici, on va directement obtenir un résultat plus précis:

Théorème (II.3.1). *On a* $\varphi_B \in \mathscr{C}(2\pi i\mathbf{Z})$.

Ceci peut encore être précisé: soit a le point base choisi, et γ un chemin quelconque de $\mathbf{C} - 2\pi i\mathbf{Z}$ d'origine a et d'extrémité un point $b \in a + 2\pi i\mathbf{Z}$; on définit alors $\Delta_\gamma\varphi_B$ comme en (I.5.4). On a le résultat suivant qui donne l'expression des singularités de var φ_B:

Théorème (II.3.2). *Pour tout* γ *comme ci-dessus, on a*

$$\Delta_\gamma\varphi_B = a_\gamma\delta + Yg_\gamma,$$

avec $a_\gamma \in \mathbf{C}$, $g_\gamma \in \mathscr{O}$; *en particulier, on a* $\varphi_B \in \delta' + \mathscr{C}(2\pi i\mathbf{Z})$.

Indiquons le principe de la démonstration; pour les détails, voir [E 2], p. 311-318. Posons

$$\varphi(\xi) = \xi + \pi(\xi),\ g(\xi) = \xi + 1 + k(\xi+1);$$

l'équation $\varphi\circ g = \varphi + 1$ se réécrit $g + \pi\circ g = \xi + 1 + \pi$, ou encore $\pi(\xi+k(\xi)) = \pi(\xi-1) - k(\xi)$.

En appelant K (resp. L) l'image réciproque par l'application $\xi\mapsto\xi + k(\xi)$ (resp. $\xi\mapsto\xi-1$), cela s'écrit $K\pi = L\pi - k$, ou encore $(L-I)\pi = (K-I)\pi - k$. L'idée est alors de faire apparaître l'inverse de $L - I$, comme dans le cas linéaire; cet inverse est bien défini, des séries $\sum_{n\geqslant 2} a_n/\xi^n$ vers les séries $\sum_{n\geqslant 1} b_n/\xi^n$.

L'équation précédente a, dans les séries formelles, une solution unique

$$\pi = -\sum_{n\geqslant 0} [(L-I)^{-1}(K-I)]^n(L-I)^{-1}k\,.$$

[$(L-I)^{-1}$ augmente de 1 les degrés en ξ, et $(K-I)$ les diminue de 3, donc la série est bien formellement convergente].

On applique alors la transformation de Borel à la formule précédente: $(L-I)^{-1}$ devient la division par (e^x-1), et K la composition-convolution avec $(\xi+k)_B$. On arrive alors aux résultats cherchés par un calcul de majoration.

D'après le théorème (I.6.10) la transformée de Borel ψ_B de l'itérateur inverse vérifiera alors aussi $\psi_B \in \delta' + \mathscr{C}(2\pi i\mathbf{Z})$. Les hyperfonctions ψ_B et φ_B vérifient des « relations de résurgence » remarquables qu'on va maintenant établir.

Partons de la formule $g\circ\psi = \psi\circ g_0 = \psi(\xi+1)$; en passant aux transformées de Borel, on trouve

$$g_B \circledast \psi_B = \psi_B \circledast g_{0,B}\,;$$

posant $\omega = 2\pi in$, $(n\in\mathbf{Z}-\{0\})$, on a

$$\Delta_\omega g_B = \Delta_\omega g_{0,B} = 0\,;$$

d'autre part:

$$g_{0,B} = \delta' + \delta\,,$$

d'où:

$$\exp_*\omega(g_{0,B}-\delta') = \exp_*(-\omega\delta) = e^{2\pi in}\delta = \delta\,;$$

en utilisant (I.6.9), on trouve alors:

$$(\partial g_B \circledast \psi_B) * \Delta_\omega\psi_B = \Delta_\omega\psi_B \circledast g_{0,B}\,.$$

Posons $\mathscr{L}(\Delta_\omega\psi_B) = \Delta_\omega\psi$; d'après le théorème précédent, on est dans le cas d'application de la transformation de Laplace considérée au chapitre I, et l'on a:

$$\Delta_\omega\psi = \sum_{n\leqslant 0} c_n\xi^n\,, \qquad c_n\in\mathbf{C}\,;$$

on aura:

$$\left(\left(\frac{d}{d\xi}g\right)\circ\psi\right)\Delta_\omega\psi = (\Delta_\omega\psi)(\xi+1)\,.$$

D'autre part, en dérivant l'équation $g \circ \psi = \psi(\xi+1)$, on trouve

$$\left(\frac{dg}{d\xi} \circ \psi\right)\frac{d\psi}{d\xi} = \frac{d\psi}{d\xi}(\xi+1)\,.$$

Maintenant, il est facile de voir que l'équation $\left(\frac{dg}{d\xi} \circ \psi\right)\eta = \eta(\xi+1)$ n'a qu'une solution formelle de la forme $\sum_{n \leqslant 0} c_n\xi^n$, à un facteur constant près. On trouve donc la relation

$$\text{(II.3.3)} \qquad \Delta_\omega\psi = A_\omega\frac{d\psi}{d\xi}, \qquad \text{ou} \qquad \Delta_\omega\psi_B = A_\omega\partial\psi_B\,, \qquad A_\omega \in \mathbf{C}\,.$$

Maintenant, en utilisant la relation $\psi \circ \varphi = \xi$, ou $\psi_B \circledast \varphi_B = \delta'$, et la formule (I.6.9), on trouve facilement qu'on a:

$$\text{(II.3.4)} \qquad \Delta_\omega\varphi_B = -\,A_\omega\exp_*(-\omega(\varphi_B - \delta'))\,,$$

ce qu'il est commode d'écrire

$$\Delta_\omega\varphi = -\,A_\omega e^{-\omega(\varphi-\xi)}\,.$$

Soit maintenant g' un autre élément de G, formellement conjugué à g_0, et soient φ', ψ', (resp. A'_ω) les itérateurs (resp. les invariants) qui lui correspondent.

La version « résurgente » du théorème (II.2.3), assertion 1, est alors la suivante.

THÉORÈME (II.3.5). *Pour que g et g' soient analytiquement conjugués, il faut et il suffit qu'on ait, pour tout $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$: $A_{2\pi i n} = A'_{2\pi i n}$.*

Soit h la série formelle à l'infini définie par $\varphi = \varphi' \circ h$; on a $g' = h \circ g \circ h^{-1}$, et d'après les résultats qui précèdent h est transformé de Laplace d'un certain $h_B \in \delta' + \mathscr{C}(2\pi i\mathbf{Z})$, vérifiant $\varphi_B = h_B \circledast \varphi_B$. Pour simplifier les notations, on continuera à se permettre d'écrire les dérivations étrangères du côté « fonctions de ξ ». On a:

$$-\,A_\omega e^{-\omega(\varphi-\xi)} = \Delta_\omega\varphi = \left(\frac{d\varphi'}{d\xi} \circ h\right)\Delta_\omega h + e^{-\omega(h-\xi)}(\Delta_\omega\varphi') \circ h$$

le dernier terme vaut

$$-\,A'_\omega e^{-\omega(h-\xi)-\omega(\varphi'-\xi)\circ h} = -\,A'_\omega e^{-\omega(\varphi-\xi)}\,.$$

Alors:

1) si h est convergent, i.e. si g et g' sont analytiquement conjugués, h_B est entière, donc $\Delta_\omega h = 0$ et $A_\omega = A'_\omega$.

2) Réciproquement, si $A_\omega = A'_\omega$ pour tout ω, on a $\Delta_\omega h = 0$; on en déduit facilement que h_B est entière. On montre alors, par des majorations qui se font en même temps que celles du théorème (II.3.2) que h_B est de type exponentiel; (voir [E 2], p. 321 et suivantes); donc h est convergent et g' est conjugué à g.

Pour terminer, indiquons rapidement le lien entre les deux séries d'invariants trouvés aux n^{os} 2 et 3. Tout d'abord on déduit de la formule (II.3.4) qu'il existe des $A^+_\omega \in \mathbf{C}$ tels qu'on ait $\Delta^+_\omega \varphi = - A^+_\omega e^{-\omega(\varphi - \xi)}$; de plus, les A^+_ω s'expriment par des polynômes universels (qu'on pourrait expliciter) dans les A_ω, et réciproquement. On utilise pour cela la formule (I.6.1) et son « inverse » $\exp(\Sigma \Delta_n t^n) = \mathrm{id} + \Sigma \Delta^+_n t^n$.

Soient alors $\{\chi_n\}$ les invariants (II.2.2). On a le résultat suivant.

PROPOSITION (II.3.6). *Pour* $n > 0$, *on a* $A^+_{2\pi in} = \chi_{-n}$.

Je me limiterai à un argument heuristique; soit γ_θ la demi-droite $e^{i\theta}[0, +\infty[$ orientée de manière à avoir 0 pour origine. On doit avoir, en un sens convenable,

$$\text{(II.3.7)} \qquad \int_{\gamma_\theta} \varphi_B(x) e^{-x\xi} dx = \varphi_+ \quad \text{si} \quad |\arg \theta| < \frac{\pi}{2}$$
$$= \varphi_- \quad \text{si} \quad |\pi - \arg \theta| < \frac{\pi}{2}.$$

On regarde alors ce qui se passe lorsque θ traverse la valeur $\frac{\pi}{2}$ (cf. la démonstration de (I.5.5)); formellement, pour

$$\operatorname{Im} \xi \ll 0, \ -\pi + \varepsilon < \arg \xi < -\varepsilon,$$

on a

$$\varphi_+ - \varphi_- = \Sigma \int_{\gamma_n} \Delta^+_{2\pi in} \varphi_B(x) e^{-x\xi - 2\pi in\xi} d\xi,$$

γ_n étant le translaté par $2\pi in$ de $\gamma_\theta \left(\theta = \frac{\pi}{2} + 0\right)$

d'où $$\varphi_+ - \varphi_- = \sum_{n>0} A^+_{2\pi in} e^{-2\pi in\varphi_-}$$

en comparant avec (II.2.3), on « obtient » le résultat cherché ; je laisse le lecteur regarder les modifications à faire pour $n < 0$.

Dans [E 2], p. 417 et suivantes, le lecteur trouvera une démonstration de cette proposition par un argument voisin de celui qui est esquissé ici ; le point-clef est une majoration à l'infini de var φ_B, à laquelle j'ai déjà fait allusion ; ceci permet entre autres d'établir (II.3.7) (bien entendu, au voisinage de 0, l'intégrale doit être interprétée au sens des distributions, comme on l'a fait au chapitre I).

Remarque (II.3.8). Dans la démarche précédente, on retrouve les $\varphi_{\pm}$, donc les résultats du n° 2 (méthode sectorielle) par la méthode résurgente du n° 3.

Sans que j'aie vérifié les détails, il me semble qu'une utilisation plus systématique de la sommabilité de Borel permettrait inversement de retrouver les résultats du n° 3, en particulier le théorème (II.3.1) à partir du n° 2, et plus précisément de la formule $\varphi_+ - \varphi_- = \Sigma \chi_n e^{2\pi i n \varphi_-}$. A mon avis, ceci ne diminue pas l'intérêt de principe qui s'attache à l'utilisation directe de la convolution et de la méthode résurgente : outre son élégance, et son caractère direct, cette méthode a aussi l'avantage de donner des résultats dans d'autres applications dont je n'ai pas parlé, par exemple dans des cas où l'on trouve pour Ω un réseau ; dans un tel cas, une méthode de type sectoriel semble difficile à appliquer.

BIBLIOGRAPHIE

[D] Deligne, P. In SGA 7.2, Exposés n^{os} 13 et 14. *Springer Lect. Notes n° 340*, pp. 82-164.

[E] Ecalle, J. *Théorie des invariants holomorphes.* Publ. Math. Orsay n° 67 — 7409 (1974).

[Ei] —— Les fonctions résurgentes et leurs applications, Tome i.
$i = 1, 2$ Publications mathématiques d'Orsay n^{os} 81-05/06, 1981 ;
$i = 3$ à paraître prochainement ;
$i \geqslant 4$ en préparation.

[K] Kimura, T. On the iteration of analytic functions. *Funk. Eqvacioj 14-3* (1971), 197-238.

[M] MALGRANGE, B. Travaux d'Ecalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques. *Sém. Bourbaki*, n° 582, nov. 1981.

[R] RAMIS, J. P. Les séries k-sommables et leurs applications. *Springer Lect. Notes in Physics n° 126* (1980), pp. 178-199.

[SKK] SATO, M., T. KAWAI and M. KASHIWARA. Microfunctions and pseudo-differential equations. *Springer Lect. Notes n° 287* (1973), pp. 265-529.

[V] VORONIN, S. M. Classification analytique des germes d'applications conformes $(\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ tangentes à l'identité (en russe). *Funkts. Analyz 15-1* (1981), pp. 1-17.

(Reçu le 26 octobre 1984)

Bernard Malgrange

Institut Fourier
Université scientifique et médicale de Grenoble
B.P. 74
38402 — Saint-Martin-d'Hères
(France)